

# Методы решения сеточных уравнений

## 1 Прямые и итерационные методы

В результате разностной аппроксимации краевых задач математической физики получают СЛАУ, матрицы которых обладают следующими свойствами:

- 1) порядок матрицы очень высок и равен числу узлов сетки;
- 2) матрицы являются разреженными и имеют большое число нулевых элементов;
- 3) матрицы являются плохо обусловленными: отношение наибольшего собственного значения матрицы к ее наименьшему собственному значению является величиной  $O(h^{-2})$ .

Эти особенности матриц получаемых СЛАУ требуют разработки специальных экономичных методов обработки таких матриц.

*Прямыми методами* решения задач называют методы, с помощью которых можно получить точное решение задачи за конечное число арифметических операций.

*Итерационными* называют методы, с помощью которых можно получить приближенное решение задачи с любой заданной точностью за конечное число арифметических операций.

## 2 Прямые методы

Типичным примером прямого метода решения разностной задачи является рассмотренный ранее метод прогонки. Метод прогонки в свою очередь является частным случаем метода Гаусса.

Изложенный в первом параграфе метод прогонки называется методом *правой* прогонки, так как решения  $y_n$  системы находятся по соответствующим формулам последовательно, начиная от правой границы. Аналогичным образом могут быть получены формулы для левой прогонки.

Рассмотрим еще один пример решения системы с разреженной матрицей. Пусть необходимо решить систему с «почти» трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} a_1 y_N - c_1 y_1 + b_1 y_2 = -f_1, \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N + b_N y_1 = -f_N. \end{cases} \quad (2.1)$$

Такая алгебраическая система возникает при отыскании *периодического* решения системы трехточечных уравнений:

$$y_{i+N} = y_i$$

при условии, что:

$$a_{i+N} = a_i, \quad b_{i+N} = b_i, \quad c_{i+N} = c_i, \quad f_{i+N} = f_i.$$

Относительно коэффициентов системы (2.1) будем предполагать, что  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ ,  $c_i > a_i + b_i$ . Запишем систему (2.1) в матричном виде  $A_N Y_N = -F_N$ , где  $Y_N = (y_1, \dots, y_N)^T$ ,  $F_N = (f_1, \dots, f_N)^T$ , а матрица  $A_N$  имеет вид:

$$A_N = \begin{bmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{N-2} & b_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ b_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & -c_N \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Присутствие ненулевых элементов в правом верхнем и левом нижнем углах матрицы (2.2) не позволяет решать систему (2.1) обычным методом прогонки. Для решения (2.1) можно применить метод окаймления. Запишем систему (2.1) в виде:

$$\begin{cases} A_{N-1} Y_{N-1} + U_{N-1} y_N = -F_{N-1}, \\ V_{N-1} Y_{N-1} - c_N y_N = -f_N, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $Y_{N-1} = (y_1, \dots, y_{N-1})^T$ ,  $F_{N-1} = (f_1, \dots, f_{N-1})^T$ ,

$$A_{N-1} = \begin{bmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{N-2} & b_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} \end{bmatrix}, \quad U_{N-1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$V_{N-1} = [ \quad b_N \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad a_N ].$$

Решение первого блока уравнений системы (2.3) будем искать в виде:

$$Y_{N-1} = P_{N-1} + y_N Q_{N-1},$$

где  $P_{N-1} = (p_1, p_2, \dots, p_{N-1})^T$  и  $Q_{N-1} = (q_1, q_2, \dots, q_{N-1})^T$  — решения задач:

$$A_{N-1}P_{N-1} = -F_{N-1}, \quad A_{N-1}Q_{N-1} = -U_{N-1}. \quad (2.4)$$

Поскольку  $A_{N-1}$  — трехдиагональная матрица, то системы (2.4) решаются обычной прогонкой:

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{b_i}{c_i - \alpha_{i-1}a_i}, & \beta_i = \frac{f_i + a_i\beta_{i-1}}{c_i - \alpha_{i-1}a_i}, & \gamma_i = \frac{a_i\gamma_{i-1}}{c_i - \alpha_{i-1}a_i}, & i = 2, 3, \dots, N; \\ \alpha_1 = \frac{b_1}{c_1}, & \beta_1 = \frac{f_1}{c_1}, & \gamma_1 = \frac{a_1}{c_1}; \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} p_{N-1} = \beta_{N-1}, & q_{N-1} = \alpha_{N-1} + \gamma_{N-1}; \\ p_i = \alpha_i p_{i+1} + \beta_i, & q_i = \alpha_i q_{i+1} + \gamma_i, & i = N-2, N-3, \dots, 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Выразим теперь  $y_N$ :

$$\begin{aligned} V_{N-1}Y_{N-1} - c_N y_N &= V_{N-1}P_{N-1} + y_N V_{N-1}Q_{N-1} - c_N y_N = -f_N \Rightarrow \\ y_N &= \frac{f_N + b_N p_1 + a_N p_{N-1}}{c_N - b_N q_1 - a_N q_{N-1}} = \frac{f_N + b_N p_1 + a_N \beta_{N-1}}{c_N - b_N q_1 - a_N (\alpha_{N-1} + \gamma_{N-1})} \cdot \frac{c_N - a_N \alpha_{N-1}}{c_N - a_N \alpha_{N-1}} = \\ &= \frac{\beta_N + \alpha_N p_1}{1 - \alpha_N q_1 - \gamma_N}. \end{aligned}$$

Теперь, зная  $y_N, p_i, q_i, i = 1, \dots, N-1$ , находим решение системы:

$$y_i = p_i + y_N q_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

При выполнении условий  $a_i > 0, b_i > 0, c_i > a_i + b_i$  решение задачи описанным методом устойчиво, так как при этом устойчива обычная прогонка. Покажем, что  $1 - \alpha_N q_1 - \gamma_N \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{b_1}{c_1} < \frac{b_1}{a_1 + b_1} < 1, \\ 0 < \alpha_{i-1} < 1 &\Rightarrow \alpha_i = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_{i-1}} < \frac{b_i}{c_i - a_i} < 1; \\ \alpha_1 + \gamma_1 &= \frac{a_1 + b_1}{c_1} < 1, \\ \alpha_{i-1} + \gamma_{i-1} < 1 &\Rightarrow \alpha_i + \gamma_i = \frac{b_i + a_i \gamma_{i-1}}{c_i - a_i \alpha_{i-1}} < \frac{b_i + a_i - a_i \alpha_{i-1}}{c_i - a_i \alpha_{i-1}} < 1; \end{aligned}$$

$$q_{N-1} = \alpha_{N-1} + \gamma_{N-1} < 1 \Rightarrow q_i = \alpha_i q_{i+1} + \gamma_i < 1 \Rightarrow q_1 < 1;$$

$$q_1 < 1 \text{ и } \alpha_N + \gamma_N < 1 \Rightarrow 1 - \alpha_N q_1 - \gamma_N > 1 - \alpha_N - \gamma_N > 0.$$

## 3 Итерационные методы

### 3.1 Двухслойные итерационные схемы

Пусть требуется решить уравнение

$$Ay = f, \quad (3.1)$$

где  $A : H \rightarrow H$  — линейный оператор в конечномерном ( $N$ -мерном) вещественном пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(y, v)$  и нормой  $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ , причем

$$A = A^* > 0,$$

$f \in H$  — произвольная функция. Итерационный метод позволяет, выбрав некоторое начальное приближение  $y_0 \in H$ , последовательно находить приближенные решения уравнения (3.1):

$$y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots$$

Если при вычислении  $y_{k+1}$  используется только предыдущая итерация  $y_k$ , то говорят об одношаговом итерационном методе, если две предыдущие итерации, то соответствующий итерационный метод называется двухшаговым. Эти методы называются также двухслойными и трехслойными итерационными методами.

Одношаговый итерационный метод решения уравнения (3.1) можно записать следующим образом:

$$B_k y_{k+1} = C_k y_k + F_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

где  $B_k$  и  $C_k$  — линейные операторы, действующие из  $H$  в  $H$ , причем  $B^{-1}$  существует,  $F_k \in H$ ,  $y_k$  —  $k$ -я итерация. Точное решение  $u$  уравнения (3.1) должно тождественно удовлетворять (3.2), то есть:

$$(B_k - C_k)u = F_k.$$

Это возможно лишь при условии, что

$$(B_k - C_k)A^{-1}f = F_k,$$

откуда следует, что:

- 1) должен существовать обратный оператор  $(B_k - C_k)^{-1}$ ;
- 2) должно выполняться равенство  $f = A(B_k - C_k)^{-1}F_k$ .

Введем числовой параметр  $\tau_{k+1}$ , такой что

$$\tau_{k+1}^{-1}(B_k - C_k) = A, \quad F_k = f\tau_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В результате получим *каноническую* форму двухслойной итерационной схемы:

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

где  $y_0 \in H$  — некоторое начальное приближение. Тогда

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} B_k^{-1} (Ay_k - f)$$

или, что то же самое:

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} B_k^{-1} r_k = y_k - \tau_{k+1} w_k,$$

где  $r_k = Ay_k - f$  — невязка,  $w_k = B_k^{-1} r_k$  — поправка.

Итерационный процесс сходится, если

$$\|y_k - u\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Вычисления прекращаются, если достигнуто условие

$$\|y_k - u\| \leq \varepsilon \|y_0 - u\| \quad (3.4)$$

или

$$\|Ay_k - f\| \leq \varepsilon \|Ay_0 - f\|, \quad (3.5)$$

где  $\varepsilon$  — относительная погрешность.

Рассмотрим уравнение для погрешности  $z_k = y_k - u$ :

$$B_k \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно,  $z_{k+1} = S_{k+1} z_k$ , где  $S_{k+1} = E - \tau_{k+1} B_k^{-1} A$  — оператор перехода со слоя  $k$  на слой  $k + 1$ . Последовательно выражая  $z_k, z_{k-1}, \dots, z_1$  получим

$$z_{k+1} = T_{k+1} z_0, \quad T_{k+1} = S_{k+1} S_k \dots S_1, \quad (3.6)$$

где  $T$  — разрешающий оператор схемы (3.3). Из (3.6) получаем:

$$\|z_{k+1}\| = \|T_{k+1} z_0\| \leq \|T_{k+1}\| \cdot \|z_0\| \Leftrightarrow \|z_{k+1}\| \leq q_{k+1} \|z_0\|,$$

где  $q_{k+1} = \|T_{k+1}\|$ . Условие окончания итераций выполнено, если  $q_{k+1} \leq \varepsilon$ . Итак, для выяснения вопроса о сходимости итерационного процесса нужно оценить норму разрешающего оператора  $T_{k+1}$ .

Если  $B_k = B$  — не меняется в ходе итерационного процесса, то

$$y_{k+1} - y_k = \tau_{k+1} B^{-1} r_k = -\tau_{k+1} w_k \Rightarrow$$

$$Ay_{k+1} - Ay_k = (Ay_{k+1} - f) - (Ay_k - f) = r_{k+1} - r_k = -\tau_{k+1}Aw_k \Rightarrow$$

$$B(B^{-1}r_{k+1} - B^{-1}r_k) = -\tau_{k+1}Aw_k \Rightarrow B\frac{w_{k+1} - w_k}{\tau_{k+1}} + Aw_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Схема (3.3) имеет точную аппроксимацию на решении  $u$  уравнения  $Au = f$  при любых операторах  $B_k$  и любых параметрах  $\tau_{k+1}$ . Поскольку величина  $q_{k+1}$  зависит от  $B_k$  и  $\tau_{k+1}$ , то  $B_k$  и  $\tau_{k+1}$  следует выбирать так, чтобы минимизировать норму  $q_{k+1} = \|T_{k+1}\|$  разрешающего оператора схемы (3.3). Кроме того, выбор оператора  $B_k$  определяется условием минимизации числа арифметических операций, необходимых для определения  $y_{k+1}$  при заданном  $y_k$  из уравнения

$$B_k y_{k+1} = F_k,$$

где

$$F_k = B_k y_k - \tau_{k+1}(Ay_k - f).$$

Любой итерационный процесс (3.3) можно формально трактовать как двухслойную схему для решения нестационарной задачи

$$B\frac{du}{dt} + Au = f,$$

причем параметр  $\tau_{k+1}$  можно рассматривать как шаг по фиктивному времени

$$t_{k+1} = \sum_{m=1}^{k+1} \tau_m.$$

Связь между нестационарными задачами и итерационными методами подчеркивается, когда говорят, что в основе итерационных процессов лежит метод установления, заключающийся в следующем. Пусть в области  $\bar{G} = G + \Gamma$  нужно решить стационарную задачу

$$\begin{cases} Lv = -f(M), & M \in G; \\ v(P) = \mu(P), & P \in \Gamma; \quad v = v(M). \end{cases} \quad (3.7)$$

Рассмотрим в этой же области нестационарную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lv + f(M), & M \in G, \quad t > 0; \\ u(P, t) = \mu(P), & P \in \Gamma, \quad t \geq 0; \\ u(M, 0) = u_0(M), & M \in \bar{G}; \quad u = u(M, t). \end{cases} \quad (3.8)$$

Пусть  $\{w_n\}$  и  $\{\lambda_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — собственные функции и собственные значения задачи:

$$\begin{cases} Lw + \lambda w = 0, & M \in G; \\ w(P) = 0, & P \in \Gamma. \end{cases} \quad (3.9)$$

Обозначим  $z(M, t) = u(M, t) - v(M)$ , тогда для  $z(M, t)$  получаем задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = Lz, & M \in G, t > 0; \\ z(P, t) = 0, & P \in \Gamma, t \geq 0; \\ z(M, 0) = u_0(M) - v(M), & M \in \bar{G}; \quad u = u(M, t). \end{cases}$$

Рассмотрим норму разности:

$$\|u - v\| = \|z\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} w_n(M) \right\|.$$

Пусть  $\text{Im} \lambda_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ . Тогда:

$$\|u - v\| \leq e^{-\lambda_1 t} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} C_n w_n(M) \right\| = e^{-\lambda_1 t} \|u_0(M) - v(M)\|,$$

то есть  $\|u - v\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , и решение  $u(x, t)$  задачи (3.8) «выходит» на стационарный режим  $v(M)$ , то есть стремится к решению задачи (3.7).

Различие между итерационными схемами и схемами для нестационарных задач заключается в следующем:

1) итерационная схема (3.3) точно аппроксимирует уравнение (3.1), так как решение  $u$  уравнения (3.1) при любых  $B_k$  и  $\tau_{k+1}$  удовлетворяет уравнению (3.1);

2) выбор параметра  $\tau_{k+1}$  и операторов  $B_k$  следует подчинить лишь требованиям сходимости итераций и экономичности, то есть минимума арифметических операций для получения решения исходной задачи с заданной точностью (в случае нестационарной задачи выбор шага подчинен прежде всего требованию аппроксимации).

Итерационную схему (то есть  $\{\tau_{k+1}\}$  и  $\{B_k\}$ ) следует выбирать так, чтобы минимальное число  $n(\varepsilon)$  итераций, при котором достигается заданная точность  $\varepsilon$ , сочеталось с минимальным числом действий  $Q_k$  для нахождения  $k$ -й итерации. Тогда минимальным будет общее число арифметических операций  $Q(\varepsilon)$ , которое нужно выполнить, чтобы получить при помощи метода (3.3) решение уравнения (3.1) с заданной точностью  $\varepsilon > 0$  при любом выборе начального приближения:

$$Q(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} Q_k.$$

Если  $B_k = E$  — единичный оператор, то соответствующая итерационная схема

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.10)$$

где  $y_0 \in H$  — произвольное начальное приближение, называется явной. Если  $B_k \neq E$ , схема (3.3) называется неявной.

## 4 Итерационный метод переменных направлений

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Lambda u = -f(x), & x \in \omega_h; \\ u(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ ,  $\Lambda_p u = u_{\bar{x}_p x_p}$ ,  $p = 1, 2$ ,

$$\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h = \{x_i \in (i_1 h_1, i_2 h_2) \in \bar{G}\}, \quad \bar{G} = \{0 \leq x_p \leq l_p, p = 1, 2\}.$$

Для решения задачи (4.1) используем схему переменных направлений:

$$\begin{cases} \frac{y^{s+\frac{1}{2}} - y^s}{\tau_{s+1}^{(1)}} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^s + f(x), & x \in \omega_h \\ y^{s+\frac{1}{2}} = \mu(x), & x \in \gamma_h, \\ \frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{1}{2}}}{\tau_{s+1}^{(2)}} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{s+1} + f(x), & x \in \omega_h \\ y^{s+1} = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (4.2)$$

где  $s = 0, 1, \dots$ ,  $y^0 = y(x, 0)$  — начальное приближение,  $\tau_{s+1}^{(1)} > 0$  и  $\tau_{s+1}^{(2)} > 0$  — итерационные параметры, подлежащие выбору из условия минимума числа итераций.

Если ввести пространство  $H = \dot{\Omega}$  сеточных функций, ограниченных на  $\bar{\omega}_h$  и обращающихся в нуль на  $\gamma_h$ , задать на нем скалярное произведение

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)v(x)h_1 h_2$$

и ввести операторы  $A_p y = -\Lambda_p y$ ,  $p = 1, 2$ , то можно перейти к операторно-разностной схеме. Операторы  $A_p$  обладают следующими свойствами в случае прямоугольной области  $G$ :

$$\begin{aligned} A_p^* &= A_p, \quad A_1 A_2 = A_2 A_1, \\ \delta_p E &\leq A_p \leq \Delta_p E, \quad p = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\delta_p = \frac{4}{h_p^2} \sin^2 \frac{\pi h_p}{2l_p}, \quad \Delta_p = \frac{4}{h_p^2} \cos^2 \frac{\pi h_p}{2l_p}, \quad p = 1, 2.$$

Рассмотрим погрешность  $z^{s+1} = y^{s+1} - u$ . Она удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} \left( E + \tau_{s+1}^{(1)} A_1 \right) z^{s+\frac{1}{2}} = \left( E - \tau_{s+1}^{(1)} A_2 \right) z^s, \\ \left( E + \tau_{s+1}^{(2)} A_2 \right) z^{s+1} = \left( E - \tau_{s+1}^{(2)} A_1 \right) z^{s+\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

где  $z^0 = y^0 - u$ ,  $s = 0, 1, \dots$ . Исключим  $z^{s+\frac{1}{2}}$ , пользуясь тем, что операторы  $A_1$  и  $A_2$  перестановочны:

$$\left(E + \tau_{s+1}^{(1)} A_1\right) \left(E + \tau_{s+1}^{(2)} A_2\right) z^{s+1} = \left(E - \tau_{s+1}^{(2)} A_1\right) \left(E - \tau_{s+1}^{(1)} A_2\right) z^s.$$

Следовательно,

$$z^{s+1} = S_{s+1} z^s, \quad S_{s+1} = S_{s+1}^{(1)} S_{s+1}^{(2)},$$

где

$$S_{s+1}^{(1)} = \left(E + \tau_{s+1}^{(1)} A_1\right)^{-1} \left(E - \tau_{s+1}^{(2)} A_1\right), \quad S_{s+1}^{(2)} = \left(E + \tau_{s+1}^{(2)} A_2\right)^{-1} \left(E - \tau_{s+1}^{(1)} A_2\right).$$

Таким образом,

$$z^n = T_n z^0, \tag{4.4}$$

где  $T_n = \prod_{s=1}^n S_s$  — разрешающий оператор, причем  $T_n^* = T_n$ .

#### 4.1 Выбор оптимальных параметров итерационной схемы переменных направлений (по Жордану)

Из равенства (4.4) следует оценка

$$\|z^n\| \leq \|T_n\| \cdot \|z^0\|.$$

Величина  $\|T_n\|$  зависит от параметров  $\tau_j^{(1)}$  и  $\tau_j^{(2)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Задача состоит в отыскании таких параметров  $\tau_1^{(1)}, \tau_2^{(1)}, \dots, \tau_n^{(1)}$  и  $\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}, \dots, \tau_n^{(2)}$ , где число итераций  $n = n(\varepsilon)$ , необходимое для достижения точности  $\varepsilon$ , задано:

$$\min_{\{\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}\}} \|T_n\| = q_n.$$

Из оценок (4.3) следует, что спектр оператора  $A_p$  принадлежит отрезку:

$$\delta_p \leq \lambda(A_p) \leq \Delta_p, \quad p = 1, 2.$$

Заменим операторы  $A_1$  и  $A_2$  операторами  $A'_1$  и  $A'_2$ , спектры которых совпадают:

$$\eta E \leq A'_p \leq E, \quad p = 1, 2, \quad \eta > 0.$$

Положим  $A_1 = (qE - rA'_1)^{-1}(A'_1 - pE)$ ,  $A_2 = (qE + rA'_2)^{-1}(A'_2 + pE)$ , где  $r, p, q$  — числа, подлежащие выбору, и введем параметры:

$$\omega^{(1)} = \frac{\tau^{(1)} - r}{q - \tau^{(1)}p}, \quad \omega^{(2)} = \frac{\tau^{(2)} + r}{q + \tau^{(2)}p}.$$

При этом получим:

$$S_j = \tilde{S}_j^{(1)} \tilde{S}_j^{(2)},$$

где

$$\tilde{S}_j^{(1)} = (E + \omega_j^{(1)} A'_1)^{-1} (E - \omega_j^{(2)} A'_1), \quad \tilde{S}_j^{(2)} = (E + \omega_j^{(2)} A'_2)^{-1} (E - \omega_j^{(1)} A'_2).$$

Выразим  $\|T_n\|$  через собственные значения операторов  $A'_1$  и  $A'_2$ :

$$\alpha_{k_1} = \lambda_{k_1}^{(1)}(A'_1), \quad \beta_{k_2} = \lambda_{k_2}^{(2)}(A'_2), \quad k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Так как  $A'_1 A'_2 = A'_2 A'_1$ , то они имеют общую систему собственных функций, то же, что и операторы  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A$  и  $T_n$ . Пусть  $\lambda_k(T_n)$  — собственные значения оператора  $T_n$ . Поскольку

$$\lambda(\tilde{S}^{(1)}) = \frac{1 - \omega^{(2)}\alpha}{1 + \omega^{(1)}\alpha}, \quad \lambda(\tilde{S}^{(2)}) = \frac{1 - \omega^{(1)}\beta}{1 + \omega^{(2)}\beta},$$

то

$$\lambda(T_n) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - \omega_j^{(2)}\alpha}{1 + \omega_j^{(1)}\alpha} \cdot \frac{1 - \omega_j^{(1)}\beta}{1 + \omega_j^{(2)}\beta}, \quad (4.5)$$

причем

$$0 < \eta \leq \alpha_{k_1} \leq 1; \quad 0 < \eta \leq \beta_{k_2} \leq 1; \quad k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha; \quad \alpha = 1, 2.$$

Норма оператора  $T_n$  равна наибольшему собственному значению этого оператора:

$$\|T_n\| = \max_k \lambda_k(T_n).$$

Заменим в выражении (4.5)  $\alpha_{k_1}$  и  $\beta_{k_2}$  непрерывно меняющимися аргументами  $\alpha$  и  $\beta$ .

При этом максимум правой части (4.5), вообще говоря, увеличивается, то есть

$$\|T_n\| \leq \max_{\alpha, \beta \in [\eta, 1]} \left| \prod_{j=1}^n \frac{1 - \omega_j^{(2)}\alpha}{1 + \omega_j^{(1)}\alpha} \cdot \frac{1 - \omega_j^{(1)}\beta}{1 + \omega_j^{(2)}\beta} \right|. \quad (4.6)$$

Поскольку  $\alpha$  и  $\beta$  меняются на отрезке  $[\eta, 1]$ , а  $\omega_j^{(1)}$  и  $\omega_j^{(2)}$  входят в формулу (4.7) симметрично, то можно положить  $\alpha = \beta$ ,  $\omega_j^{(1)} = \omega_j^{(2)} = \omega_j$  (минимум произведения будет достигаться, когда каждый сомножитель будет достигать минимума). В результате приходим к следующей задаче:

требуется найти параметры  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , при которых достигается минимум

$$\min_{\{\omega_j\}} \max_{\alpha \in [\eta, 1]} \prod_{j=1}^n \left( \frac{1 - \omega_j \alpha}{1 + \omega_j \alpha} \right)^2. \quad (4.7)$$

Задача (4.7) называется задачей минимакса, ее решение известно. Приведем окончательные формулы для вычисления оптимальных параметров  $\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}$ . Постоянные  $p, q, r$ ,

$\eta$  находятся из условий:  $\alpha = \beta = \eta$  при  $\lambda(A_1) = \delta_1$ ,  $\lambda(A_2) = \delta_2$  и  $\alpha = \beta = 1$  при  $\lambda(A_1) = \Delta_1$ ,  $\lambda(A_2) = \Delta_2$ , и выражаются формулами:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{(\Delta_1 - \delta_1)(\Delta_2 - \delta_2)}{(\Delta_1 + \delta_1)(\Delta_2 + \delta_2)}}, & \eta &= \frac{1-t}{1+t}, & \varkappa &= \frac{(\Delta_1 - \delta_1)\Delta_2}{(\Delta_2 + \delta_1)\Delta_1}, \\ p &= \frac{\varkappa - t}{\varkappa + t}, & r &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2 + (\Delta_1 + \Delta_2)p}{2\Delta_1\Delta_2}, & q &= r + \frac{1-p}{\Delta_1}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

причем  $\varkappa > t$ ,  $p > 0$ .

Пусть задана точность  $\varepsilon > 0$  итерационного процесса и известны границы  $\delta_\alpha$ ,  $\Delta_\alpha$  операторов  $A_\alpha$ . По формулам (4.8) находим  $\eta$ ,  $p$ ,  $q$  и  $r$ . После этого можно определить число итераций  $n(\varepsilon)$ , обеспечивающих заданную точность  $\varepsilon > 0$ :  $\|y_n - u\| \leq \varepsilon \|y_0 - u\|$ . Справедлива приближенная формула:

$$n(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4}{\varepsilon} \ln \frac{4}{\eta}. \quad (4.9)$$

Введем обозначения:

$$\theta = \frac{\eta^2}{16} \left(1 + \frac{\eta^2}{2}\right), \quad \sigma = \frac{2j-1}{2n}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Для определения  $\omega_j$  имеет место формула:

$$\omega_j = \frac{(1+2\theta)(1+\theta^\sigma)}{2\theta^{\sigma/2}(1+\theta^{1-\sigma}+\theta^{1+\sigma})}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

Остается определить  $\tau_j^{(1)}$  и  $\tau_j^{(2)}$ , исходя из формул

$$\omega = \frac{\tau^{(1)} - r}{q - \tau^{(1)}p}, \quad \omega = \frac{\tau^{(2)} + r}{q + \tau^{(2)}p}. \quad (4.11)$$

В частном случае, когда  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  и  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$  имеем:

$$p = r = 0, \quad q = \frac{1}{\Delta}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \varkappa = \frac{1-\eta}{1+\eta}.$$

Преобразование операторов при этом принимает вид:

$$A_1 = \Delta A'_1, \quad A_2 = \Delta A'_2, \quad \omega^{(1)} = \Delta \tau^{(1)}, \quad \omega^{(2)} = \Delta \tau^{(2)}.$$

Условие  $\omega^{(1)} = \omega^{(2)}$  дает  $\tau^{(1)} = \tau^{(2)} = \tau$ .