Лекция 7

СЛАБАЯ И СИЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 1. Слабая производная

Определение 1. *Функция $v(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ называется слабой производной ∂^α_x функции $u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ и пишем*

$$v(x) = \partial^\alpha u(x),$$

если для всякой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}^\infty_0(\Omega)$ имеет место равенство

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x) \partial^\alpha_x \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Слабая частная производная ∂^α_x порядка α функции u, если существует, определяется единственным образом с точностью до множества меры нуль.*

Доказательство.

Пусть $v_1, v_2 \in L^p_{loc}(\Omega)$ такие, что

$$\int\limits_\Omega u \partial^\alpha_x \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_1 \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_2 \varphi\, dx$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}^\infty_0(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (v_1 - v_2)\, \varphi(x)\, dx = 0$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}^\infty_0(\Omega)$, откуда $v_1 - v_2 = 0$ почти всюду.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = (0, 2)$

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Определим

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

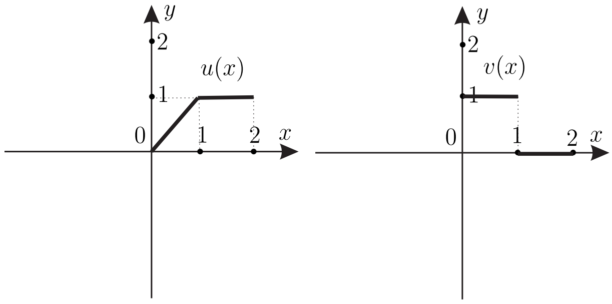

Рис. 1. Слабая производная $v(x)$ функции $u(x)$.

Покажем, что $u^{'} = v$ в слабом смысле. Чтобы убедиться в этом, выберем произвольно $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Надо показать, что

$$\int_0^2 u\varphi^{'}\,dx = -\int_0^2 v\varphi\,dx.$$

Легко вычислить, что

$$\int_0^2 u\varphi^{'}\,dx = \int_0^1 x\varphi^{'}\,dx + \int_1^2 \varphi^{'}\,dx = -\int_0^1 \varphi\,dx + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int_0^2 v\varphi\,dx.$$

П Р И М Е Р 2. Пусть $\Omega = (0,2)$.

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

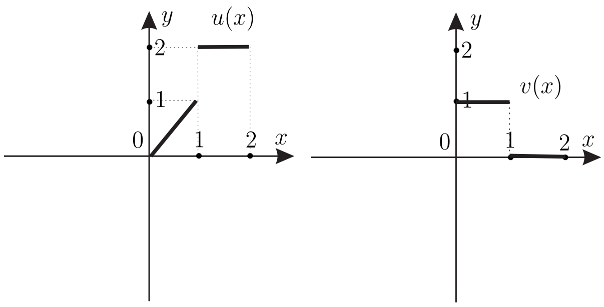

Рис. 2. Отсутствие слабой производной $v(x)$ функции $u(x)$.

Мы покажем, что производная $u^{'}$ не существует в слабом смысле. Для этого надо показать, что не существует функции $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ такой,

что
$$\int\limits_0^2 u\varphi'\,dx = -\int\limits_0^2 v\varphi\,dx \tag{1.2}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$.

Предположим противное. Пусть (1.2) выполняется для некоторой функции v и всех функций φ. Тогда

$$-\int\limits_0^2 v\varphi\,dx = \int\limits_0^2 u\varphi'\,dx = \int\limits_0^1 x\varphi'\,dx + 2\int\limits_1^2 \varphi'\,dx = -\int\limits_0^1 \varphi\,dx - \varphi(1), \tag{1.3}$$

где мы воспользовались тем, что $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$. Выберем последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ гладких функций таким образом, чтобы

$$0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1, \quad \varphi_m(1) = 1, \quad \varphi_m \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \neq 1.$$

Заменив φ на φ_m в (1.3) и полагая $m \to +\infty$, в силу теоремы Лебега о предельном переходе получим предельное равенство

$$1 = \lim_{m\to+\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m\to+\infty}\left[\int\limits_0^2 v\varphi_m\,dx - \int\limits_0^1 \varphi_m\,dx\right] = 0,$$

которое противоречиво.

§ 2. Сильная производная

Определение 2. *Функция $v(x) \in L^p(\Omega)$ при $p \geqslant 1$ называется сильной производной α-го порядка от функции $u(x) \in L^p(\Omega)$, если найдется такая последовательность $\{u_n(x)\} \in \mathbb{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, что*

$$u_n \to u \quad \textit{сильно в} \quad L^p(\Omega), \quad \partial_x^\alpha u_n \to v \quad \textit{сильно в} \quad L^p(\Omega). \tag{2.1}$$

Докажем теорему о связи слабой и сильной производных.

Теорема 1. *Пусть граница $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ достаточно гладкая. Тогда понятия слабой и сильной производной равносильны.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $v(x)$ — это сильная производная функции $u(x)$. Значит, существует такая последовательность $\{u_n(x)\} \in \mathbb{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega), \quad \partial_x^\alpha u_n \to v \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Заметим, что для каждой функции $u_n(x) \in \mathbb{C}^{|\alpha|}(\Omega)$ справедливо равенство:

$$(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} u_n(x)\partial_x^\alpha \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} \partial_x^\alpha u_n(x)\varphi(x)\,dx \text{ [1]} \tag{2.2}$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Поскольку из сильной сходимости в $L^p(\Omega)$ вытекает слабая сходимость в этом же пространстве, то переходя к пределу в равенстве (2.2) при $n \to \infty$ мы получим следующее равенство:

$$(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} u(x)\partial_x^\alpha \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} v(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega),$$

т. е. пришли к определению слабой производной функции $u(x) \in L^p(\Omega)$.

Шаг 2. Теперь докажем, что из определения слабой производной вытекает определение сильной производной. Пусть $v(x) \in L^p(\Omega)$ — это слабая производная функции $u(x) \in L^p(\Omega)$, т. е. выполнено равенство

$$(-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} u(x)\partial_x^\alpha \varphi(x)\,dx = \\ = \int\limits_{\Omega} v(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega). \tag{2.3}$$

Рассмотрим срезку функции $u(x)$ с параметром срезки $\varepsilon = 1/n$. Итак,

$$u_n(x) = n^N \int\limits_{\Omega} \omega(n|x-y|)u(y)\,dy \in \mathbb{C}^\infty(\Omega).$$

Теперь заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\partial_x^\alpha u_n(x) = n^N \int\limits_{\Omega} \partial_x^\alpha \omega(n|x-y|)u(y)\,dy = \\ = (-1)^{|\alpha|} n^N \int\limits_{\Omega} \partial_y^\alpha \omega(n|x-y|)u(y)\,dy = \\ = (-1)^{|\alpha|} n^N (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} \omega(n|x-y|)v(y)\,dy \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}.$$

Важный момент!!! При переходе к последнему равенству мы воспользовались формулой (2.3), поскольку функция $\omega(n|z|) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$. Теперь осталось воспользоваться тем, что из свойств срезки вытекает

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega), \quad \partial^\alpha u_n(x) \to v(x) \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega),$$

[1] Здесь ∂_x^α в обеих частях равенства понимается в классическом смысле.

т. е. мы пришли к определению сильной производной.

Теорема доказана.

§ 3. Слабая производная произведения функций

Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть функции* $u(x), v(x) \in L^p(\Omega)$ *имеют слабые производные* $\partial_x u(x), \partial_x v(x) \in L^p(\Omega)$ *и граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *достаточно гладкая, тогда справедлива следующая формула:* [1])

$$\partial_x(uv) = u\partial_x v + v\partial_x u, \tag{3.1}$$

понимаемая в слабом смысле, т. е. для любой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$\int_\Omega \partial_x(u(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int_\Omega u(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega v(x)\partial_x u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть сначала $v(x) \in \mathbb{C}^1(\Omega)$, а функция $u(x) \in L^p(\Omega)$ имеет слабую производную $\partial_x u(x) \in L^p(\Omega)$. Тогда из теоремы 1 и определения 2 мы получим, что существует такая последовательность $\{u_n(x)\} \in \in \mathbb{C}^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, для которой имеют место следующие предельные свойства:

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{и} \quad \partial_x u_n \to \partial_x u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Тогда справедлива классическая формула дифференцирования произведения двух функций. Действительно,

$$\partial_x(u_n v) = u_n\partial_x v + v\partial_x u_n.$$

Шаг 2. Умножим это равенство на произвольную функцию $\varphi(x) \in \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим равенство

$$\int_\Omega \partial_x(u_n(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int_\Omega u_n(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega v(x)\partial_x u_n(x)\varphi(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Рассмотрим отдельно оба слагаемых в правой части равенства (3.2). Действительно,

[1]) Символом ∂_x мы обозначаем какую–либо классическую или частную слабую производную.

$$\int\limits_{\Omega} u_n(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} [u_n(x) - u(x)]\,\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx + \\ + \int\limits_{\Omega} u(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx := \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

Рассмотрим интеграл I_1. Справедлива следующая оценка:

$$|\mathrm{I}_1| \leqslant \int\limits_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|\,|\partial_x v(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant \\ \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} |\partial_x v(x)\varphi(x)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \leqslant \\ \leqslant [\mathrm{meas}(\Omega)]^{1/p'} \sup_{x\in \mathrm{K}} |\partial_x v(x)\varphi(x)| \left(\int\limits_{\Omega} |u_n(x) - u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

З а м е ч а н и е 1. Отметим здесь следующий тонкий момент. Функция $\partial_x v(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ и, очевидно, функции из этого класса могут быть неограниченными в окрестности границы $\partial\Omega$ области Ω, но функция $\varphi(x)$ имеет компактный носитель $\mathrm{K} \Subset \Omega$, и поэтому $\partial v(x) \in \mathbb{C}_b(\mathrm{K})$.

Теперь осталось заметить, что из сильной сходимости $u_n \to u$ в $L^p(\Omega)$ интеграл в конце цепочки неравенств для $|\mathrm{I}_1|$ стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} u_n(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} u(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx.$$

Аналогичным образом, доказывается, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} v(x)\partial_x u_n(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} v(x)\partial_x u(x)\varphi(x)\,dx.$$

и

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \partial_x(u_n(x)v(x))\varphi(x)\,dx = -\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} u_n(x)v(x)\partial_x\varphi(x)\,dx = \\ = -\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\partial_x\varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, из (3.2) предельным переходом при $n \to +\infty$ мы получим равенство:

$$-\int_\Omega u(x)v(x)\partial_x\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \left[u(x)\partial_x v(x) + v(x)\partial_x u(x)\right]\varphi(x)\,dx,$$

т.е. имеет место равенство в слабом смысле

$$\partial_x(u(x)v(x)) = u(x)\partial_x v(x) + v(x)\partial_x u(x) \tag{3.3}$$

для функции $u(x) \in L^p(\Omega)$, $\partial_x u(x) \in L^p(\Omega)$ и $v(x) \in \mathbb{C}^1(\Omega)$.

Шаг 3. Для того чтобы распространить формулу (3.3) на случай функций $v(x) \in L^p(\Omega)$, $\partial_x v(x) \in L^p(\Omega)$ надо снова взять существующую в силу теоремы 1 последовательность $\{v_n(x)\} \in \mathbb{C}^1(\Omega)L^p(\Omega)$ такую, что

$$v_n \to v \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{и} \quad \partial_x v_n \to \partial_x v \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

И далее воспользоваться той же схемой, что и ранее в доказательстве этой леммы, воспользовавшись полученным равенством (3.3).

Лемма доказана.

§ 4. Слабая производная сложной функции

Лемма 3. *Пусть функция* $f(t) \in \mathbb{C}^1\left(\mathbb{R}^1\right)$ *и* $f'(t) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^1\right)$ *и функция* $u(x) \in L^p(\Omega)$ *и имеет слабую производную* $\partial_x u(x) \in L^p(\Omega)$. *Тогда справедлива следующая формула слабой производной сложной функции*:

$$\partial_x f(u)(x) = f'(u)\partial_x u(x). \tag{4.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{u_m(x)\} \in \mathbb{C}^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ и

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega), \quad \partial_x u_m \to \partial_x u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Тогда для каждой функции $u_m(x) \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ справедлива формула производной (классической) сложной функции

$$\partial_x f(u_m)(x) = f'(u_m)\partial_x u_m(x).$$

Шаг 2. Умножим обе части этого равенства на функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω, тогда получим равенство

$$\int_\Omega \partial_x f(u_m)(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f'(u_m)\partial_x u_m(x)\varphi(x)\,dx.$$

Рассмотрим отдельно эти два интеграла. Имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{\Omega} \partial f(u_m)(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega} f(u_m)(x)\partial_x\varphi(x)\,dx =$$
$$= -\int\limits_{\Omega} \left[f(u_m)(x) - f(u)(x)\right]\partial_x\varphi(x)\,dx - \int\limits_{\Omega} f(u)(x)\partial_x\varphi(x)\,dx. \quad (4.2)$$

Заметим, что справедливо следующее неравенство:

$$|f(u_m)(x) - f(u)(x)| \leqslant c\,|u_m(x) - u(x)|\,,$$

поскольку $f^{'}(t) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^1)$. Поэтому имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_{\Omega} \left[f(u_m)(x) - f(u)(x)\right]\partial\varphi(x)\,dx\right| \leqslant c\int\limits_{\Omega} |u_m(x) - u(x)|\,\partial\varphi_x(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\int\limits_{K} |\partial_x\varphi(x)|^{p^{'}}\,dx\right)^{1/p^{'}} \left(\int\limits_{K} |u_m(x) - u(x)|^{p}\,dx\right)^{1/p} \to 0,$$

при $m \to +\infty$ по построению последовательности $\{u_m\}$, где $\operatorname{supp}\{\varphi\} \subset$ $\subset \mathrm{K}$. Поэтому из (4.2) вытекает, что

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_{\Omega} \partial_x f(u_m)(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega} f(u)(x)\partial_x\varphi(x)\,dx. \quad (4.3)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_{\Omega} f^{'}(u_m)\partial u_m(x)\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \left[f^{'}(u_m)\partial_x u_m(x) - f^{'}(u)\partial_x u(x)\right]\varphi(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} f^{'}(u)\partial_x u(x)\varphi(x)\,dx. \quad (4.4)$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_{\Omega} \left[f^{'}(u_m)\partial_x u_m(x) - f^{'}(u)\partial_x u(x)\right]\varphi(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_1\int\limits_{\mathrm{K}} \left|f^{'}(u_m) - f^{'}(u)\right| |\partial_x u_m(x)|\,dx +$$
$$+ c_1\int\limits_{\mathrm{K}} |\partial_x u_m(x) - \partial_x u(x)| \left|f^{'}(u)(x)\right|\,dx := \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2, \quad (4.5)$$

где
$$c_1 = \sup_{x \in \mathrm{K}} |\varphi(x)|.$$

Шаг 3. Справедлива следующая цепочка неравенств для I_2 :

$$\mathrm{I}_2 \leqslant c_1 \left(\int\limits_{\mathrm{K}} |\partial_x u_m(x) - \partial_x u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int\limits_{\mathrm{K}} \left| f^{'}(u) \right|^{p^{'}} \right)^{1/p^{'}} \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \left(\int\limits_{\mathrm{K}} |\partial_x u_m(x) - \partial_x u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Шаг 4. Теперь заметим, что последовательность $\{u_m\} \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ и, поэтому для любого компакта $\mathrm{K} \Subset \Omega$ имеем $\{u_m\} \in \mathbb{C}^1(\mathrm{K})$ и, в частности, $\partial_x u_m \in L^\infty(\mathrm{K})$. В следующих оценках мы будем использовать этот факт.

Рассмотрим теперь I_1 из (4.5)

$$\mathrm{I}_1 = c_1 \int\limits_{\mathrm{K}} \left| f^{'}(u_m) - f^{'}(u) \right| |\partial_x u_m(x)| \, dx \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \left(\int\limits_{K} |\partial_x u_m|^{p^{'}} \, dx \right)^{1/p^{'}} \left(\int\limits_{\mathrm{K}} \left| f^{'}(u_m) - f^{'}(u) \right|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Поскольку последовательность u_m сильно сходится к u в $L^p(\Omega)$ с $p \in \in [1, +\infty]$, то найдется такая подпоследовательность $\{u_{m_n}\} \subset \{u_m(x)\}$, что $u_{m_n}(x)$ сходится почти всюду к $u(x)$ на Ω.

Шаг 5. Поскольку $f^{'}(t) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{R}^1\right)$, то приходим к выводу, что

$$f^{'}\left(u_{m_n}\right)(x) \to f^{'}(u)(x) \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega.$$

Следовательно, по теореме Лебега приходим к выводу, что

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{I}_1(u_{m_n}) = 0.$$

Таким образом, из (4.4) вытекает, что

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_{\Omega} f^{'}(u_{m_n}) \partial_x u_{m_n}(x) \varphi(x) \, dx = \int\limits_{\Omega} f^{'}(u) \partial_x u(x) \varphi(x) \, dx.$$

Значит, пришли к следующему равенству

$$-\int\limits_{\Omega} f(u)(x) \partial_x \varphi(x) \, dx = \int\limits_{\Omega} f^{'}(u) \partial_x u(x) \varphi(x) \, dx.$$

А отсюда и вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.