Лекция 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Введение

В этой лекции мы введем важные понятия дифференцируемости по Гато и по Фреше. Эти два понятия носят фундаментальный характер при исследовании вариационных задач, а также при рассмотрении различных нелинейных краевых задач. Будут доказаны важные теоремы о связи этих двух понятий друг с другом и с понятиями непрерывности функций дифференцируемых или по Гато или по Фреше. Рассмотрение данных понятий будет снабжено некоторыми примерами. Наконец, последняя часть этой лекции будет посвящена важному в приложениях оператору Немыцкого. Будет приведен без доказательства фундаментальный результат о сильной непрерывности оператора Немыцкого, который будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

§ 2. Производные Гато и Фреше нелинейных операторов

Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства относительно норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Пусть, кроме того, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ — это соответствующие скобки двойственности.

Рассмотрим некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор

$$F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Введем понятие дифференцируемости по Гато оператора F. Дадим соответствующее определение.

Определение 1. *Оператор F называется дифференцируемым по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\|\frac{F(u+\lambda h)-F(u)}{\lambda}-F_g^{'}(u)h\right\|_2 = 0, \tag{2.1}$$

где $F_g^{'}(u)$ при каждом фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ есть линейный оператор из $\mathbb{B}_1$ в $\mathbb{B}_2$. При этом, вообще говоря, нелинейный по $u \in \mathbb{B}_1$ оператор $F_g^{'}(u)$ называется производной Гато оператора F.

Замечание 1. Введем $\mathbb{B}_2$–значную функцию

$$\varphi(\lambda) := F(u+\lambda h),$$

для всех $u, h \in \mathbb{B}_1$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Тогда, как нетрудно видеть, согласно определению 1 имеет место равенство

$$F_g^{'}(u)h = \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}.$$

□ Действительно, пусть

$$v := u + \lambda h.$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{\varphi(\lambda+\tau)-\varphi(\lambda)}{\tau} = \\ = \frac{F(u+(\lambda+\tau)h)-F(u+\lambda h)}{\tau} = \frac{F(v+\tau h)-F(v)}{\tau}. \quad (2.2)$$

С одной стороны, при условии существования предела справедливо предельное равенство

$$\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{\varphi(\lambda+\tau)-\varphi(\lambda)}{\tau} - \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\right\|_2 = 0. \quad (2.3)$$

С другой стороны, при условии существования предела имеем

$$\lim_{\tau\to 0}\left\|\frac{F(v+\tau h)-F(v)}{\tau} - F_g^{'}(v)h\right\|_2 = 0. \quad (2.4)$$

Поэтому в силу (2.2) мы из (2.3) и (2.4) получим, что при условии существования производной Фреше $F_g^{'}(v)$ в точке $v = u+\lambda h$ вытекает справедливость равенства

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = F_g^{'}(v)h \Rightarrow \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = F_g^{'}(u)h,$$

причем последнее равенство справедливо при условии существования производной Гато в точке $v = u$, т. е. при $\lambda = 0$. ⊠

Рассмотрим теперь ряд примеров производных Гато отображений.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим теперь случай линейного оператора

$$F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Тогда, очевидно, в силу линейности этого отображения имеет место следующее равенство:

$$\frac{F(u+\lambda h)-F(u)}{\lambda} = Fh,$$

т. е.

$$F_g^{'}(u) = F.$$

Тем самым, приходим к выводу о том, что линейный оператор из $\mathbb{B}_1$ в $\mathbb{B}_2$ является бесконечное число раз дифференцируемым по Гато, причем всякий раз соответствующая производная Гато совпадает с самим оператором.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь следующее отображение:

$$F = (F_1, ..., F_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,$$

где $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ — это евклидовы пространства строк. Конечно, они являются банаховыми относительно, например, таких норм:

$$\|u\|_1 := \Bigl(|u_1|^2 + \cdots + |u_m|^2\Bigr)^{1/2} \quad \text{и} \quad \|v\|_2 := \Bigl(|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2\Bigr)^{1/2},$$

где $u = (u_1, ..., u_m) \in \mathbb{R}^m$ и $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$. Вычислим производную Гато отображения F.

□ Действительно, как известно из линейной алгебры, всякое линейное отображение из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ можно задать некоторой вещественной матрицей $\mathbb{A}$, состоящей из m строк и n столбцов. Поэтому согласно определению 1 имеет место предельное равенство (2.1). Возьмем в этом предельном равенстве в качестве h вектор $e_j \in \mathbb{R}^m$:

$$e_j = (0, ..0, 1, 0, ..., 0),$$

где 1 стоит на $j-$ом месте. Согласно определению 1 при фиксированном $u \in \mathbb{R}^m$

$$F_g^{'}(u)$$

есть линейный оператор из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Поэтому

$$F_g^{'}(u)e_j = \mathbb{A}e_j$$

и, значит,

$$\left(\mathbb{A}e_j\right)_k = a_{kj} \quad j \in \overline{1, m} \quad \text{и} \quad k \in \overline{1, n}.$$

Тем самым, из (2.1) с учетом выбора норм получаем, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \left| \frac{F_k(u + \lambda e_j) - F_k(u)}{\lambda} - a_{kj} \right| = 0.$$

Но как хорошо известно

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F_k(u + \lambda e_j) - F_k(u)}{\lambda} =: \frac{\partial F_k}{\partial u_j}(u).$$

Таким образом,

$$a_{kj} = \frac{\partial F_k}{\partial u_j}(u),$$

т. е. производная Гато отображения F представляет собой якобиан этого отображения. ⊠

П Р И М Е Р 3. Рассмотрим оператор Гаммерштейна

$$G(u) := \int\limits_0^1 k(x, y) g(u(y), y)\, dy \quad \text{для всех} \quad y \in [0, 1].$$

В качестве банаховых пространств $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ возьмем $\mathbb{C}[0, 1]$ со стандартной нормой и потребуем, чтобы

$$k(x, y) \in \mathbb{C}([0, 1] \times [0, 1]), \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^1 \times [0, 1]).$$

В силу этих предположений имеет место предельное равенство

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{g(u + \lambda h, x) - g(u, x)}{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial u}(u, x) h(x).$$

Поэтому производная Гато оператора Гаммерштейна имеет вид

$$G_g'(u)h = \int\limits_0^1 k(x, y) \frac{\partial g}{\partial u}(u(y), y) h(y)\, dy \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0, 1].$$

Теперь приступим к рассмотрению еще одного вида производной от оператора — *производной Фреше*. Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 2. *Оператор F называется дифференцируемым по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если в окрестности этой точки для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее равенство*:

$$F(u + h) = F(u) + F_f'(u)h + \omega(u, h), \tag{2.5}$$

причем

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\omega(u, h)\|_2}{\|h\|_1} = 0. \tag{2.6}$$

Линейный при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ оператор

$$F_f'(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

называется производной Фреше оператора F.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что из существования производной Фреше оператора $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ вытекает существование производной Гато и справедливо равенство

$$F_g'(u) = F_f'(u) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}_1.$$

□ Действительно, в силу (2.5) справедливо равенство

$$F(u + \lambda h) = F(u) + F_f'(u)\lambda h + \omega(u, \lambda h).$$

В силу линейности оператора $F'_f(u)$ при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ отсюда вытекает равенство

$$\frac{F(u+\lambda h) - F(u)}{\lambda} - F'_f(u)h = \frac{\omega(u, \lambda h)}{\lambda}. \qquad (2.7)$$

Нужно рассмотреть два случая — это $\|h\|_1 = 0$ и $\|h\|_1 \neq 0$. В первом случае в силу (2.6) мы получим, что

$$\omega(u, \lambda h) = 0 \quad \text{при} \quad h = \vartheta_1 \in \mathbb{B}_1.$$

Поэтому

$$\left\| \frac{F(u+\lambda h) - F(u)}{\lambda} - F'_f(u)h \right\|_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{F(u+\lambda h) - F(u)}{\lambda} - F'_f(u)h \right\|_2 = 0. \qquad (2.8)$$

Теперь рассмотрим второй случай: $\|h\|_1 \neq 0$. В этом случае из равенства (2.7) мы получим следующее выражение:

$$\left\| \frac{F(u+\lambda h) - F(u)}{\lambda} - F'_f(u)h \right\|_2 = \|h\|_1 \frac{\|\omega(u, \lambda h)\|_2}{|\lambda| \|h\|_1}. \qquad (2.9)$$

Осталось воспользоваться свойством (2.6) и опять прийти к предельному равенству (2.8). ⊠

Замечание 3. Пусть, кроме того, имеется третье банахово пространство $\mathbb{B}_3$, которое *непрерывно* вложено в банахово пространство $\mathbb{B}_1$, т.е.

$$\exists \ \mathrm{J} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_3; \mathbb{B}_1)$$

и J — инъективный оператор. Тогда производная Фреше оператора

$$F(\mathrm{J}\cdot) : \mathbb{B}_3 \to \mathbb{B}_2$$

есть оператор

$$F'_f(\mathrm{J}\cdot) : \mathbb{B}_3 \to \mathcal{L}(\mathbb{B}_3; \mathbb{B}_2).$$

Пусть $\psi(u)$ — это функционал

$$\psi(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1,$$

где $\mathbb{H}$ — это гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. В этом случае $\mathbb{B}_1 = \mathbb{H}$ и $\mathbb{B}_2 = \mathbb{C}^1$, причем $\mathbb{C}^1$ — это банахово пространство относительно модуля $|\cdot|$.

Дадим определение градиента функционала $\psi(u)$ [1]).

Определение 3. *Градиентом функционала $\psi(u)$ называется величина*

$$\mathbf{grad}\, \psi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{J}\psi'_f(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{H},$$

[1]) Иногда градиент функционала на гильбертовом пространстве путают с производной Фреше этого функционала.

где $\mathrm{J} : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}$ — *оператор Рисса.*

ПРИМЕР 4. Рассмотрим отображение, определенное формулой

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,$$

$$F(x) = \begin{cases} x_1^3 x_2 / \left(x_1^4 + x_2^2\right), & \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \neq 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Докажем, что это отображение дифференцируемо по Гато в точке $(0, 0)$.

□ Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\frac{F(x + \lambda h) - F(x)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^4 h_1^3 h_2}{\lambda^4 h_1^4 + \lambda^2 h_2^2} = \lambda \frac{h_1^3 h_2}{\lambda^2 h_1^4 + h_2^2} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0$$

в точке $x = (0, 0)$. Тем самым, производная Гато этого отображения в точке $(0, 0)$ равна нулевому отображению: $F_g^{'}(0) = \Theta$.

Предположим, что производная Фреше этого отображения существует в точке $(0, 0)$. Поскольку производная Фреше является производной Гато, то производная Фреше с необходимостью равна нулевому отображению Θ. Заметим, что согласно определению 2 производной Фреше и явному виду отображения F имеет место следующее равенство:

$$F(h) = \omega(\vartheta, h), \qquad \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(\vartheta, h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to +0.$$

Значит, с необходимостью получаем, что

$$\frac{\|F(h)\|}{\|h\|} \to 0.$$

Рассмотрим стремление к точке $(0, 0)$ вектора $h \in \mathbb{R}^2$ по кривой (параболе) $h_2 = h_1^2$. Действительно, имеет место равенство

$$\frac{\|F(h)\|}{\|h\|} = \frac{|h_1|^3 |h_2|}{h_1^4 + h_2^2} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \frac{|h_1| h_1^4}{h_1^4 + h_1^4} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + h_1^2}} \to \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to 0.$$

Полученное предельное равенство означает, что производной Фреше в точке $(0, 0)$ не существует. ⊠

Тем самым, из существования производной Гато в какой-то точке не следует существование производной Фреше в этой же точке.

Возникает естественный вопрос: при каких дополнительных условиях вытекает существование производной Фреше в некоторой точке при условии существования производной Гато в той же точке. Для ответа на этот вопрос нам необходимо доказать следующие два утверждения о среднем значении. Во-первых, справедлив следующий результат.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ [1]. *Тогда для каждой пары* $u, h \in \mathbb{B}$ *найдется такое число* $\lambda = \lambda(u, h) \in (0, 1)$, *что имеет место формула*

$$\psi(u + h) - \psi(u) = \left\langle \psi_g^{'}(u + \lambda h), h \right\rangle, \tag{2.10}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— есть скобки двойственности между банаховыми пространствами* $\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{B}^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Введем вещественно-значную функцию

$$\varphi(\lambda) := \psi(u + \lambda h).$$

В силу замечания 1 имеем

$$\varphi^{'}(\lambda) = \left\langle \psi_g^{'}(u + \lambda h), h \right\rangle.$$

Заметим теперь, что в силу теоремы Лагранжа для вещественных функций имеет место равенство

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi^{'}(\lambda) \quad \text{при некотором} \quad \lambda \in (0, 1).$$

Значит, справедливо равенство (2.10).

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Только что доказанная теорема позволит нам доказать следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$, *тогда для каждой пары* $u, h \in \mathbb{B}_1$ *и* $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ *найдется такое вещественное число* $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$, *что имеют место следующие выражения*:

$$\langle f^*, F(u + h) - F(u) \rangle_2 = \left\langle f^*, F_g^{'}(u + \lambda h) h \right\rangle_2 \tag{2.11}$$

и

$$\|F(u + h) - F(u)\|_2 \leqslant \left\| F_g^{'}(u + \lambda h) \right\|_{1 \to 2} \|h\|_1. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим вещественный функционал:

$$\psi(u) := \langle f^*, F(u) \rangle_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^1.$$

Из дифференцируемости по Гато оператора $F(u)$ вытекает дифференцируемость по Гато

$$\psi(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^1.$$

Причем имеет место равенство

$$\left\langle \psi_g^{'}(u), h \right\rangle_1 = \left\langle f^*, F_g^{'}(u) h \right\rangle_2.$$

---

[1] Т. е. функционал $\psi(u)$ вещественный.

В силу теоремы 1 имеет место равенство (проверьте сами!)

$$\psi(u+h) - \psi(u) = \left\langle \psi_g'(u+\lambda h), h \right\rangle_1$$

при некотором числе $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$. Значит, имеет место равенство

$$\langle f^*, F(u+h) - F(u) \rangle_2 = \left\langle f^*, F_g'(u+\lambda h)h \right\rangle_2 .$$

В силу следствия из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{2*} = 1$, что

$$\langle f^*, F(u+h) - F(u) \rangle_2 = \|F(u+h) - F(u)\|_2.$$

Осталось воспользоваться неравенством (докажите сами!)

$$|\langle f^*, u \rangle| \leqslant \|f^*\|_* \|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}, \quad f^* \in \mathbb{B}^*.$$

Тем самым, имеет место неравенство (2.12).

Теорема доказана.

Наконец, мы в состоянии доказать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть оператор $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ является дифференцируемым по Гато в некоторой окрестности точки $u \in \mathbb{B}_1$ и производная Гато $F_g'(\cdot)$ непрерывна в точке $u \in \mathbb{B}_1$. Тогда оператор F дифференцируем по Фреше в этой же точке $u \in \mathbb{B}_1$ и имеет место равенство*

$$F_g'(u) = F_f'(u).$$

Доказательство.

Введем обозначение.

$$\omega(u, h) := F(u+h) - F(u) - F_g'(u)h.$$

Пусть $f^* \in \mathbb{B}_2^*$, тогда имеем

$$\langle f^*, \omega(u, h) \rangle_2 = \langle f^*, F(u+h) - F(u) \rangle_2 - \left\langle f^*, F_g'(u)h \right\rangle_2 .$$

По теореме 2 найдется такое число $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$, что справедливо следующее равенство:

$$\langle f^*, F(u+h) - F(u) \rangle_2 = \left\langle f^*, F_g'(u+\lambda h)h \right\rangle_2 .$$

Следовательно,

$$\langle f^*, \omega(u, h) \rangle_2 = \left\langle f^*, F_g'(u+\lambda h)h - F_g'(u)h \right\rangle_2 .$$

По следствию из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{*2} = 1$, что [1)]

$$\|\omega(u, h)\|_2 = \langle f^*, \omega(u, h) \rangle_2 .$$

[1)] Заметим, что пока $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ является произвольным.

Значит, имеет место неравенство

$$\|\omega(u,h)\|_2 \leqslant \left\|F_g^{'}(u+\lambda h) - F_g^{'}(u)\right\|_{1\to 2} \|h\|_1.$$

Здесь мы снова воспользовались неравенством

$$|\langle f^*, u\rangle| \leqslant \|f^*\|_* \|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}, \quad f^* \in \mathbb{B}^*.$$

Следовательно, в силу непрерывности $F_g^{'}(\cdot)$ в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место неравенство

$$\lim_{\|h\|_1\to 0} \frac{\|\omega(u,h)\|_2}{\|h\|_1} \leqslant \lim_{\|h\|_1\to 0} \left\|F_g^{'}(u+\lambda h) - F_g^{'}(u)\right\|_{1\to 2} = 0.$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем установить связь между понятиями дифференцируемости по Фреше и непрерывности отображения. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ — это отображение, дифференцируемое по Фреше в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, тогда отображение F непрерывно в этой точке.*

Доказательство.

Действительно, в силу дифференцируемости по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\|F(u+h) - F(u) - F_f^{'}(u)h\right\|_2 \leqslant \|h\|_1$$

при достаточно малом $h \in \mathbb{B}_1$. Но тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|F(u+h) - F(u)\|_2 \leqslant \left\|F(u+h) - F(u) - F_f^{'}(u)h\right\|_2 + \\ + \left\|F_f^{'}(u)h\right\|_2 \leqslant \left(1 + \left\|F_f^{'}(u)\right\|_{1\to 2}\right) \|h\|_1.$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР 5. Приведем пример отображения, дифференцируемого по Гато в некоторой точке, но не непрерывной в этой точке. Пусть

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,$$
$$F(x) = \begin{cases} x_1^4 x_2 / \left(x_1^6 + x_2^3\right), & \text{при} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0); \\ 0, & \text{при} \quad (x_1,x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Выражение

$$\frac{F(x+\lambda h) - F(x)}{\lambda}$$

в точке $x = (0,0)$ имеет вид

$$\frac{\lambda^5 h_1^4 h_2}{\lambda\left(\lambda^6 h_1^6 + \lambda^3 h_2^3\right)} = \lambda \frac{h_1^4 h_2}{\lambda^3 h_1^6 + h_2^3} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Значит, производная Гато указанного отображения существует в точке $x = (0, 0)$ и равна нулевому отображению

$$F_g^{'}(\vartheta) = \Theta.$$

Докажем, что тем не менее отображение F не непрерывно в нуле.

$\square$ Действительно, рассмотрим кривую (параболу) в $\mathbb{R}^2$ $x_2 = \lambda x_1^2$ при $\lambda > 0$. И устремим точку (x_1, x_2) к $(0, 0)$ вдоль этой кривой. Тогда получим

$$F(x)\Big|_{x_2 = \lambda x_1^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^3} > 0.$$

Таким образом, предел при $x \to (0, 0)$ вдоль кривой $x_2 = \lambda x_1^2$ зависит от параметра $\lambda > 0$. Следовательно, указанное отображение F не является непрерывным в точке $(0, 0)$. $\boxtimes$

Однако, в случае дифференцируемости по Гато есть некоторый ослабленный вариант непрерывности. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть отображение F дифференцируемо по Гато в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$. Тогда имеет место следующее неравенство*:

$$\|F(u + \lambda h) - F(u)\|_2 \leqslant c|\lambda|, \tag{2.13}$$

где $c = c(u, h) > 0$.

Доказательство.

В силу дифференцируемости по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\|\frac{F(u + \lambda h) - F(u)}{\lambda}\right\|_2 \leqslant \left\|\frac{F(u + \lambda h) - F(u)}{\lambda} - F_g^{'}(u)h\right\|_2 + \\ + \left\|F_g^{'}(u)h\right\|_2 \leqslant c_1 + c_2 = c_3,$$

где c_3 не зависит от λ. Отсюда вытекает неравенство (2.13).

Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать формулы дифференцирования по Гато и по Фреше композиции операторов. Имеет место первый результат.

Теорема 5. *Пусть $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ и $G : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$, причем оператор F дифференцируем по Гато в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, а оператор G дифференцируем по Фреше в точке $F(u)$. Тогда их композиция*

$$K \stackrel{\text{def}}{=} G \circ F$$

дифференцируема по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$, причем имеет место следующее равенство:

$$K_g^{'}(u) = G_f^{'}(F(u))F_g^{'}(u). \tag{2.14}$$

Доказательство.

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|\lambda|}\left\|K(u+\lambda h)-K(u)-\lambda G'_f(F(u))F'_g(u)\right\|_3 \leqslant \\
&\quad\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left\|G(F(u+\lambda h))-G(F(u))-G'_f(F(u))(F(u+\lambda h)-F(u))\right\|_3 + \\
&\qquad + \frac{1}{|\lambda|}\left\|G'_f(F(u))\left[F(u+\lambda h)-F(u)-\lambda F'_g(u)h\right]\right\|_3 =: \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим сначала выражение I_2. Для него в силу определения 1 производной Гато справедлива оценка

$$
\mathrm{I}_2 \leqslant \left\|G'_f(F(u))\right\|_{2\to 3}\left\|\frac{F(u+\lambda h)-F(u)}{\lambda}-F'_g(u)h\right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to 0.
$$

Теперь рассмотрим выражение для I_1. Для него в силу определения 2 производной Фреше справедлива оценка

$$
\mathrm{I}_1 \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\overline{\overline{o}}\left(\|F(u+\lambda h)-F(u)\|_2\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\overline{\overline{o}}(|\lambda|) = \overline{\overline{o}}(1),
$$

где мы воспользовались результатом леммы 1.

Теорема доказана.

Наконец, справедлив основной для нас результат.

Теорема 6. *Пусть $F:\mathbb{B}_1\to\mathbb{B}_2$ и $G:\mathbb{B}_2\to\mathbb{B}_3$, причем оператор F дифференцируем по Фреше в некоторой точке $u\in\mathbb{B}_1$, а оператор G дифференцируем по Фреше в точке $F(u)$. Тогда их композиция*

$$
K \stackrel{\text{def}}{=} G\circ F
$$

дифференцируема по Фреше в точке $u\in\mathbb{B}_1$, причем имеет место следующее равенство:

$$
K'_f(u) = G'_f(F(u))F'_f(u). \tag{2.15}
$$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&\left\|K(u+h)-K(u)-G'_f(F(u))F'_f(u)\right\|_3 \leqslant \\
&\quad\leqslant \left\|G(F(u+h))-G(F(u))-G'_f(F(u))\left[F(u+h)-F(u)\right]\right\|_3 + \\
&\qquad + \left\|G'_f(F(u))\left[F(u+h)-F(u)-F'_f(u)h\right]\right\|_3 \leqslant \\
&\qquad\leqslant \|\omega_1(F(u),F(u+h)-F(u))\|_3 + \left\|G'_f(F(u))\right\|_{2\to 3}\|\omega_2(u,h)\|_3.
\end{aligned}
$$

Теперь заметим, что в силу дифференцируемости по Фреше оператора F имеет место оценка

$$
\|F(u+h)-F(u)\|_2 \leqslant c\|h\|_1.
$$

Поэтому имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_1(F(u),F(u+h)-F(u))\|_3}{\|h\|_1}=$$
$$=\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_1(F(u),F(u+h)-F(u))\|_3}{\|F(u+h)-F(u)\|_2}\frac{\|F(u+h)-F(u)\|_2}{\|h\|_1}=0.$$

Кроме этого, имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_2(u,h)\|_3}{\|h\|_1}=0.$$

Тем самым, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

§ 3. Оператор Немыцкого

Теперь приступим к рассмотрению одного частного, но важного класса операторов, называемых *операторами Немыцкого*. Для того чтобы ввести оператор Немыцкого нам сначала необходимо рассмотреть так называемые *каратеодориевы функции*. Пусть $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ — это есть полное измеримое $\sigma-$конечное пространство. Дадим определения.

Определение 4. *Функция*

$$f(x,u):\Omega\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^1$$

называется Каратеодориевой, если она для всех $u\in\mathbb{R}^N$ является $\mu-$измеримой на Ω и для $\mu-$почти всех $x\in\Omega$ непрерывна по $u\in\in\mathbb{R}^N$.

Определение 5. *Оператор $N_f(u)\stackrel{\text{def}}{=}f(x,u(x))$ называется оператором Немыцкого.*

Его важность при исследовании нелинейных краевых задач обусловлена тем, что для него справедлива следующая важная теорема М. А. Красносельского.

Теорема 7. *Оператор Немыцкого $N_f(u)$ является ограниченным и непрерывным, действующим из*

$$\prod_{k=1}^N L^{p_k}(\Omega,\mu)\quad \textit{в}\quad L^q(\Omega,\mu)\quad \textit{при}\quad p_k,q\in[1,+\infty),$$

тогда и только тогда, когда для соответствующей каратеодориевой функции $f(x,u)$ справедлива оценка

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+c\sum_{k=1}^N|u_k|^{p_k/q}$$

для всех $u=(u_1,...,u_N)\in\mathbb{R}^N$ и $\mu-$почти всех $x\in\Omega$, где $a(x)\in\in L^q(\Omega,\mu)$.

Доказательство этой теоремы достаточно сложное и кропотливое имеется в работе [**?**].

Рассмотрим теперь следующий важный результат, который будет нами неоднократно использоваться в вариационных задачах.

Пусть

$$f(x, u) : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$$

является каратеодориевой функцией. Введем так называемую потенциальную функцию

$$F(x, z) := \int_0^z f(x, \xi)\, d\xi, \tag{3.1}$$

а также функционал

$$\psi(u) := \int_\Omega F(x, u(x))\, dx. \tag{3.2}$$

Предположим также, что

$$|f(x, u)| \leqslant a(x) + c|u|^{p/p'} \quad \text{при} \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad \text{и} \quad p \in (1, +\infty),$$

где $a(x) \in L^{p'}(\Omega)$ и $a(x) \geqslant 0$ почти всюду, $c > 0$. Тогда для потенциальной функции $F(x, u)$, определенной формулой (3.1), в силу арифметического неравенства Гельдера

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad a, b \geqslant 0$$

имеет место следующее неравенство:

$$|F(x, u)| \leqslant \left| \int_0^{u(x)} f(x, \xi)\, d\xi \right| \leqslant a(x)|u| + \frac{c}{p}|u|^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a(x)|^{p'}}{p'} + \frac{|u|^p}{p} + \frac{c}{p}|u|^p = a_1(x) + c_1|u|^p, \tag{3.3}$$

где $a_1(x) \in L^1(\Omega)$ и $c_1 > 0$. Очевидно, что по своему определению потенциальная функция $F(x, u)$ является каратеодориевой и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского и (3.3) приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого

$$N_F(u) : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$$

является ограниченным и непрерывным. Следовательно, функционал $\psi(u)$, определенный формулой (3.2) является ограниченным и непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $\mathbb{R}^1$.

$\square$ Действительно, в силу оценки (3.3) имеет место цепочка неравенств:

$$|\psi(u)| \leqslant \int\limits_{\Omega} |F(x, u(x))|\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} a_1(x)\, dx + c_1 \int\limits_{\Omega} |u|^p\, dx \leqslant c_2 + c_1 \|u\|_p^p.$$

Ограниченность доказана. Докажем теперь непрерывность. Пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Тогда

$$|\psi(u_n) - \psi(u)| \leqslant \|N_F(u_n) - N_F(u)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак, непрерывность и ограниченность функционала $\psi(u)$ доказана. $\boxtimes$

Докажем теперь его дифференцируемость по Фреше. Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u, v) := \psi(u + v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v\rangle \quad \text{для} \quad u, v \in L^p(\Omega).$$

$$|\omega(u, v)| \leqslant \left| \int\limits_{\Omega} [F(x, u(x) + v(x)) - F(x, u(x))]\, dx - \int\limits_{\Omega} N_f(u)(x) v(x)\, dx \right|.$$

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$F(x, u(x) + v(x)) - F(x, u(x)) = \\ = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} F(x, u(x) + t v(x))\, dt = \int\limits_0^1 f(x, u(x) + t v(x)) v(x)\, dt.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|\omega(u, v)| \leqslant \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\Omega} dx\, |N_f(u + tv)(x) - N_f(u)(x)|\, |v(x)| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{p'} \|v\|_p.$$

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\lim_{\|v\|_p \to 0} \frac{|\omega(u, v)|}{\|v\|_p} \leqslant \lim_{\|v\|_p \to 0} \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{p'} = 0.$$

Тем самым, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *При сформулированных условиях функционал* $\psi(u)$, *определенный формулой* (3.2), *является дифференцируемым по Фреше, причем имеет место следующее равенство*:

$$\psi_f'(u) = N_f(u) \quad \textit{для всех} \quad u \in L^p(\Omega) \quad \textit{при} \quad p \in (1, +\infty). \tag{3.4}$$