Лекция 4

ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ И КОЭРЦИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

§ 1. Введение

Полученное в теореме достаточное условие (II) (естественно, в совокупности с условием (I)) является очень обременительным и на практике ожидать от функционала существования непрерывной второй производной Фреше не приходится, а если таковая имеется, то требование сильной положительности (отрицательности) $\psi''_{ff}(\widehat{u})$ тем более на практике не выполняется. В частности, если функционал $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является потенциалом некоторого оператора $F(u) = \psi'_f(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$, то это требование означает существования непрерывной производной Фреше этого оператора такой, что

$$\left\langle F'_f(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant c\|h\|^2 \ (\leqslant -c\|h\|^2) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}$$

при $c = c(\widehat{u}) > 0$. Поэтому в этом параграфе мы ослабим требование (II) теоремы 2.

§ 2. Полунепрерывные функционалы

Дадим определение *слабо полунепрерывного снизу* функционала:

Определение 1. *Будем говорить, что функционал $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является слабо полунепрерывным снизу в точке $u_0 \in M \subset \mathbb{B}$ по отношению к $M \subset \mathbb{B}$, если для любой последовательности $\{u_n\} \subset M$ такой, что*

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty$$

вытекает, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n) \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Определение 2. *Будем говорить, что функционал $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является слабо полунепрерывным снизу на $M \subset \mathbb{B}$, если он является слабо полунепрерывным снизу в каждой точке $u \in M$.*

Для дальнейшего нам необходимо ввести также понятие *слабой коэрцитивности* функционала $\psi(u)$.

Определение 3. *Функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$, *удовлетворяющий условию*

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \psi(u) = \infty,$$

называется слабо коэрцитивным.

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{B}$ — *это рефлексивное банахово пространство. Тогда, если*

(i) $M \subset \mathbb{B}$ *слабо замкнуто в* $\mathbb{B}$;

(ii) *функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *слабо коэрцитивен на* $\mathbb{B}$;

(iii) *функционал* $\psi(u)$ *является слабо полунепрерывным снизу на* M,

то он ограничен снизу на M *и достигает своего минимума на* M :

$$\psi(u_0) = \inf_{u\in M} \psi(u) > -\infty.$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть

$$d > \inf_{u\in M} \psi(u).$$

Поскольку функционал $\psi(u)$ является слабо коэрцитивным на $\mathbb{B}$ найдется такое $R > 0$, что

$$\psi(u) \geqslant d \quad \text{для всех} \quad u \in B_R = \{u \in \mathbb{B} : \ \|u\| \geqslant R\}.$$

Следовательно,

$$\inf_{u\in M} \psi(u) = \inf_{u\in M\cap B_R} \psi(u).$$

Шаг 2. Пусть

$$\alpha_0 = \inf_{u\in M} \psi(u)$$

и $\{u_n\} \subset M$ — это минимизирующая последовательность, которая, очевидно, начиная с некоторого номера принадлежит множеству $B_R \cap$ $\cap M$. Это значит, что

$$\|u_n\| \leqslant R \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0.$$

Но тогда в силу рефлексивности $\mathbb{B}$ найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что

$$u_{n_k} \to u_0 \in B_R \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty,$$

но при этом в силу слабой замкнутости M мы получим, что $u_0 \in M$. В силу слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала ψ на M приходим к выводу, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n).$$

Шаг 3. Таким образом, приходим к выводу, что имеет место цепочка неравенств:

$$\inf_{u\in M}\psi(u) \leqslant \psi(u_0) \leqslant \liminf_{k\to+\infty}\psi(u_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty}\psi(u_n) = \inf_{u\in M}\psi(u),$$

из которой следует, что

$$\inf_{u\in M}\psi(u) = \psi(u_0) > -\infty.$$

Теорема доказана.

§ 3. Пример

Рассмотрим нелинейную краевую задачу, в классическом смысле имеющей следующий вид:

$$\Delta_p u = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3.1}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{3.2}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1)$, а символом $\Delta_p u$ обозначен следующий нелинейный при $p > 2$ оператор:

$$\Delta_p u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|Du(x)|^{p-2}Du(x)).$$

Дадим определение слабого решения задачи (3.1):

Определение 4. *Слабым решением задачи* (3.1) *назовем решение класса* $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющее равенству*

$$\langle -\Delta_p u(x) + f(x), \varphi(x)\rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.3}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Прежде чем переходить к исследованию соответствующей вариационной задачи рассмотрим оператор Δ_p. Докажем, что он удовлетворяет следующему свойству:

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{3.4}$$

В качестве области определения возьмем

$$\operatorname{dom}\Delta_p = W_0^{1,p}(D),$$

тогда слабый градиент

$$D_x : W_0^{1,p}(D) \to \underbrace{L^p(D)\otimes\cdots\otimes L^p(D)}_{N}.$$

Рассмотрим векторную нелинейную функцию

$\eta(x) = (\eta_1(x), ..., \eta_N(x)) =$

$$= |\xi(x)|^{p-2}\xi(x) : \underbrace{L^p(D)\otimes\cdots\otimes L^p(D)}_{N} \to \underbrace{L^{p'}(D)\otimes\cdots\otimes L^{p'}(D)}_{N},$$

где $\xi(x) = (\xi_1(x), ..., \xi_N(x))$. Теперь определим функционал $\operatorname{div}(\eta(x)) \in \in W^{-1,p'}(D)$ над пространством $W_0^{1,p}(D)$ следующим образом:

$$\langle \operatorname{div}(\eta(x)), \varphi(x)\rangle_* \stackrel{def:}{=} -\sum_{j=1}^{N}\int\limits_D \eta_j(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,dx$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(D)$ и заданной функции

$$\eta(x) = (\eta_1(x), ..., \eta_N(x)) \in \underbrace{L^{p'}(D)\otimes\cdots\otimes L^{p'}(D)}_{N}.$$

Тогда, оператор Δ_p представим в следующем виде

$$\Delta_p u \stackrel{def:}{=} \operatorname{div}(\eta(x)), \quad \eta(x) = |\xi(x)|^{p-2}\xi(x), \quad \xi(x) = Du(x)$$

при $u(x) \in W_0^{1,p}(D)$ и получим, что этот оператор действует

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(D) \to W^{-1,p'}(D).$$

Сопоставим задаче (3.1) следующий функционал:

$$\psi(u) \equiv \psi_1(u) + \psi_2(u) = \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |Du(x)|^p\,dx + \langle f, u\rangle \tag{3.5}$$

Найдем производную Фреше этого функционала. Производная Фреше второго слагаемого вычисляется элементарно:

$$\psi_2(u+h) - \psi_2(u) = \langle f, u+h\rangle - \langle f, u\rangle = \langle f, h\rangle$$

т. е.

$$\psi'_{2f}(u) = f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega).$$

Вычислим теперь производную Фреше функционала

$$\psi_1(u) = \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |D_x u(x)|^p\,dx : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^1.$$

Действительно, заметим, что справедлива следующая формула

$$|\xi+\eta|^p = \left(|\xi+\eta|^2\right)^{p/2} = \left(|\xi|^2 + 2(\xi,\eta) + |\eta^2|\right)^{p/2} =$$

$$= |\xi|^p\left(1 + \frac{2(\xi,\eta)+|\eta|^2}{|\xi|^2}\right)^{p/2} = |\xi|^p + \frac{p}{2}|\xi|^{p-2}2(\xi,\eta) + \bar{\bar{o}}(|\eta|)$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ и малых $|\eta|$. Из этой формулы вытекает, что если положить

$$\xi = D_x u \quad \text{и} \quad \eta = D_x h,$$

то справедливо следующее равенство:

$$\psi_1(u+h) - \psi_1(u) = \int\limits_{\Omega} |D_x u|^{p-2} \left(D_x u, D_x h\right) \, dx + \omega_1(u,h),$$

где

$$\lim_{\|D_x h\|_2 \to 0} \frac{|\omega_1(u,h)|}{\|D_x h\|_2} = 0.$$

Заметим, что поскольку $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, то

$$|D_x u|^{p-2} D_x u \in L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(\Omega)$$

и поэтому имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u(x)|^{p-2} D_x u(x), D_x h(x)\Big) \, dx = \langle -\Delta_p u, h \rangle \, .$$

Таким образом, производная Фреше функционала $\psi(u)$ равна

$$\psi_f^{'}(u) = -\Delta_p u + f,$$

т. е. оператор

$$F(u) := -\Delta_p u + f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$$

является потенциальным. Теперь заметим, что по условию $f \in$ $\in W^{-1,p'}(\Omega)$, поэтому имеет место неравенство

$$|\langle f, u \rangle| \leqslant \|f\|_{-1,p'} \|D_x u\|_p.$$

Следовательно, для функционала (3.5) справедлива следующая оценка снизу:

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{p} \|D_x u\|_p^p - \|f\|_{-1,p'} \|D_x u\|_p.$$

Введем обозначение

$$c := \|f\|_{-1,p'},$$

тогда имеем

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{p} \|D_x u\|_p^p - c \|D_x u\|_p. \tag{3.6}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, тогда используя неравенство Юнга с параметром получим цепочку неравенств

$$c\|D_x u\|_p = \frac{c}{\varepsilon^{1/p}} \varepsilon^{1/p} \|D_x u\|_p \leqslant \frac{1}{p'} \left(\frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\right)^{p'} + \frac{\varepsilon}{p} \|D_x u\|_p^p.$$

Поэтому продолжим неравенство (3.6)

$$\psi(u) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{p}\|D_x u\|_p^p - c_1, \quad c_1 = \frac{1}{p'}\left(\frac{c}{\varepsilon^{1/p}}\right)^{p'}.$$

Следовательно,

$$\psi(u) \to +\infty \quad \text{при} \quad \|D_x u\|_p \to +\infty$$

и поэтому функционал (3.5) является слабо коэрцитивным.

Теперь докажем слабую полунепрерывность снизу функционала $\psi(u)$ на $W_0^{1,p}(\Omega)$. Действительно, пусть

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

тогда в силу слабой полунепрерывности снизу нормы банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$ приходим к выводу, что

$$\liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} |D_x u_n|^p \, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} |D_x u_0|^p \, dx.$$

Кроме того, поскольку $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ имеет место предельное равенство

$$\langle f, u_n \rangle \to \langle f, u_0 \rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тем самым,

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теперь можно воспользоваться теоремой 4, в которой следует взять $M = W_0^{1,p}(\Omega)$ при $p \geqslant 2$.

Для полноты изложения докажем теперь единственность слабого решения рассматриваемой краевой задачи.

Пусть единственности нет и $u_1(x), u_2(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ — это какие-то два разных решения задачи (3.1). Тогда согласно определению 4 слабого решения имеют место следующие два равенства:

$$\langle -\Delta_p u_k(x) + f(x), \varphi(x) \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \ k = 1, 2.$$

Тогда, вычитая одно равенство из другого, получим следующее выражение

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, \varphi \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Теперь возьмем в качестве функции $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ следующее выражение

$$\varphi(x) = u_1(x) - u_2(x) \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

тогда сразу же получим равенство

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0.$$

Откуда в силу слабого определения оператора $\operatorname{div}(\cdot)$ в операторе $\Delta_p(\cdot)$, получим следующее равенство

$$\int\limits_\Omega \Big(|D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), D_x u_1(x) - D_x u_2(x) \Big)\, dx = 0.$$

Теперь заметим, что для произвольных векторов $a, b \in \mathbb{R}^N$ имеет место цепочка следующих неравенств:

$$(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a) \geqslant 2^{-1}\Big(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\Big)|b-a|^2 \geqslant \\ \geqslant 2^{2-p}|b-a|^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2.$$

Следовательно, приходим к неравенству

$$0 = \int\limits_\Omega \Big(|D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - \\ - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), D_x u_1(x) - D_x u_2(x) \Big)\, dx \geqslant \\ \geqslant 2^{2-p} \|D_x u_1 - D_x u_2\|_p^p.$$

Откуда легко следует, что $u_1(x) = u_2(x)$ почти всюду на Ω.

§ 4. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?] и [?].