Лекция 7

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА ОБ УСЛОВНОМ ЭКСТРЕМУМЕ

§ 1. Введение

Довольно часто тот функционал, который непосредственно соответствует исходной нелинейной краевой задаче не является ограниченным не снизу не сверху, поэтому, естественно, у него нет экстремальных точек на заданном банаховом пространстве, но, с другой стороны, исходной краевой задаче можно сопоставить вариационную задачу на условный экстремум такую, что будут выполнены все условия теоремы 1 четвертой лекции и с необходимостью экстремаль этой вариационной задачи будет удовлетворять уравнению Лагранжа, которое мы получим в этой лекции.

§ 2. Уравнение Лагранжа

Пусть

$$\varphi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1 \quad \text{и} \quad \psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$$

— это функционалы, определенные на банаховом пространстве $\mathbb{B}$. Рассмотрим многообразие в $\mathbb{B}$, задаваемое уравнением

$$V_c \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \ \varphi(u) = c\} \quad \text{при} \quad c \in \mathbb{R}^1.$$

Теперь мы можем дать определение условного экстремума.

Определение 1. *Точка $u_0 \in V_c$ называется точкой минимума (максимума) функционала ψ относительно многообразия V_c, если найдется такая окрестность*

$$U(u_0) := \{u \in \mathbb{B} : \ \|u - u_0\| < r\}$$

при некотором $r > 0$, что

$$\psi(u) \geqslant \psi(u_0) \ (\leqslant \psi(u_0)) \quad \textit{для всех} \quad u \in V_c \cap U(u_0).$$

Далее мы будем рассматривать тот важный случай, когда функционалы ψ и φ являются дифференцируемыми по Фреше в точке $u_0 \in V_c$. Дадим определения.

О п р е д е л е н и е 2. *Точка* $u_0 \in V_c$ *называется обыкновенной точкой многообразия* V_c, *если*

$$\left\|\varphi'_f(u_0)\right\|_* > 0.$$

О п р е д е л е н и е 3. *Точка* $u_0 \in V_c$ *называется условно критической точкой функционала* ψ *относительно многообразия* V_c, *если найдется такое число* $\mu \in \mathbb{R}^1$, *что*

$$\psi'_f(u_0) = \mu\varphi'_f(u_0).$$

Справедлива следующая важная теорема — основная для данной лекции.
Т е о р е м а 1. *Пусть функционалы* φ *и* ψ *являются дифференцируемыми по Фреше в точке* $u_0 \in \mathbb{B}$, *причем точка* $u_0 \in \mathbb{B}$ *является обыкновенной точкой многообразия* $\varphi(u) = \varphi(u_0)$:

$$\left\|\varphi'_f(u_0)\right\|_* > 0,$$

тогда, если точка $u_0 \in \mathbb{B}$ *является точкой условного экстремума функционала* ψ *относительно многообразия*

$$V_{c_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} :\ \varphi(u) = \varphi(u_0) = c_0\},$$

то точка $u_0 \in V_{c_0}$ *является условно критической, т. е. найдется такое* $\mu \in \mathbb{R}^1$, *что*

$$\psi'_f(u_0) = \mu\varphi'_f(u_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Доказательство в общем случае будет предложено в следующем параграфе в связи с рассмотрением теории категорий Люстерника–Шнирельмана, а сейчас мы докажем ее для одного важного случая, когда $\mathbb{B} = H$ — это вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, а функционал $\varphi(u) = (u,u)$, а точка $u_0 \in \mathbb{S}_a$:

$$\mathbb{S}_a \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u \in H : \varphi(u) = (u,u) = a^2\right\} \quad \text{при} \quad a > 0.$$

Шаг 1. Прежде всего докажем, что каждая точка сферы $\mathbb{S}_a$ является обыкновенной точкой. Действительно, введем изометрический оператор Рисса–Фреше

$$\mathrm{J} : H^* \to H,$$

который существует в силу известной теоремы Рисса–Фреше о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством. Справедливо равенство

$$\langle f, u\rangle = (\mathrm{J}f, u) \quad \text{для всех} \quad f \in H^*, \quad u \in H.$$

Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\varphi(u+h)-\varphi(u)=(u+h,u+h)-(u,u)=$$
$$=2(u,h)+(h,h)=2\langle \mathrm{J}^{-1}u,h\rangle+\|h\|^2,$$

т. е.

$$\varphi_f'(u)=2\mathrm{J}^{-1}u\Rightarrow \left\|\varphi_f'(u)\right\|_*=2\|\mathrm{J}^{-1}u\|_*=2\|u\|=2a>0.$$

Шаг 2. Предположим, что точка $u_0\in H$ является точкой условного экстремума функционала

$$\psi:H\to\mathbb{R}^1$$

относительно многообразия $\mathbb{S}_a$. Докажем, что в этом случае найдется такое число $\mu\in\mathbb{R}^1$, что

$$\psi_f'(u_0)=\frac{\mu}{2}\varphi_f'(u_0)=\mu\mathrm{J}^{-1}u_0.$$

Введем оператор градиента

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_0):=\mathrm{J}\psi_f'(u_0).$$

Тогда нам нужно доказать следующее равенство:

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_0)=\mu u_0. \tag{2.1}$$

С этой целью рассмотрим одномерное подпространство $H_1\subset H$, где

$$H_1\overset{\mathrm{def}}{=}\left\{\lambda u_0:\ \lambda\in\mathbb{R}^1\right\}.$$

Пусть H_2 — это ортогональное дополнение H_1 в H, т. е. для H имеет место ортогональное разложение:

$$H=H_1\oplus H_2.$$

Пусть, кроме того, $h\in H_2$ — это произвольный вектор, принадлежащий сфере $\mathbb{S}_a$, т. е. $\|h\|=a>0$. Рассмотрим теперь следующий вектор:

$$u=(1+\alpha\varepsilon)u_0+\varepsilon h. \tag{2.2}$$

Потребуем, чтобы этот вектор лежал на сфере $\mathbb{S}_a$:

$$\|u\|^2=a^2\Rightarrow(1+\varepsilon\alpha)^2a^2+\varepsilon^2a^2=a^2,$$

где мы воспользовались тем, что $u_0\perp h$. Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$(1+\varepsilon\alpha)^2+\varepsilon^2=1\Rightarrow\varepsilon\alpha^2+2\alpha+\varepsilon=0\Rightarrow\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Из этих двух корней выбираем

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Заметим, что
$$\alpha = -\frac{1}{2}\varepsilon + \overline{\overline{o}}(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Шаг 3. Поскольку функционал
$$\psi(u) : H \to \mathbb{R}^1$$
является (по условию) дифференцируемым по Фреше в точке $u_0 \in \mathbb{S}_a$, то для всех $u \in \mathbb{S}_a$ вида (2.2) справедливо представление
$$\psi(u) - \psi(u_0) = \left\langle \psi'_f(u_0), u - u_0 \right\rangle + \\ + \omega(u_0, u - u_0) = (\mathbf{grad}\,\psi(u_0), u - u_0) + \omega(u_0, u - u_0), \quad (2.3)$$
из которого в силу (2.2) получим равенство
$$\psi(u) - \psi(u_0) = (\mathbf{grad}\,\psi(u_0), \alpha\varepsilon u_0 + \varepsilon h) + \omega(u_0, \alpha\varepsilon u_0 + \varepsilon h),$$
причем
$$\alpha\varepsilon = \overline{\overline{o}}(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \omega(u_0, \alpha\varepsilon u_0 + \varepsilon h) = \overline{\overline{o}}(\varepsilon).$$
Поэтому приходим к равенству
$$\psi(u) - \psi(u_0) = \varepsilon\,(\mathbf{grad}\,\psi(u_0), h) + \overline{\overline{o}}(\varepsilon).$$
Но по условию теоремы в точке $u = u_0 \in \mathbb{S}_a$ у функционала ψ имеется условный экстремум относительно сферы $\mathbb{S}_a$, поэтому при достаточно малом $\varepsilon > 0$ знак левой части должен сохранятся для всех $u \in \mathbb{S}_a$ с такими малыми $\varepsilon > 0$, но это с необходимостью возможно при условии, что
$$(\mathbf{grad}\,\psi(u_0), h) = 0 \quad \text{для всех} \quad h \in H_2,$$
т. е.
$$\mathbf{grad}\,\psi(u_0) \in H_1 \Rightarrow \mathbf{grad}\,\psi(u_0) = \mu u_0 \quad \text{при некотором} \quad \mu \in \mathbb{R}^1.$$

Теорема доказана.

§ 3. Пример

Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу:
$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (3.1)$$
$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \quad (3.2)$$
Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$ при $\delta \in (0, 1]$. Предположим также, что
$$2 < p < \frac{2N}{N-2}, \quad N \geqslant 3. \quad (3.3)$$

Тогда в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место вполне непрерывное вложение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

Заметим, что функционал Эйлера этой задачи имеет вид

$$E(u) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |D_x u|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\Omega} |u|^2\,dx - \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^p\,dx.$$

Производная Фреше $E_f'(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\langle E_f'(u), v\right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

где

$$E_f'(u) = -\Delta u + \lambda u - |u|^{p-2}u.$$

Это и есть слабая постановка задачи (3.1). Однако, этот функционал не является ограниченным не снизу не сверху. Поэтому он не достигает ни минимума ни максимума на $H_0^1(\Omega)$. Тем не менее, рассматриваемая нелинейная краевая задача допускает вариационную постановку на *условный экстремум*.

Дадим определение слабого решения краевой задачи (3.1).

Определение 4. *Слабым решением задачи* (3.1) *назовем функцию* $u \in H_0^1(\Omega)$, *удовлетворяющую следующему равенству*:

$$\left\langle -\Delta u + \lambda u - |u|^{p-2}u, v\right\rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.4}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами* $H_0^1(\Omega)$ *и* $H^{-1}(\Omega)$.

Заметим, что в предыдущем семестре нами было доказано, что оператор

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \geqslant 2.$$

Но при $p = 2$ оператор $\Delta_p = \Delta$, поэтому

$$\Delta : H_0^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} W_0^{1,2}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} W^{-1,2}(\Omega). \tag{3.5}$$

Имеет место следующая цепочка плотных и непрерывных вложений:

$$H_0^1(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} L^p(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} L^2(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} L^{p'}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \in [2, 2^*)\,. \tag{3.6}$$

□ Действительно, $H_0^1(\Omega)$, $L^p(\Omega)$ при указанных условиях — это рефлексивные банаховы пространства и имеют место следующие плотные вложения:

$$H_0^1(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} L^p(\Omega) \Rightarrow L^{p'}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega),$$

$$L^p(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} L^2(\Omega) \Rightarrow L^2(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} L^{p'}(\Omega). \quad \boxtimes$$

Кроме того, выполнены следующие равенства:

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)u(x)\,dx \text{ для всех } u(x) \in H_0^1(\Omega),\; f(x) \in L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega),$$

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)u(x)\,dx \text{ для всех } u(x) \in H_0^1(\Omega),\; f(x) \in L^{2}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Теперь заметим, что нелинейный оператор

$$|u|^{p-2}u : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad p > 2, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Действительно,

$$\int\limits_{\Omega} \Big||u(x)|^{p-2}u(x)\Big|^{p'}\,dx = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{(p-1)p'}\,dx = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\,dx.$$

Следовательно,

$$|u|^{p-2}u : H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Наконец, единичный оператор

$$Iu : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

но опять в силу цепочки вложений (3.6) приходим к выводу, что

$$Iu : H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

Таким образом, приходим к выводу, что при условии (3.3) нелинейный оператор

$$-\Delta u + \lambda u - |u|^{p-2}u : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

Поэтому определение 4 слабого решения корректно.

Теперь сопоставим краевой задаче (3.4), понимаемой в слабом смысле (3.4) следующую вариационную задачу на условный экстремум. Рассмотрим функционал

$$\psi(u) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(|D_x u(x)|^2 + \lambda |u(x)|^2\right)\,dx \tag{3.7}$$

на гильбертовом пространстве $H_0^1(\Omega)$ и многообразие

$$V \overset{\text{def}}{=} \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \varphi(u) := \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\,dx = 1 \right\}. \tag{3.8}$$

Этап I. Прежде всего проверим, что функционал $\psi(u)$ является слабо полунепрерывным снизу на V. Итак, пусть

$$\{u_n\} \subset V \subset H_0^1(\Omega),$$

причем
$$u_n \rightharpoonup u \in V \quad \text{слабо в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
но тогда
$$\liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n) \geqslant \psi(u).$$
□ Действительно, это следствие того факта, что
$$\liminf_{n\to+\infty} \int\limits_\Omega |D_x u_n(x)|^2\,dx \geqslant \int\limits_\Omega |D_x u(x)|^2\,dx,$$
поскольку
$$\left(\int\limits_\Omega |D_x u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$
— это норма на $H^1_0(\Omega)$. Кроме того, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место полностью непрерывное вложение
$$H^1_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega).$$
Поэтому
$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$
Значит,
$$\lambda \int\limits_\Omega |u_n(x)|^2\,dx \to \lambda \int\limits_\Omega |u(x)|^2\,dx \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$
Слабая полунепрерывность снизу функционала ψ доказана. ⊠

Этап II. Теперь докажем, что множество V слабо замкнуто.

□ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset V$ и
$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H^1_0(\Omega),$$
но по предположению (3.3) имеет место следующее полностью непрерывное вложение:
$$H^1_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega),$$
поэтому
$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
но тогда
$$1 = \int\limits_\Omega |u_n(x)|^p\,dx \to \int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx.$$
Значит,
$$\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx = 1,$$
т. е. $u \in V$. Тем самым, слабая замкнутость доказана. ⊠

Этап III. Теперь докажем слабую коэрцитивность функционала $\psi(u)$ на V.

□ Действительно, в силу неравенства Фридрихса имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^2 \, dx \geqslant \lambda_1 \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \quad \text{для всех} \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

где $0 < \lambda_1$ — это первое собственное значение оператора $-\Delta$ с однородным условием Дирихле. Поэтому для функционала $\psi(u)$ при $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$ справедлива следующая оценка снизу:

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2\lambda_1} \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^2 \, dx = \\ = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^2 \, dx.$$

А в случае $\lambda \geqslant 0$ коэрцитивность этого функционала очевидна. Поэтому функционал $\psi(u)$ слабо коэрцитивен при условии, что

$$\lambda > -\lambda_1. \quad \boxtimes$$

Этап IV. Осталось проверить, что все точки многообразия V являются обыкновенными.

□ Действительно, рассмотрим функционал

$$\varphi(u) := \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx : \quad H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^1.$$

Его производная Фреше имеет вид

$$\varphi'_f(u) = p|u|^{p-2} u \in L^{p'}(\Omega).$$

С одной стороны,

$$\left\| \varphi'_f(u) \right\|_* = \sup_{\|D_x v\|_2 \leqslant 1} \left| \left\langle \varphi'_f(u), v \right\rangle \right|.$$

С другой стороны, заметим, что

$$\left\langle \varphi'_f(u), u \right\rangle = p \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx = p > 0 \quad \text{на} \quad V.$$

Поэтому

$$\left\| \varphi'_f(u) \right\|_* = \sup_{\|D_x v\|_2 \leqslant 1} \left| \left\langle \varphi'_f(u), v \right\rangle \right| \geqslant \\ \geqslant \frac{\left\langle \varphi'_f(u), u \right\rangle}{\|D_x u\|_2} = \frac{p}{\|D_x u\|_2} > 0 \quad \text{для всех} \quad u \in V. \quad \boxtimes$$

Тем самым, выполнены все условия теоремы 1 четвертой лекции. Значит, найдется такая точка $u_0 \in V$, в которой у функционала ψ достигается минимум. Кроме того, отсюда вытекает выполнимость всех условий теоремы 1 настоящей лекции. Следовательно, найдется такое число $\mu \in \mathbb{R}^1$, что будет выполнено следующее равенство:

$$\left\langle \psi'_f(u_0) - \mu\varphi'_f(u_0), v \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

но это равенство есть не что иное, как следующее равенство:

$$\left\langle -\Delta u_0 + \lambda u_0 - \mu|u_0|^{p-2}u_0, v \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.9}$$

Этап V. Теперь докажем, что $\mu > 0$.

□ Действительно, положим в равенстве (3.9) $v = u_0 \in H_0^1(\Omega)$, тогда после «интегрирования по частям» получим равенства

$$2\psi(u_0) = \int\limits_{\Omega} \left[|D_x u_0(x)|^2 + \lambda|u_0(x)|^2 \right] \, dx = \mu \int\limits_{\Omega} |u_0(x)|^p \, dx = \mu,$$

поскольку $u_0 \in V$. Но, как мы доказали, $\psi(u_0) > 0$, следовательно, и $\mu > 0$. Теперь осталось сделать замену

$$u_0 = c_1 u, \quad c_1 = \left(\frac{1}{\mu p} \right)^{1/(p-2)},$$

чтобы прийти к равенству (3.4).

Тем самым, нелинейная краевая задача (3.1) разрешима в слабом смысле при $\lambda > -\lambda_1$.