Лекция 2

КОМПАКТНЫЕ, ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ И ПОЛНОСТЬЮ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Компактные операторы

Важность рассмотрения так называемых компактных операторов обусловлена тем, что это понятие широко используется в топологических методах при обобщении понятия степени конечномерного отображения. Дадим определение. Пусть

$$F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2,$$

где $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства относительно норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ и с соответствующими скобками двойственности

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1 \quad \text{и} \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_2.$$

Определение 1. *Оператор F называется компактным, если для каждого ограниченного множества $B \subset \mathbb{B}_1$ замыкание множества $F(B) \subset \mathbb{B}_2$ компактно в $\mathbb{B}_2$.*

Замечание 1. Напомним, что, с одной стороны, *множество $B \subset \mathbb{B}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ называется компактным, если из любого покрытия его открытыми множествами*

$$B \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \mathbb{B}$$

можно выделить конечное подпокрытие

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{M} U_{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in A \quad \text{для всех} \quad k=\overline{1,M}, \quad M\in\mathbb{N}.$$

С другой стороны, более «естественным» с точки зрения банаховых пространств (на самом деле метрических) является такое определение компактного множества: *множество $B \subset \mathbb{B}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ называется компактным, если из всякой последовательности $\{u_n\} \subset B$ можно извлечь сильно сходящуюся в $\mathbb{B}$ подпоследовательность $\{u_{n_m}\} \subset \{u_n\}$.*

Определение 1 эквивалентно (в случае банаховых пространств) следующему определению:

О п р е д е л е н и е 2. *Оператор F называется компактным, если для любой ограниченной последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}_1$ из соответствующей последовательности $\{F(u_n)\} \subset \mathbb{B}_2$ можно извлечь сильно сходящуюся подпоследовательность $\{F(u_{n_m})\} \subset \mathbb{B}_2$*

$$F(u_{n_m}) \to v \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Справедлив следующий важный результат.

Т е о р е м а 1. *Пусть оператор F является компактным и дифференцируемым по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, тогда $F'_f(u)$ является также компактным оператором.* [1)]

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть нет. Тогда найдется такая последовательность $\|u_n\|_1 \leqslant 1$, что никакая подпоследовательность $\{F'_f(u_{n_m})\}$ последовательности $\{F'_f(u_n)\} \subset \mathbb{B}_2$ не сходится сильно в $\mathbb{B}_2$. Это означает, что исходная последовательность $\{F'_f(u_n)\}$ не является фундаментальной в $\mathbb{B}_2$ [2)]. Поэтому найдется такая постоянная $\varepsilon > 0$, что

$$\left\|F'_f(u)u_n - F'_f(u)u_m\right\|_2 \geqslant 3\varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \neq m.\ ^{3)} \tag{1.1}$$

С одной стороны, в силу дифференцируемости по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место представление

$$F(u+h) - F(u) = F'_f(u)h + \omega(u,h) \quad \text{для} \quad h \in \mathbb{B}_1.$$

Причем для найденного ранее $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $\|h\|_1 \leqslant \delta$ имеет место неравенство

$$\|\omega(u,h)\|_2 \leqslant \varepsilon\|h\|_1.$$

С другой стороны, в силу дифференцируемости по Фреше отображения F в точке $u \in \mathbb{B}_1$ справедливы равенства

$$F(u+\delta u_n) - F(u) = F'_f(u)\delta u_n + \omega(u,\delta u_n),$$
$$F(u+\delta u_m) - F(u) = F'_f(u)\delta u_m + \omega(u,\delta u_m),$$

откуда сразу же получаем

$$F(u+\delta u_n) - F(u+\delta u_m) = \delta F'_f(u)(u_n - u_m) + \omega(u,\delta u_n) - \omega(u,\delta u_m).$$

[1)] Имеется в виду линейный при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ оператор $F'_f(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$.

[2)] В противном случае последовательность $\{F'_f(u_n)\}$ являлась бы сильно сходящейся в банаховом пространстве $\mathbb{B}_2$.

[3)] С необходимостью отсюда вытекает, что найденная последовательность $\{u_n\}$ такова, что $u_{n_1} \neq u_{n_2}$ при $n_1 \neq n_2$.

Следовательно, отсюда в силу (1.1) при $n \neq m$ вытекают неравенства

$$3\varepsilon\delta \leqslant \delta \left\| F_f^{'}(u)(u_n - u_m) \right\|_2 \leqslant \|F(u+\delta u_n) - F(u+\delta u_m)\|_2 + \\ + \|\omega(u, \delta u_n)\|_2 + \|\omega(u, \delta u_m)\|_2 \leqslant \|F(u+\delta u_n) - F(u+\delta u_m)\|_2 + 2\varepsilon\delta.$$

Значит, приходим к неравенству

$$\|F(u+\delta u_n) - F(u+\delta u_m)\|_2 \geqslant \varepsilon\delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{для всех} \quad n \neq m, \tag{1.2}$$

которое противоречит предположению о компактности отображения F, поскольку последовательность $\{u+\delta u_n\} \subset \mathbb{B}_1$ является ограниченной, но никакая подпоследовательность $\{F(u+\delta u_{n_m})\}$ последовательности $\{F(u+\delta u_n)\} \subset \mathbb{B}_2$ не является сильно сходящейся, так как в противном случае она была бы фундаментальной в $\mathbb{B}_2$, а это противоречит неравенству

$$\|F(u+\delta u_{n_{k_1}}) - F(u+\delta u_{n_{k_2}})\|_2 \geqslant \varepsilon\delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{для всех} \quad n_{k_1} \neq n_{k_2},$$

которое вытекает из неравенства (1.2).

Теорема доказана.

Но как правило в приложениях мы сталкиваемся с более узким понятием.

Определение 3. *Оператор F называется вполне непрерывным, если он непрерывен и компактен.*

Очень важным в приложениях к исследованию нелинейных краевых задач является понятие полностью непрерывного оператора. Дадим определение.

Определение 4. *Оператор F называется полностью непрерывным, если из условия*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B}_1$$

вытекает, что

$$F(u_n) \to F(u) \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Естественно, возникает вопрос о связи понятий вполне непрерывности и полной непрерывности операторов. Частично на этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ — это вполне непрерывный оператор, тогда он является полностью непрерывным.*

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1,$$

тогда эта последовательность ограничена в $\mathbb{B}_1$. Тогда в силу компактности L из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ такую, что

$$Lu_{n_k} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty.$$

Рассмотрим транспонированный к L оператор

$$L^t : \mathbb{B}_2^* \to \mathbb{B}_1^*.$$

Поскольку $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$, т. е. является линейным и непрерывным, то и $L^t \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_2^*, \mathbb{B}_1^*)$, причем по определению транспонированного оператора [1]) справедливо следующее равенство:

$$\left\langle L^t f^*, u \right\rangle_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, Lu \rangle_2 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{B}_2^*, \quad u \in \mathbb{B}_1.$$

Докажем, что

$$Lu_n \rightharpoonup Lu \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Действительно, имеет место следующее выражение:

$$\langle f^*, Lu_n - Lu \rangle_2 = \left\langle L^t f^*, u_n - u \right\rangle_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$Lu_n \rightharpoonup Lu \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2. \tag{1.3}$$

Докажем теперь, что на самом деле

$$Lu_n \to Lu \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

По доказанному,

$$Lu_{n_k} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2,$$

значит,

$$Lu_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Следовательно, в силу (1.3) приходим к равенству

$$v = Lu.$$

Шаг 2. Теперь предположим, что найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что имеет место неравенство

$$\|Lu_{n_k} - Lu\|_2 \geqslant c > 0 \quad \text{для всех} \quad n_k \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, по доказанному, у этой подпоследовательности найдется такая подпоследовательность

$$\left\{u_{n_{k_l}}\right\} \subset \{u_{n_k}\}$$

[1]) Смотри лекцию 9 первого тома.

такая, что
$$\left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad l \to +\infty.$$
Справедлива цепочка неравенств
$$0 < c \leqslant \|Lu_{n_k} - Lu\|_2 \leqslant \left\|Lu_{n_k} - Lu_{n_{k_l}}\right\|_2 + \left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2.$$
Выберем теперь $l \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы имело место неравенство
$$\left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2 \leqslant \frac{c}{2}.$$
С другой стороны, для каждого $l \in \mathbb{N}$ найдется такое $n_k \in \mathbb{N}$, что
$$n_k = n_{k_l} \Rightarrow u_{n_k} = u_{n_{k_l}} \Rightarrow Lu_{n_{k_l}} = Lu_{n_k}$$
и тогда
$$\left\|Lu_{n_k} - Lu_{n_{k_l}}\right\|_2 = 0$$
и мы приходим к противоречивому неравенству
$$0 < c \leqslant \frac{c}{2}.$$
Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, не справедливо.

ПРИМЕР 1. Как известно, пространство
$$l_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x_k\}_{k=1}^{+\infty} : \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| < +\infty, \quad x_k \in \mathbb{C}^1 \right\}$$
обладает свойством Шура, т. е. из условия
$$u_n = \{x_{nk}\}_{k=1}^{+\infty} \rightharpoonup u = \{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \quad \text{слабо в} \quad l_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle f, u_n \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k x_{nk} \to \langle f, u \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k x_k \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$
для каждого фиксированного
$$f \in l_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{f_k\}_{k=1}^{+\infty} : \sup_{k=\overline{1,+\infty}} |f_k| < +\infty \right\}$$
вытекает, что
$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad l_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |u_n - u|_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_{nk} - x_k| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Поэтому единичный оператор

$$\mathrm{I} : l_1 \to l_1$$

является полностью непрерывным, но, очевидно, не является компактным.

Однако, при дополнительном условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ [1]) из полной непрерывности линейного оператора

$$L : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

вытекает компактность. Действительно, справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть линейный оператор L полностью непрерывен. Тогда, если банахово пространство $\mathbb{B}_1$ рефлексивно, то L — это вполне непрерывный оператор.*

Доказательство.

Шаг 1. Непрерывность оператора L вытекает из того факта, что всякая последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}_1$ и такая, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1$$

является слабо сходящейся:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Теперь осталось воспользоваться полной непрерывностью оператора L.

Шаг 2. Докажем теперь компактность. Действительно, пусть $B \subset \subset \mathbb{B}_1$ — это ограниченное множество. Тогда из любой последовательности $\{u_n\} \subset B$ в силу рефлексивности $\mathbb{B}_1$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Следовательно, в силу полной непрерывности оператора L имеем

$$Lu_{n_k} \to Lu \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Отсюда вытекает компактность.

Теорема доказана.

Важным следствием теорем 2 и 3 является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ и $\mathbb{B}_1$ рефлексивно. Тогда для полной непрерывности оператора L, необходима и достаточна, вполне непрерывность оператора L.*

§ 2. Компактные множества. Напоминание

Приведем теперь без доказательства *критерий предкомпактности Хаусдорфа*. Он основывается на понятии ε–сети.

[1]) Заметим, что банахово пространство l_1 не является рефлексивным.

Пусть $\mathbb{B}$ — это банахово пространство и $K \subset \mathbb{B}$. Возьмем $\varepsilon > 0$.

Определение 5. *Множество $M_\varepsilon \subset \mathbb{B}$ называется ε–сетью множества M, если для любой точки $x \in M$ найдется точка $x_\varepsilon \in \in M_\varepsilon$ такая, что $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$.*

Понятие ε–сети множества M допускает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть M_ε — это ε–сеть M, а $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$. Возьмем шар

$$S_\varepsilon(x_\varepsilon) := \{x \in \mathbb{B} : \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon\}.$$

Тогда

$$M \subset \bigcup_{x_\varepsilon \in M_\varepsilon} S_\varepsilon(x_\varepsilon),$$

т. е. M содержится в объединении шаров радиуса $\varepsilon > 0$ с центрами $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$. Иначе говоря, совокупность этих шаров покрывает M.

Будем говорить, что ε–сеть конечна, если M_ε — это конечное множество, т. е. состоит из конечного числа элементов.

Дадим определение.

Определение 6. *Множество $B \subset \mathbb{B}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ называется предкомпактным* [1]*, если его замыкание компактно.*

Сформулируем *критерий предкомпактности Хаусдорфа*:

Теорема 5. *Множество M в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в $\mathbb{B}$ существует конечная ε–сеть.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Подмножество $K \subset \mathbb{B}$ является предкомпактным, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое предкомпактное множество $K_\varepsilon \subset \subset \mathbb{B}$, что для каждого $u \in K$ найдется такое $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$, что*

$$\|u - u_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано и фиксировано. По условию леммы найдется относительно компактное множество

$$K_{\varepsilon/2} \subset \mathbb{B},$$

т. е. это в свою очередь в силу критерия предкомпактности Хаусдорфа означает, что найдутся такие точки

$$u_\varepsilon^k \in \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n},$$

что

$$K_{\varepsilon/2} \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_{\varepsilon/2}(u_\varepsilon^k), \tag{2.1}$$

где

$$S_{\varepsilon/2}(u_\varepsilon^k) := \left\{u \in \mathbb{B} : \|u - u_\varepsilon^k\| < \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

[1] Иногда используется термин относительно компактное множество.

т. е. замкнутый шар в $\mathbb{B}$ радиуса $\varepsilon/2$ с центром в u_ε^k при $k = \overline{1, n}$.

С одной стороны, по условию леммы для каждого $u \in K$ найдется такое $u_{\varepsilon/2} \in K_{\varepsilon/2}$, что

$$\|u - u_{\varepsilon/2}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

С другой стороны, в силу (2.1) для $u_{\varepsilon/2}$ найдется такое $k_0 \in \overline{1, n}$, что

$$\left\|u_{\varepsilon/2} - u_\varepsilon^{k_0}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (2.2) приходим к выводу, что

$$\|u - u_\varepsilon^{k_0}\| \leqslant \left\|u_{\varepsilon/2} - u_\varepsilon^{k_0}\right\| + \|u - u_{\varepsilon/2}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_\varepsilon(u_\varepsilon^k),$$

т. е. множество K является предкомпактным в силу критерия Хаусдорфа.

Лемма доказана.

§ 3. Вполне непрерывные операторы

Теперь мы можем доказать важную для нас в дальнейшем теорему.

Теорема 6. *Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это банаховы пространства и $D \subset \mathbb{B}_1$ — это ограниченное множество. Пусть, кроме того,*

$$F : D \to \mathbb{B}_2$$

это некоторое отображение. Тогда следующие два условия эквивалентны:

(I) *F — это вполне непрерывное отображение;*

(II) *для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое ограниченное и непрерывное отображение*

$$F_\varepsilon : D \to \mathbb{B}_2,$$

что $F_\varepsilon(D)$ принадлежит замыканию выпуклой оболочки множества $F(D)$ в $\mathbb{B}_2$ и

$$\dim(\operatorname{span} F_\varepsilon(D)) < +\infty$$

и

$$\|F(u) - F_\varepsilon(u)\|_2 < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad u \in D. \tag{3.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Докажем сначала, что из (I) вытекает (II).

Действительно, пусть отображение F является вполне непрерывным отображением. Тогда в силу ограниченности $D \subset \mathbb{B}_1$ множество

$F(D)$ предкомпактно в $\mathbb{B}_2$. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $v_\varepsilon^k \in \mathbb{B}_2$ при $k = \overline{1,n}$, что

$$\overline{F(D)} \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_\varepsilon(v_\varepsilon^k), \tag{3.2}$$

где

$$S_\varepsilon(v_\varepsilon^k) := \left\{ v \in \mathbb{B}_2 : \ \|v - v_\varepsilon^k\|_2 < \varepsilon \right\}.$$

Введем следующие функции:

$$f_k(v) := \max\{\varepsilon - \|v - v_\varepsilon^k\|_2, 0\}.$$

И рассмотрим следующую функцию

$$\overline{f}_m(v) := \begin{cases} f_m(v) \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(v), & \text{при} \quad f_m(v) \neq 0; \\ 0, & \text{при} \quad f_m(v) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

при $m \in \overline{1,n}$ и для всех $v \in \overline{F(D)}$. Теперь мы можем ввести отображение $F_\varepsilon(u)$ следующим образом:

$$F_\varepsilon(u) := \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(F(u)) v_\varepsilon^m \quad \text{для всех} \quad u \in D.$$

Ограниченность этого отображения для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ очевидна. Докажем непрерывность. По своему построению (3.3) функция

$$\overline{f}_m = \overline{f}_m(f_1, ..., f_n) \quad \text{при} \quad m = \overline{1,n}$$

непрерывна по совокупности вещественных переменных $f_k \in \mathbb{R}^1$, а функция $f_k = f_k(v)$ непрерывна для всех $v \in \overline{F(D)}$. Наконец, по условию леммы оператор F непрерывен на $D \subset \mathbb{B}_1$. Следовательно, по теореме о композиции непрерывных отображений оператор $F_\varepsilon(u)$ непрерывен. Наконец, $F_\varepsilon(u)$ — это конечномерный оператор, поскольку

$$\operatorname{span} F_\varepsilon(D) \subset \operatorname{span}\{v_\varepsilon^1, ..., v_\varepsilon^n\},$$

$\overline{F(D)}$ — компактно в $\mathbb{B}_2$ и в силу (3.2) имеют место неравенства

$$\|F(u) - F_\varepsilon(u)\|_2 = \left\| \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(F(u))F(u) - \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(F(u)) v_\varepsilon^m \right\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(F(u)) \|F(u) - v_\varepsilon^m\|_2 < \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(F(u)) \varepsilon = \varepsilon.$$

Шаг 2. Докажем теперь, что из (II) вытекает (I).

Действительно, пусть

$$\varepsilon_n := \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$v := F(u) \quad \text{и} \quad v_n := F_n(u) \quad \text{для всех} \quad u \in D.$$

С одной стороны, $F_n := F_{\varepsilon_n}$ имеет своим равномерным пределом отображение F, которое в силу непрерывности и ограниченности операторов F_n также является непрерывным и ограниченным.

□ Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ в силу непрерывности отображения $F_{\varepsilon/3}$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех

$$\|u_1 - u_2\|_1 < \delta, \quad u_1, u_2 \in D$$

имеет место неравенство

$$\|F_{\varepsilon/3}(u_1) - F_{\varepsilon/3}(u_2)\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, отсюда в силу (3.1) приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&\|F(u_1) - F(u_2)\|_2 = \\
&\quad = \|F(u_1) - F_{\varepsilon/3}(u_1) + F_{\varepsilon/3}(u_1) - F_{\varepsilon/3}(u_2) + F_{\varepsilon/3}(u_2) - F(u_2)\|_2 \leqslant \\
&\qquad \leqslant \|F(u_1) - F_{\varepsilon/3}(u_1)\|_2 + \|F_{\varepsilon/3}(u_1) - F_{\varepsilon/3}(u_2)\|_2 + \\
&\qquad\qquad + \|F(u_2) - F_{\varepsilon/3}(u_2)\|_2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу (II) имеет место следующее неравенство:

$$\|v - v_n\|_2 < \frac{1}{n},$$

но множество $F_n(D)$ предкомпактно, поэтому в силу леммы 1 приходим к выводу, что $F(D)$ предкомпактно в $\mathbb{B}_2$. Следовательно, отображение F вполне непрерывно.

Теорема доказана.

Пока мы рассмотрели связь полной непрерывности и вполне непрерывности линейных операторов. Однако, есть некоторые результаты и для нелинейных операторов. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть*

$$K : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

— это полностью непрерывный оператор. Тогда при условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ оператор K является вполне непрерывным.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем сначала непрерывность оператора K.

□ Действительно, пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

но тогда, очевидно,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Отсюда в силу полной непрерывности оператора K приходим к выводу, что
$$K(u_n) \to K(u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$
Тем самым, непрерывность оператора K доказана. ⊠

Шаг 2. Докажем теперь компактность оператора K.

□ Действительно, пусть $D \subset \mathbb{B}_1$ — это некоторое ограниченное множество. Пусть $\{u_n\} \subset D$. Тогда в силу рефлексивности $\mathbb{B}_1$ из этой последовательности можно выбрать некоторую подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ такую, что
$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty.$$
Поэтому в силу полной непрерывности оператора K приходим к выводу, что
$$K(u_{n_k}) \to K(u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty.$$
Тем самым, компактность оператора K доказана.

Лемма доказана.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathbb{B}_1 = L^2(0,1)$ и $\mathbb{B}_2 = \mathbb{R}_1$. Рассмотрим следующий нелинейный оператор
$$K(u) := \int\limits_0^1 u^2(s)\,ds = \|u\|_2^2.$$
Докажем, что он является вполне непрерывным. Сначала докажем непрерывность. Пусть
$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,1),$$
но тогда в силу очевидного неравенства
$$|\|u_n\|_2 - \|u\|_2| \leqslant \|u_n - u\|_2$$
приходим к выводу о том, что
$$\|u_n\|_2 \to \|u\|_2 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
поэтому
$$K(u_n) \to K(u) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$
Докажем теперь компактность оператора K. Пусть $D \subset L^2(0,1)$ — это произвольное ограниченное множество. Докажем, что
$$\overline{K(D)} \quad \text{компактно в} \quad \mathbb{R}^1.$$
Но для этого достаточно доказать, что $K(D)$ — это ограниченное множество. В силу ограниченности D в $L^2(0,1)$ имеем следующее неравенство:
$$\|u\|_2 \leqslant c \quad \text{для всех} \quad u \in D$$

при некотором $c > 0$, не зависящем от u. Тогда

$$0 < K(u) \leqslant c^2 < +\infty.$$

Тем самым, компактность оператора K доказана.

Теперь докажем, что, тем не менее, оператор K не является полностью непрерывным. Действительно, рассмотрим последовательность $\{u_n\} \subset L^2(0,1)$, где

$$u_n(s) := \sin(\pi n s), \quad s \in (0,1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любой фиксированной функции

$$v(s) \in L^2(0,1)$$

в силу теоремы Римана–Лебега имеет место выражение

$$\int\limits_0^1 v(s) \sin(\pi n s)\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е. в силу теоремы представления Рисса

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,1).$$

Однако,

$$K(u_n) = \int\limits_0^1 u_n^2(s)\, ds = \frac{1}{2} \not\to 0 = K(0) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

§ 4. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [?], [?], [?], [?] и [?].