Лекция 5

ТЕОРЕМА О ГОРНОМ ПЕРЕВАЛЕ

В этой лекции мы рассмотрим важный в приложениях вариационный метод Амбросетти–Рабиновича, основанный на так называемой теореме о горном перевале и имеющий важные приложения в теории неограниченных функционалов.

§ 1. Лемма о деформации

Итак, пусть у нас задан функционал $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H};\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющий, кроме того, условию, что его градиент [1)]

$$F(u) = \mathbf{grad}\, \psi(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

является ограниченно липшиц–непрерывным и $\mathbb{H}$ вещественное гильбертово пространство.

Замечание 1. Дадим четкую формулировку ограниченной липшиц–непрерывности. Пусть

$$F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2,$$

где $\mathbb{B}_k$ при $k = 1, 2$ — это банаховы пространства. Тогда оператор F называется ограниченно липшиц–непрерывным, если

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_2 \leqslant K\|u_1 - u_2\|_1$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{B}_1$ таких, что

$$\|u_k\|_1 \leqslant R \quad \text{при} \quad k = 1, 2,$$

а постоянная $K = K(R) < +\infty$. Заметим, что локально липшиц–непрерывный оператор является ограниченно-липшиц–непрерывным, но не наоборот.

Теперь введем некоторые обозначения

$$A_c \stackrel{\text{def}}{=} \Bigl\{u \in \mathbb{H} : \psi(u) \leqslant c\Bigr\},$$

$$K_c \stackrel{\text{def}}{=} \Bigl\{u \in \mathbb{H} : \psi(u) = c,\ F(u) = \mathbf{grad}\, \psi(u) = 0\Bigr\}.$$

[1)] Напомним, что $\mathbf{grad}\, \psi(u) \stackrel{def:}{=} J\psi'_f(u)$, где $J : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}$ — это изометрия Рисса.

Определение 1. *Пусть* $\mathcal{F}$ — *это семейство функционалов* $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H};\mathbb{R}^1)$, *градиент которых ограниченно липшиц–непрерывен.*

Определение 2.

(i) *Элемент* $u \in \mathbb{H}$ *называется критической точкой функционала* $\psi(u)$, *если* $\mathbf{grad}\,\psi(u) = 0$;

(ii) *Вещественное число* c *называется критическим значением функционала* $\psi(u)$, *если* $K_c \neq \varnothing$

Теперь докажем, что если число c не является критическим значением, то множество $A_{c+\varepsilon}$ «деформируется» [1] в $A_{c-\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Поскольку пространство $\mathbb{H}$, вообще говоря, бесконечномерно, нам понадобится условие компактности.

Определение 3. *Функционал* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H};\mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет условию компактности Palais–Smale* (PS) *если каждая последовательность* $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{H}$, *удовлетворяющая условиям*:

(i) $\{\psi(u_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ *ограничена*;

(ii) $\mathbf{grad}\,\psi(u_k) \to \vartheta$ *сильно в* $\mathbb{H}$

содержит сильно сходящуюся в $\mathbb{H}$ *подпоследовательность.*

Справедлива следующая теорема о деформации:

Теорема 1. *Пусть* $\psi(u) \in \mathcal{F}$ *удовлетворяет условию Пале–Смейла* (Palais–Smale). *Предположим, что*

$$K_c = \varnothing. \tag{1.1}$$

Тогда для любого достаточного малого $\varepsilon > 0$ *существуют константа* $0 < \delta < \varepsilon$ *и функция* $\eta(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times \mathbb{H};\mathbb{H})$ *такое, что отображение*

$$\eta_t(u) \stackrel{\text{def:}}{=} \eta(t,u) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ u \in \mathbb{H})$$

удовлетворяет условиям:

(i) $\eta_0(u) = u$ $(u \in \mathbb{H})$;

(ii) $\eta_1(u) = u$ $(u \notin \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]))$;

(iii) $\psi(\eta_t(u)) \leqslant \psi(u)$ $(u \in \mathbb{H},\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$;

(iv) $\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Сначала покажем, [2] что существуют константы $0 < \sigma, \delta < 1$ такие, что

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|_{\mathbb{H}} \geqslant \sigma \quad \text{для всех} \quad u \in A_{c+\delta} \backslash A_{c-\delta}\ ^{3)}. \tag{1.2}$$

[1] Смысл понятия «деформируется» будет понятен из следующей теоремы.

[2] Доказательство основано на том, что функционал ψ удовлетворяет условию PS и $K_c = \varnothing$.

[3] Иначе говоря, $c - \delta < \psi(u) \leqslant c + \delta$.

□ Доказательство ведется от противного. Если (1.2) не выполняется для всех констант $\sigma, \delta > 0$, то существуют последовательности $\sigma_k \to 0$, $\delta_k \to 0$ и элементы

$$u_k \in A_{c+\delta_k} \backslash A_{c-\delta_k} \tag{1.3}$$

такие, что

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(u_k)\|_{\mathbb{H}} < \sigma_k \Rightarrow \mathbf{grad}\,\psi(u_k) \to \vartheta \in \mathbb{H} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}. \tag{1.4}$$

В силу (1.3)

$$c - \delta_k < \psi(u_k) \leqslant c + \delta_k, \tag{1.5}$$

т. е. числовая последовательность $\{\psi(u_k)\}$ ограничена. Согласно условию Пале–Смейла (PS) существуют подпоследовательность

$$\{u_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$$

и элемент $u \in \mathbb{H}$ такие, что

$$u_{k_j} \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H} \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

В частности, найдется такая константа $M > 0$, что

$$\|u_{k_j}\| \leqslant M < +\infty,$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от k_j. Но, так как $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$, и из (1.3), (1.4) вытекает, что

$$\psi(u) = c, \quad \mathbf{grad}\,\psi(u) = \vartheta.$$

□ Действительно, в силу ограниченной липшиц–непрерывности $\mathbf{grad}\,\psi(\cdot)$ справедливо предельное свойство

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_{k_j}) \to \mathbf{grad}\,\psi(u) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty$$

и при этом как ранее было установлено

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_{k_j}) \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H} \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Стало быть,

$$\mathbf{grad}\,\psi(u) = \vartheta. \tag{1.6}$$

С другой стороны, в силу неравенств (1.5) и непрерывности функционала $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$ имеем

$$\psi(u_{k_j}) \to c \quad \text{и} \quad \psi(u_{k_j}) \to \psi(u) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Итак,

$$\psi(u) = c. \quad \boxtimes \tag{1.7}$$

Следовательно, из формул (1.6) и (1.7) вытекает, что $K_c \neq \varnothing$. Что противоречит нашему предположению $K_c = \varnothing$. ⊠

Шаг 2. Фиксируем постоянные $\delta_1 \in (0, 1)$ и $\sigma \in (0, 1)$ такие, что в силу первого шага выполнено неравенство

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|_{\mathbb{H}} \geqslant \sigma \quad \text{для всех} \quad u \in A_{c+\delta_1} \backslash A_{c-\delta_1}. \tag{1.8}$$

Ясно, что произвольного $\delta \in (0, \delta_1)$ имеет место вложение

$$A_{c+\delta} \backslash A_{c-\delta} \subset A_{c+\delta_1} \backslash A_{c-\delta_1}.$$

Поэтому неравенство (1.8) остается справедливым для всех

$$u \in A_{c+\delta} \backslash A_{c-\delta}.$$

Теперь мы фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ следующим образом:

$$0 < \delta < \varepsilon, \quad 0 < \delta < \sigma^2/2, \quad 0 < \delta \leqslant \delta_1. \tag{1.9}$$

Положим

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \Bigl\{u \in \mathbb{H} \Bigm| \psi(u) \leqslant c - \varepsilon \quad \text{или} \quad \psi(u) \geqslant c + \varepsilon\Bigr\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \Bigl\{u \in \mathbb{H} \Bigm| c - \delta \leqslant \psi(u) \leqslant c + \delta\Bigr\},$$

$$A \cap B = \varnothing, \quad C \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H} \backslash (A \cup B) \neq \varnothing.$$

Отметим, что $F(u) = \mathbf{grad}\, \psi(u)$ ограничено на ограниченных множествах, поскольку $\psi \in \mathcal{F}$ и, в частности, $\mathbf{grad}\, \psi(u)$ является ограниченно липшиц–непрерывным. Поскольку $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$ справедливо равенство

$$\psi(u + h) = \psi(u) + (\mathbf{grad}\, \psi(u), h) + \omega(u, h), \qquad \lim_{\|h\| \to +0} \frac{|\omega(u, h)|}{\|h\|} = 0,$$

в которой положим

$$u_1 = u + h, \quad u_2 = u \Rightarrow h = u_1 - u_2.$$

В силу свойства $\omega(u, h)$ имеет место оценка

$$|\omega(u, h)| = |\omega(u_2, u_1 - u_2)| \leqslant c_1 \|u_1 - u_2\|.$$

Итак, справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leqslant & \\ & \leqslant \|\mathbf{grad}\, \psi(u_2)\| \|u_1 - u_2\| + c_1 \|u_1 - u_2\| \leqslant \\ & \qquad \leqslant c_2 \|u_1 - u_2\| \quad \text{для всех} \quad \|u_k\| \leqslant R \end{aligned} \tag{1.10}$$

при $k = 1, 2$. Из последнего неравенства вытекает ограниченная липшиц–непрерывность функционала $\psi(u)$ на ограниченных в $\mathbb{H}$ множествах. Отсюда, в частности, сразу же заключаем, что множества A и B является сильно замкнутыми. Отсюда вытекает, что отображение

$$u \mapsto \text{distance}(u, A) + \text{distance}(u, B), \quad \text{distance}(u, C) \stackrel{def:}{=} \inf_{v \in C} \|u - v\| \geqslant 0$$

ограничено снизу константой $\delta > 0$ для всех u из ограниченного подмножества в $\mathbb{H}$.

□ Действительно, прежде всего заметим, что

$$\mathrm{distance}(u,A)+\mathrm{distance}(u,B)\geqslant 0.$$

Предположим, что существует ограниченная последовательность $\{u_n\}\subset\mathbb{H}$ (т.е. $\|u_n\|\leqslant R$) такая, что

$$\mathrm{distance}(u_n,A)\to +0,\quad \mathrm{distance}(u_n,B)\to +0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Тогда существуют такие последовательности $\{a_n\}\subset A$ и $\{b_n\}\subset B$, что

$$\|a_n-u_n\|\to+0,\quad \|b_n-u_n\|\to+0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

В силу неравенства треугольника имеем

$$\|a_n-b_n\|\leqslant\|a_n-u_n\|+\|b_n-u_n\|\to+0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Заметим, без ограничения общности можно считать, что

$$\|a_n-u_n\|\leqslant R,\quad \|b_n-u_n\|\leqslant R \quad \text{для всех} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\|a_n\|\leqslant\|a_n-u_n\|+\|u_n\|\leqslant 2R,$$

$$\|b_n\|\leqslant\|b_n-u_n\|+\|b_n\|\leqslant 2R.$$

Тогда в силу (1.10) при условиях, что

$$\|a_n\|\leqslant 2R,\quad \|b_n\|\leqslant 2R,$$

получим неравенство

$$|\psi(a_n)-\psi(b_n)|\leqslant c_2(R)\|a_n-b_n\|\to+0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty, \tag{1.11}$$

где $c_2>0$ — это константа, не зависящая от $n\in\mathbb{N}$.

Теперь заметим, что выполнены следующие неравенства:

$$c-\delta\leqslant\psi(b_n)\leqslant c+\delta \quad \text{для всех} \quad n\in\mathbb{N}, \tag{1.12}$$

$$\psi(a_n)\geqslant c-\varepsilon \quad \text{либо} \quad \psi(a_n)\geqslant c+\varepsilon \quad \text{для всех} \quad n\in\mathbb{N}. \tag{1.13}$$

В силу (1.12) числовая последовательность $\{\psi(b_n)\}$ ограничена, поэтому существует такая подпоследовательность $\{b_{n_n}\}\subset\{b_n\}$, что

$$\psi(b_{n_n})\to b\Rightarrow c-\delta\leqslant b\leqslant c+\delta. \tag{1.14}$$

Теперь для соответствующей подпоследовательности $\{a_{n_n}\}\subset\{a_n\}$ в силу (1.11) имеем

$$|\psi(a_{n_n})-b|\leqslant|\psi(a_{n_n})-\psi(b_{n_n})|+|\psi(b_{n_n})-b|\to+0$$

при $n\to+\infty$. Откуда и из (1.13) вытекает, что

$$b\leqslant c-\varepsilon \quad \text{либо} \quad b\geqslant c+\varepsilon. \tag{1.15}$$

Получено противоречие между неравенствами (1.14) и (1.15), поскольку $0 < \delta < \varepsilon$. Следовательно,

$$\mathrm{distance}(u, A) + \mathrm{distance}(u, B) \geqslant \delta(R) > 0$$ [1]

для всех $u \in \{u \in \mathbb{H} : \ \|u\| \leqslant R\}$. ⊠

Следовательно, функция

$$g(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{distance}(u, A)}{\mathrm{distance}(u, A) + \mathrm{distance}(u, B)} \quad (u \in \mathbb{H})$$

удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant g \leqslant 1, \quad g = 0 \quad \text{на} \quad A, \quad g = 1 \quad \text{на} \quad B, \tag{1.16}$$

где g липшицева на ограниченных множествах, т.е. ограниченно липшиц–непрерывна.

□ Действительно, рассмотрим разность

$$\begin{aligned} &g(u_1) - g(u_2) = \\ &= \frac{\mathrm{distance}(u_1, A)}{\mathrm{distance}(u_1, A) + \mathrm{distance}(u_1, B)} - \frac{\mathrm{distance}(u_2, A)}{\mathrm{distance}(u_2, A) + \mathrm{distance}(u_2, B)} = \\ &= \frac{\mathrm{distance}(u_1, A)\,\mathrm{distance}(u_2, B) - \mathrm{distance}(u_2, A)\,\mathrm{distance}(u_1, B)}{(\mathrm{distance}(u_1, A) + \mathrm{distance}(u_1, B))\,(\mathrm{distance}(u_2, A) + \mathrm{distance}(u_2, B))}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\begin{aligned} |g(u_1) - g(u_2)| \leqslant \frac{1}{\delta} \left|\mathrm{distance}(u_1, B) - \mathrm{distance}(u_2, B)\right| + \\ + \frac{1}{\delta} \left|\mathrm{distance}(u_1, A) - \mathrm{distance}(u_2, A)\right|. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу неравенства треугольника имеем

$$\|u_1 - v\| \leqslant \|u_1 - u_2\| + \|u_2 - v\|,$$
$$\|u_2 - v\| \leqslant \|u_1 - u_2\| + \|u_1 - v\|.$$

Взяв infimum по $v \in A$ от обеих частей этих неравенств, получим

$$\mathrm{distance}(u_1, A) \leqslant \mathrm{distance}(u_2, A) + \|u_1 - u_2\|,$$
$$\mathrm{distance}(u_2, A) \leqslant \mathrm{distance}(u_1, A) + \|u_1 - u_2\|.$$

Откуда получим искомое неравенство

$$|\mathrm{distance}(u_1, A) - \mathrm{distance}(u_2, A)| \leqslant \|u_1 - u_2\|.$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$|\mathrm{distance}(u_1, B) - \mathrm{distance}(u_2, B)| \leqslant \|u_1 - u_2\|.$$

[1] Заметим, что возможно $\delta(R) \to +0$ при $R \to +\infty$.

Отсюда получим, что

$$|g(u_1) - g(u_2)| \leqslant \frac{2}{\delta(R)} \|u_1 - u_2\| \tag{1.17}$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{H}$ таких, что $\|u_k\| \leqslant R$ при $k = \overline{1,2}$ и $R > 0$. ⊠

Шаг 3. Положим

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ 1/t, & t \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.18}$$

Наконец, определим отображение

$$\mathbb{V} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

формулой

$$\mathbb{V}(u) \stackrel{\text{def}}{=} -g(u) h\left(\|\mathbf{grad}\, \psi(u)\|_{\mathbb{H}}\right) \mathbf{grad}\, \psi(u) \quad (u \in \mathbb{H}). \tag{1.19}$$

Заметим, что $\mathbb{V}$ ограничено.

Для произвольного $u \in \mathbb{H}$ рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\eta}{dt}(t) = \mathbb{V}(\eta(t)) \quad t > 0, \quad \eta(0) = u. \tag{1.20}$$

Отображение $\mathbb{V}$ ограничено и с учетом (1.17) ограничено липшиц–непрерывно, поскольку является композицией ограниченных и ограниченно липшиц–непрерывных отображений. Поэтому существует единственное классическое решение для всех $t \in [0, +\infty)$. Пишем

$$\eta(t, u) = \eta_t(u), \quad u \in \mathbb{H},$$

чтобы подчеркнуть зависимость решения, как от времени t, так и от начального положения $u \in \mathbb{H}$.

Ограничившись случаем $0 \leqslant t \leqslant 1$, мы видим, что таким образом определенное отображение $\eta(t, u) \in \mathbb{C}([0,1] \times \mathbb{H}; \mathbb{H})$ удовлетворяет утверждениям (i) и (ii).

□ Действительно, с одной стороны, имеем

$$\eta_0(u) = u \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}$$

— это следствие начального условия в задаче Коши (1.20). С другой стороны, пусть

$$\eta(0) = u \in \mathbf{C} \stackrel{\text{def:}}{=} \{u \in \mathbb{H} : \quad \psi(u) < c - \varepsilon \quad \text{либо} \quad \psi(u) > c + \varepsilon\} \subset A.$$

Поскольку $g(u) = 0$ для всех $u \in A$ и решение $\eta(t, u)$ является непрерывным, то для достаточно малого момента времени $t_1 > 0$ получим, что

$$\eta(t, u) \in C \subset A \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_1] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(\eta(t, u)) = 0 \Rightarrow V(\eta(t, u)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta(t,u) = u \quad \text{для всех} \quad t \in [0, t_1].$$

Без ограничения общности можно считать этот момент времени $t_1 = 1$. $\boxtimes$

Шаг 4. Теперь вычислим

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) = \left(\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u)), \frac{d}{dt}\eta_t(u)\right)_{\mathbb{H}} = (\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u), \mathbb{V}(\eta_t(u))))_{\mathbb{H}} =$$
$$= -g(\eta_t(u))h\left(\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|_{\mathbb{H}}\right)\|\mathbf{grad}\,\psi(u)\|^2_{\mathbb{H}}. \quad (1.21)$$

В частности,

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) \leqslant 0 \quad (u \in \mathbb{H}, 0 \leqslant t \leqslant 1) \Rightarrow \psi(\eta_t(u)) \leqslant \psi(\eta_0(u)) = \psi(u).$$

Следовательно, утверждение (iii) доказано.

Шаг 5. Теперь фиксируем точку

$$u \in A_{c+\delta} \quad (1.22)$$

Наша цель — доказать соотношение

$$\eta_1(u) \in A_{c-\delta} \quad (1.23)$$

и тем самым проверить утверждение (iv). Если $\eta_t(u) \notin B$ для некоторого $t \in [0,1]$, мы сразу же получаем требуемое утверждение.

$\square$ Действительно, пусть найдется такое $t^* \in [0,1]$, что

$$\eta_{t^*}(u) \notin B \Leftrightarrow \psi(\eta_{t^*}(u)) < c - \delta \quad \text{либо} \quad \psi(\eta_{t^*}(u)) > c + \delta.$$

В силу (iii) имеем

$$\psi(\eta_{t^*}(u)) \leqslant \psi(u) \leqslant c + \delta.$$

Значит,

$$\psi(\eta_{t^*}(u)) < c - \delta \quad \text{и} \quad \psi(\eta_t(u)) \leqslant \psi(\eta_{t^*}(u))$$

для всех $t \in [t^*, 1]$. Следовательно, в этом случае имеет место неравенство

$$\psi(\eta_1(u)) < c - \delta. \quad \boxtimes$$

Поэтому предположим, что $\eta_t(u) \in B$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда $g(\eta_t(u)) = 1$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Следовательно, из (1.21) вытекает

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) = -h\left(\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}}\right)\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|^2_{\mathbb{H}}. \quad (1.24)$$

Если

$$\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}} \leqslant 1,$$

то из (1.18) и (1.2) вытекает

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) = -\|\mathbf{grad}\,\psi(\eta_t(u))\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant -\sigma^2.$$

$\square$ Действительно, поскольку $\delta \in (0, \delta_1]$, то имеет место цепочка вложений

$$\eta_t(u) \in B = A_{c+\delta} \backslash A_{c-\delta} \subset A_{c+\delta_1} \backslash A_{c-\delta_1}$$

в силу выбора $\delta \in (0, \delta_1]$ для всех $t \in [0, 1]$. $\boxtimes$

С другой стороны, если

$$\|\mathbf{grad}\, \psi(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}} \geqslant 1,$$

то из (1.18) и (1.2) получаем (напомним, что $\sigma \in (0, 1)$)

$$\frac{d}{dt}\psi(\eta_t(u)) \leqslant -1 \leqslant -\sigma^2.$$

В силу этих неравенств, из (1.24) и (1.9) выводим оценку

$$\psi(\eta_1(u)) \leqslant \psi(u) - \sigma^2 \leqslant c + \delta - \sigma^2 \leqslant c - \delta,$$

из которой следует (1.23), и требуемое утверждение (iv) доказано.

Теорема доказана.

§ 2. Теорема о горном перевале

Используя «минимаксную» технику и построенную деформацию η, докажем существование критической точки. С этой целью докажем утверждение, которое носит название «теорема о горном перевале».

Предварительно дадим определение *множества допустимых путей*

Определение 4. *Семейство*

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ g \in \mathbb{C}([0, 1]; \mathbb{H}) \middle| \, g(0) = 0, \ g(1) = v \right\}$$

называется множеством допустимых путей.

Теорема 2. *Пусть* $\psi \in \mathcal{F}$ *удовлетворяет условию Пале–Смейла* (PS). *Предположим также, что*

(i) $\psi(\vartheta) = 0$,

(ii) *существуют константы* $r, a > 0$ *такие, что* $\psi(u) \geqslant a$, *если* $\|u\| = r$,

(iii) *существует элемент* $v \in \mathbb{H}$ *такой, что* $\|v\| > r$, $\psi(v) \leqslant 0$.

Тогда

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(g(t))$$

является критическим значением функционала ψ.

Доказательство.

Прежде всего имеем $c \geqslant a$, поскольку в силу свойства (ii)

$$\max_{t \in [0,1]} \psi(g(t)) \geqslant a.$$

Пусть c не является критическим значением функционала $\psi(u)$, так что

$$K_c = \varnothing.$$

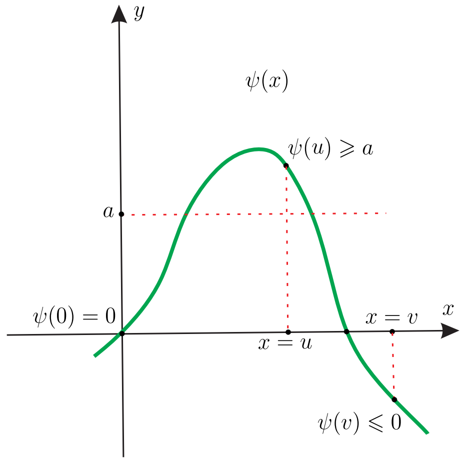

Рис. 1. Теорема о горном перевале.

Выберем достаточно малое число

$$0 < \varepsilon < a/2 \Rightarrow c - \varepsilon > 0.$$

Согласно теореме 1 о деформации существует константа $0 < \delta < \varepsilon$ и гомеоморфизм

$$\eta_t(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

такие, что

$$\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}, \tag{2.1}$$

$$\eta_1(u) = u, \quad \text{если} \quad u \notin \psi^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]). \tag{2.2}$$

Выберем $g \in \Gamma$ так, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(g(t)) \leqslant c + \delta. \tag{2.3}$$

Тогда

$$\widehat{g}(t) \overset{\text{def}}{=} \eta_1(g(t)) \in \mathbb{C}([0, 1]; \mathbb{H})$$

также принадлежит Γ, так как

$$\eta_1(g(0)) = \eta_1(\vartheta) = \vartheta, \quad \psi(\vartheta) = 0 < c - \varepsilon,$$

и

$$\eta_1(g(1)) = \eta_1(v) = v, \quad \psi(v) \leqslant 0 < c - \varepsilon$$

в силу (2.2).

□ Действительно, заметим, что

$$\psi(\vartheta) = 0 < c - \varepsilon, \quad \psi(v) \leqslant 0 < c - \varepsilon \Rightarrow \vartheta, v \notin \psi^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]). \quad \boxtimes$$

Но тогда из (2.3) следует

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(\widehat{g}(t)) \leqslant c - \delta,$$

откуда

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \psi(g(t)) \leqslant c - \delta,$$

что приводит к противоречию, поскольку $\delta > 0$.

Отметим, что, поскольку $c > 0$ минимаксная точка $u_0 \in \mathbb{H}$ функционала $\psi(u_0)$ не нулевой элемент.

Теорема доказана.