А. В. Овчинников

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ

Семестр 1

МОСКВА

2015

Предисловие

Учебное пособие, предлагаемое вниманию читателей, написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения семинарских занятий по дисциплинам «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра» на первом курсе физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Две первые главы не имеют прямого отношения к курсам линейной алгебры и аналитической геометрии, входящим в учебный план студентов-физиков. Однако содержащийся в них материал совершенно необходим для расширения научного кругозора и формирования правильного математического мировоззрения. В главе 1 обсуждаются простейшие понятия логики — высказывания и предикаты, из которых строятся все математические конструкции, и логические операции над ними; рассматриваются основные разновидности теорем: необходимые и достаточные условия (преподаватель должен добиться от студента чёткого понимания этих понятий!). Глава 2 по существу представляет собой глоссарий основных общематематических понятий: множество, соответствие, отношение, отображение. Соответствующие термины используются во всех разделах математики и её приложениях, однако большинство учебников пренебрегает их аккуратным изложением. Автор убеждён, что свободное владение понятиями и фактами, содержащимися в первых двух главах пособия, является непременным условием успешного освоения дальнейших дисциплин физико-математического цикла.

С третьей главы начинается систематическое изложение материала, входящего в стандартный курс алгебры и геометрии для физиков, в условиях жёсткого цейтнота, вызванного уменьшением количества аудиторных часов в связи с переходом высшей школы на компетентностную модель образования, в которой практика и самостоятельная работа объявлены доминантой учебного процесса. Назначение данного пособия — облегчить самостоятельную работу студентов, научить правильно её планировать, а также помочь преподавателям, ведущим семинарские занятия.

В главах 3 и 4 изучаются комплексные числа и многочлены; эти темы, некогда входившие в школьный курс (общий или факультативный), ныне не известны даже многим выпускникам физико-математических спецшкол. Нет нужды долго говорить о многочисленных приложениях обеих этих тем.

Чтобы сделать изложение геометрических сюжетов, входящих в курс аналитической геометрии и линейной алгебры, возможно более кратким и понятным, а также избежать скучных повторов впоследствии, сначала требуется довольно глубоко разработать необходимый алгебраический аппарат: теорию матриц, определителей и систем линейных уравнений; этим вопросам посвящены главы 5–8. Подробное описание вычислительных алгоритмов подкреплено большим числом детально разобранных примеров; заинтересованный студент легко разберётся в представленном материале.

С главы 9 начинается изложение геометрической части курса в традиционной последовательности: векторная алгебра (глава 9), прямые на плоскости (глава 10), прямые и плоскости в пространстве (глава 11), линии второго порядка (глава 12), преобразования систем координат (глава 13), приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду (глава 14), поверхности второго порядка (глава 15). К сожалению, полностью за рамками курса остаются многие вопросы аффинной геометрии, общая теория линий и поверхностей второго порядка и вся проективная геометрия.

Количество глав пособия — 15 — примерно соответствует количеству недель в осеннем семестре. Поэтому, по мнению автора, оптимальным было бы планирование работы, при котором в течение одной недели изучается одна глава; такая интенсивность работы представляется разумной и необременительной.

Автор полагает, что *достаточным* условием для возможности дальнейшего обучения студента может считаться его способность решить любую задачу из данного компендиума; *необходимым* же условием представляется умение воспроизвести решение любой задачи, разобранной в тексте.

При подборе задач автор использовал известные учебники и задачники по алгебре и аналитической геометрии, однако подавляющее большинство вычислительных задач являются новыми.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность за помощь при работе над книгой А. В. Бадьину, В. В. Колыбасовой, Н. Ч. Крутицкой, Г. Н. Медведеву, С. А. Овчинниковой, В. Ю. Попову, М. Чино, М. А. Чино, Н. Е. Шапкиной, А. А. Широнину, А. А. Шишкину и всем коллегам по кафедре математики физического факультета МГУ, принимавшим участие в аудиторных испытаниях этого пособия.

Автор

Список обозначений

$\mathbb{N}$ множество натуральных чисел: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$;
$\mathbb{N}_0$ множество натуральных чисел с нулём: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$;
$\mathbb{Z}$ множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ множество вещественных (действительных) чисел;
$\mathbb{C}$ множество комплексных чисел;
$\mathbb{K}$ произвольное числовое поле (см. с. 32), в частности, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$;
$\mathbb{K}[x]$ множество всех многочленов от переменной x с коэффициентами из числового поля $\mathbb{K}$;
$\mathbb{K}^n$ множество столбцов высоты n с элементами из числового поля $\mathbb{K}$;
$\mathbb{K}^{n\times m}$ множество матриц размера $n \times m$ (т.е. состоящих из n строк и m столбцов) с элементами из числового поля $\mathbb{K}$.

ГЛАВА 1

Простейшие понятия логики

1. Основные понятия и факты

А. Высказывания и операции над ними. *Высказывание* — это повествовательное предложение, представляющее собой утверждение, которому можно поставить в соответствие одно из двух логических значений: ложь (0) или истина (1). Высказывания будем обозначать прописными латинскими буквами.

Основные логические операции над высказываниями — отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность. Они задаются с помощью *таблиц истинности*.

Отрицание — логическая операция, в результате которой из данного высказывания A получается новое высказывание $\neg A$ («не-A», «неверно, что A», «A не имеет места»). Таблица истинности для операции отрицания:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Конъюнкция — логическая операция, заключающаяся в соединении двух высказываний A и B в новое высказывание $A \wedge B$ («A и B»), которое истинно только в том случае, когда оба высказывания A и B истинны.

Дизъюнкция — логическая операция, заключающаяся в соединении двух высказываний A и B в новое высказывание $A \vee B$ («A или B»), которое ложно только в том случае, когда оба высказывания A и B ложны.

Импликация — логическая операция, заключающаяся в соединении двух высказываний A и B в новое высказывание $A \Rightarrow B$ («если A, то B»), которая ложна лишь в одном случае — когда A истинно, а B ложно. Высказывание A называется *посылкой* высказывания $A \Rightarrow B$, высказывание B — его *заключением. Импликация с ложной посылкой по определению истинна.*

Эквивалентность — логическая операция, заключающаяся в соединении двух высказываний A и B в новое высказывание $A \iff B$ («A тогда и только тогда, когда B», «A эквивалентно B»), которое истинно в том и только том случае, когда высказывания A и B оба истинны или оба ложны.

Таблица истинности для логических операций:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

1.1. Теорема. *Логические операции обладают следующими свойствами:*

(1) *коммутативность*:

$$A \vee B = B \vee A,$$
$$A \wedge B = B \wedge A;$$

(2) *ассоциативность*:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C),$$
$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C);$$

(3) *дистрибутивность*:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C),$$
$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C);$$

(4) *законы поглощения*:

$$A \vee (A \wedge B) = A,$$
$$A \wedge (A \vee B) = A;$$

(5) *идемпотентность*:

$$A \vee A = A, \quad A \wedge A = A;$$

(6) *свойства констант*:

$$A \vee 1 = 1, \qquad A \vee 0 = A,$$
$$A \wedge 1 = A, \qquad A \wedge 0 = 0,$$

(7) *закон исключённого третьего*:

$$A \vee \neg A = 1, \quad A \wedge \neg A = 0;$$

(8) *закон двойного отрицания*:

$$\neg\neg A = A;$$

(9) *законы де Моргана*:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B;$$
$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B;$$

(10) *закон контрапозиции*:

$$(A \Rightarrow B) = (\neg B \Rightarrow \neg A);$$

(11) *соотношения*

$$(A \Rightarrow 1) = 1, \qquad (0 \Rightarrow A) = 1,$$
$$(1 \Rightarrow A) = A, \qquad (A \Rightarrow 0) = \neg A;$$

(12) *соотношения*

$$\neg(A \Rightarrow B) = (A \wedge \neg B); \quad (A \vee B) = (\neg A \Rightarrow B).$$

B. Предикаты и кванторы. *Предикат* — это выражение, содержащее переменные и превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных каких-либо объектов.

Квантор — это логическая операция, которая по предикату $P(x)$ строит высказывание, дающее количественную характеристику области истинности предиката $P(x)$. Наиболее употребительны *квантор общности* $\forall$ и *квантор существования* $\exists$.

1.2. Определение. Пусть $P(x)$ — одноместный предикат, X — область возможных значений переменной x. Обозначим через

$$(\forall x \in X) P(x) \tag{1.1}$$

следующее высказывание: «*для любого* $x \in X$ высказывание $P(x)$ истинно». Символ $\forall$ называется *квантором общности*, а переход от предиката P к высказыванию (1.1) — *навешиванием* на предикат P *квантора общности* по переменной x.

1.3. Определение. Пусть $P(x)$ — одноместный предикат, X — область возможных значений переменной x. Обозначим через

$$(\exists x \in X) P(x) \tag{1.2}$$

следующее высказывание: «*существует* такое $x \in X$, что высказывание $P(x)$ истинно». Символ $\exists$ называется *квантором существования*, а переход от предиката P к высказыванию (1.2) — *навешиванием* на предикат P *квантора существования* по переменной x.

1.4. Теорема. *Справедливы следующие аналоги законов де Моргана*:

$$\neg(\forall x \in X) P(x) \quad \equiv \quad (\exists x \in X) \neg P(x), \tag{1.3}$$
$$\neg(\exists x \in X) P(x) \quad \equiv \quad (\forall x \in X) \neg P(x), \tag{1.4}$$

Правило, выражаемое соотношениями (1.3), (1.4), можно сформулировать следующим образом: *чтобы получить отрицание высказывания, начинающегося с квантора, нужно квантор заменить на двойственный (т.е. квантор общности на квантор существования и наоборот) и перенести знак отрицания за квантор.*

Одноименные кванторы можно переставлять. «Разноименные» кванторы можно переставлять только в одну сторону: утверждение

$$(\exists x)(\forall y) P(x, y) \quad \Rightarrow \quad (\forall y)(\exists x) P(x, y)$$

истинно, а утверждение

$$(\forall y)(\exists x) P(x, y) \quad \Rightarrow \quad (\exists x)(\forall y) P(x, y)$$

ложно. Таким образом, высказывания

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \quad \text{и} \quad (\forall y)(\exists x)P(x,y)$$

не эквивалентны.

C. Теоремы и доказательства. В математике *доказательством* называется цепочка логических умозаключений, показывающая, что при некотором наборе аксиом и правил вывода верно некоторое утверждение. Доказанные утверждения называют *теоремами*; если ни утверждение, ни его отрицание ещё не доказаны, то такое утверждение называют *гипотезой*.

Импликативная теорема имеет вид

$$A \Rightarrow B;$$

высказывание A называют *условием* (*посылкой*) теоремы, B — *заключением*.

Заключение B импликативной теоремы «$A \Rightarrow B$» называется условием, *необходимым* для истинности посылки A. Без выполнения B утверждение A не может быть истинным. Теорема, выражающая необходимое условие, называется *свойством*.

Посылка A теоремы «$A \Rightarrow B$» называется условием, *достаточным* для выполнения заключения B. Если A истинно, то утверждение B заведомо верно. Теорема, выражающая достаточное условие, называется *признаком*.

Теорема вида $A \iff B$, выражающая эквивалентность двух высказываний A и B, т.е. являющаяся одновременно необходимым и достаточным условием, называется *критерием*. Важно понимать, что каждый критерий по существу содержит *два* утверждения $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, каждое из которых доказывается отдельно.

Рассмотрим следующие четыре теоремы, образованные из высказываний A и B:

$$A \Rightarrow B, \tag{1.5}$$

$$B \Rightarrow A, \tag{1.6}$$

$$\neg A \Rightarrow \neg B, \tag{1.7}$$

$$\neg B \Rightarrow \neg A. \tag{1.8}$$

Теоремы (1.5) и (1.6) (и соответственно, теоремы (1.7) и (1.8)) называются *взаимно обратными теоремами*. Теоремы (1.5) и (1.7) (и соответственно, теоремы (1.6) и (1.8)) называются *взаимно противоположными теоремами*. Взаимно обратные теоремы (1.5) и (1.6) почти не зависят друг от друга: истинность одной из них не влечет ни истинности, ни ложности другой, однако *эти теоремы не могут быть одновременно ложными*. Взаимно противоположные теоремы (1.5) и (1.7) связаны аналогично.

В силу закона контрапозиции (см. теорему 1.1(10))

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \quad = \quad (A \Rightarrow B)$$

теорема, противоположная к обратной, равносильна исходной. Метод доказательства, основанный на этом факте («доказательство от противного»), может быть использован в случае, когда теорема, противоположная к обратной, доказывается проще, чем исходная теорема.

2. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое высказывание? Приведите примеры.
2. Сформулируйте определение логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности. Запишите для этих операций таблицы истинности.
3. Сформулируйте и запишите с помощью символов математической логики закон исключённого третьего.
4. Даны высказывания A = «я учусь в университете», B = «я люблю математику». Прочтите следующие символические выражения: (а) $\neg A$; (б) $\neg\neg A$; (в) $A \wedge B$; (г) $A \wedge \neg B$; (д) $\neg A \wedge B$; (е) $\neg A \wedge \neg B$; (ж) $\neg(A \wedge B)$.
5. Даны высказывания A = «этот треугольник равносторонний», B = «этот треугольник равнобедренный». Прочтите следующие символические выражения: (а) $A \vee B$; (б) $A \vee \neg A$; (в) $\neg A \vee B$; (г) $\neg A \vee \neg B$; (д) $\neg(A \vee B)$.
6. Сформулируйте и запишите с помощью символов математической логики закон двойного отрицания.
7. Сформулируйте и запишите с помощью символов математической логики законы де Моргана.
8. Запишите закон контрапозиции.
9. Что такое предикат? Что такое область истинности предиката? Приведите примеры.
10. Что такое квантор общности? Приведите пример его использования.
11. Что такое квантор существования? Приведите пример его использования.
12. Чему эквивалентно высказывание $\neg(\forall x \in X)P(x)$?
13. Чему эквивалентно высказывание $\neg(\exists x \in X)P(x)$?
14. Сформулируйте правило построения отрицания выражения, начинающегося с кванторов. Приведите примеры.
15. Можно ли переставить кванторы в высказывании $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$?
16. Можно ли переставить кванторы в высказывании $(\exists x)(\exists y)P(x, y)$?
17. Можно ли переставить кванторы в высказывании $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$?
18. Можно ли переставить кванторы в высказывании $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$?
19. Что такое теорема? Что такое гипотеза?
20. Что такое необходимое условие? Приведите примеры.
21. Что такое достаточное условие? Приведите примеры.
22. Что такое противоположная теорема?
23. Что такое обратная теорема?
24. Сформулируйте связь между противоположной и обратной теоремами.
25. Что такое «доказательство от противного»?

3. Примеры решения задач

Пример 1.1. Дано высказывание: «Вокруг прямоугольника можно описать окружность». Запишите его в виде импликации $A \Rightarrow B$. Постройте высказывания $B \Rightarrow A$, $\neg A \Rightarrow \neg B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$. Какие из них истинны?

Решение. Введём следующие высказывания:

$$A = \text{«данный четырёхугольник является прямоугольником»},$$
$$B = \text{«вокруг данного четырёхугольника можно описать окружность»}.$$

Тогда $A \Rightarrow B$ — истинное высказывание. Высказывание $B \Rightarrow A$ («если вокруг четырёхугольника можно описать окружность, то он является прямоугольником») ложно (например, окружность можно описать вокруг трапеции).

Высказывание $\neg A \Rightarrow \neg B$ («если четырёхугольник не является прямоугольником, то вокруг него нельзя описать окружность») ложно (см. предыдущий пример).

Высказывание $\neg B \Rightarrow \neg A$ («если вокруг четырёхугольника нельзя описать окружность, то он не является прямоугольником») истинно, поскольку получено из исходного истинного высказывания $A \Rightarrow B$ с помощью контрапозиции.

Пример 1.2. Докажите, что высказывание $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ является истинным независимо от того, истинно или ложно высказывание A.

Решение. Построим таблицу истинности для высказывания $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$:

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Последний столбец показывает, что высказывание $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ истинно при любых A и B.

Пример 1.3. Докажите с помощью таблиц истинности закон контрапозиции.

Решение. Заполним таблицы истинности для высказываний $A \Rightarrow B$ и $\neg B \Rightarrow \neg A$ (во второй из этих таблиц введены вспомогательные столбцы для отрицаний $\neg A$ и $\neg B$):

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

(здесь использованы таблицы истинности для операций отрицания и импликации). Обычно при решении задач составляется единая таблица, содержащая всю необходимую информацию:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

Сравнивая истинностные значения высказываний $A \Rightarrow B$ и $\neg B \Rightarrow \neg A$, видим, что они совпадают при любых истинностных значениях высказываний A и B.

Пример 1.4. Докажите с помощью таблиц истинности закон поглощения $A \vee (A \wedge B) = A$.

Решение. Доказательство сводится к заполнению таблицы истинности

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

(здесь использованы таблицы истинности для операций конъюнкции и дизъюнкции). Сравнивая истинностные значения высказываний A и $A \vee (A \wedge B)$, видим, что они совпадают при любых истинностных значениях высказываний A и B.

Пример 1.5. Рассмотрим следующую теорему: *«Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке»*. Выполните следующие задания:

(a) переформулируйте эту теорему, используя термин «необходимо»;
(b) переформулируйте эту теорему, используя термин «достаточно»;
(c) сформулируйте контрапозицию приведённой теоремы в терминах «если... то...»;
(d) сформулируйте контрапозицию приведённой теоремы, используя термин «необходимо»;
(e) сформулируйте контрапозицию приведённой теоремы, используя термин «достаточно».

Решение. Рассмотрим высказывания

$$A = \text{«функция } f \text{ дифференцируема в точке } x_0\text{»},$$

$$B = \text{«функция } f \text{ непрерывна в точке } x_0\text{»}.$$

Исходная теорема имеет вид $A \Rightarrow B$. Напомним, что в импликации $A \Rightarrow B$ высказывание A называется достаточным для B, а B — необходимым для A.

(a) С использованием термина «необходимо» данная теорема формулируется так: «для того, чтобы функция f была дифференцируема в x_0, необходимо, чтобы она была непрерывна в этой точке». Это условие не является достаточным: существуют непрерывные, но не дифференцируемые функции. Однако дифференцируемости не может быть без непрерывности.

(b) Переформулируем теорему, используя термина «достаточно»: «для того, чтобы функция f была непрерывна в x_0, достаточно, чтобы она была дифференцируема в этой точке». Это условие не является необходимым: существуют не дифференцируемые функции, являющиеся непрерывными.

(c) Контрапозицией импликации $A \Rightarrow B$ является импликация $\neg B \Rightarrow \neg A$. Таким образом, для нашей теоремы получаем: «если функция f не является непрерывной в точке x_0, то она в этой точке не дифференцируема».

(d) Формулировка с помощью термина «необходимо»: «для того, чтобы функция f не была непрерывной в x_0, необходимо, чтобы она не была дифференцируемой в x_0».

(e) Формулировка с помощью термина «достаточно»: «для того, чтобы функция f не была дифференцируемой в x_0, достаточно, чтобы она не была непрерывной в x_0».

4. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Укажите, какие из следующих выражений являются высказываниями, и определите их истинностные значения:

(a) азот — газ;
(b) я учусь в университете;
(c) снег белый;
(d) белый снег;
(e) $x > 0$;
(f) $(x+y)^2$;
(g) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$;
(h) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

1.2. Является ли высказыванием следующее предложение: «*Это предложение ложно.*»?

1.3. Расчлените следующие сложные высказывания на простые и запишите с помощью логической символики:

(a) сегодняшний день солнечный и тёплый;
(b) сегодняшний день солнечный, но не тёплый;
(c) данный четырёхугольник — квадрат или ромб;
(d) Петя и Вася решили задачу;
(e) автором этой книги является Иванов или Петров;
(f) это ни необходимо, ни желательно.

1.4. Пусть A и B — два данных высказывания. С помощью операций $\neg$ и $\wedge$ постройте из A и B такое сложное высказывание C, что

(a) C истинно тогда и только тогда, когда A и B оба истинны;
(b) C истинно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно;
(c) C истинно тогда и только тогда, когда A и B оба ложны;

(d) C ложно тогда и только тогда, когда A и B оба истинны.

1.5. Из простых высказываний A, B, C постройте составное высказывание, которое было бы истинно тогда и только тогда, когда истинна только одна (безразлично какая) из компонент.

1.6. Какие из следующих импликаций истинны:

(a) если $2 \cdot 2 = 4$, то $2 < 3$;
(b) если $2 \cdot 2 = 4$, то $2 > 3$;
(c) если $2 \cdot 2 = 5$, то $2 < 3$;
(d) если $2 \cdot 2 = 5$, то $2 > 3$;
(e) если сегодня понедельник, то завтра вторник;
(f) если сегодня понедельник, то завтра суббота.

1.7. Пусть A и B — два данных высказывания. С помощью операций $\neg$ и $\Rightarrow$ постройте из A и B такое сложное высказывание C, что

(a) C ложно тогда и только тогда, когда A и B оба истинны;
(b) C ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно;
(c) C ложно тогда и только тогда, когда A ложно, а B истинно;
(d) C истинно тогда и только тогда, когда A ложно, а B истинно.

1.8. Запишите с помощью логической символики следующие высказывания и установите их истинностные значения:

(a) для того чтобы треугольник был равносторонним, необходимо, чтобы его углы были равны;
(b) для того чтобы треугольник был равносторонним, достаточно, чтобы его углы были равны;
(c) для того чтобы число делилось на три, необходимо, чтобы оно делилось на шесть;
(d) для того чтобы число делилось на три, достаточно, чтобы оно делилось на шесть.

1.9. Запишите с помощью логической символики следующие высказывания и определите их истинностные значения:

(a) для того чтобы произведение чисел обращалось в нуль, необходимо и достаточно, чтобы один из сомножителей был равен нулю;
(b) сумма чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда все слагаемые делятся на 3;
(c) если четырехугольник является квадратом, то все углы его прямые, и обратно.

Исправьте ложные высказывания так, чтобы получились истинные высказывания.

1.10. Дана теорема: «если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю» (смысл терминов, входящих в эту формулировку, несуществен для решения задачи). Выполните следующие задания:

(a) переформулируйте эту теорему, используя термин «необходимо»;
(b) переформулируйте эту теорему, используя термин «достаточно»;
(c) сформулируйте контрапозицию приведённой теоремы в терминах «если... то...»;

(d) сформулируйте контрапозицию приведённой теоремы, используя термин «необходимо»;
(e) сформулируйте контрапозицию приведённой теоремы, используя термин «достаточно».

1.11. Приведите примеры таких высказываний A и B, чтобы
(a) прямая и обратная импликация их были истинны;
(b) прямая импликация была истинной, а обратная ложной;
(c) прямая импликация была ложной, а обратная истинной.

1.12. Докажите с помощью таблиц истинности закон двойного отрицания и закон исключённого третьего.

1.13. Докажите с помощью таблиц истинности законы де Моргана

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B.$$

1.14. Докажите с помощью таблиц истинности соотношения

$$\neg(A \Rightarrow B) = (A \wedge \neg B), \quad (A \vee B) = (\neg A \Rightarrow B).$$

ГЛАВА 2

Множества и отображения

1. Основные понятия и факты

А. Множества. В теории множеств имеется два неопределяемых понятия — *множество* и *элемент*, и одно отношение между этими понятиями — *отношение принадлежности*, выражаемое словами «элемент принадлежит множеству» или «множество содержит элемент». Множества обычно обозначают прописными буквами A, B, …, X, Y, …, элементы — строчными буквами a, b, …, x, y, …. Если элемент a принадлежит множеству A, пишем $a \in A$ ($A \ni a$), а если не принадлежит — то $a \notin A$ ($A \not\ni a$).

Запись $A = \{a, b, c, d\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c, d, а запись $A = \{a \mid P(a)\}$ — что множество A состоит из всех элементов, обладающих свойством $P(a)$ (*характеристическим свойством*); например, $[-2, 2] = \{x \mid x^2 \leqslant 4\}$. Ясно, что характеристическое свойство элементов множества представляет собой некоторый предикат.

Пустое множество $\varnothing$ не содержит элементов.

Множества A и B называются *равными* (запись $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество B называется *подмножеством* множества A (запись $B \subseteq A$ или $A \supseteq B$), если каждый элемент B является также элементом A:

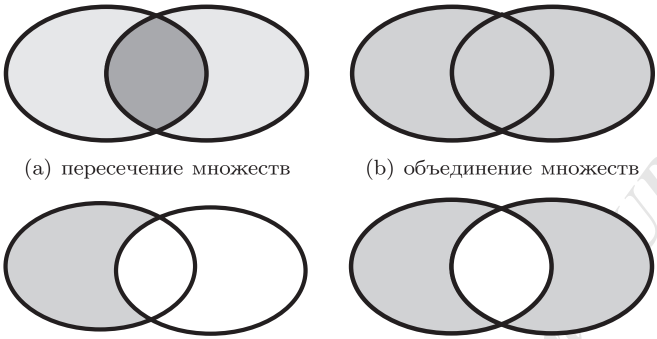
$$(B \subseteq A) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\forall x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Отношение между множествами, выражаемое словами «B является подмножеством A», называется *отношением включения*. Множество всех подмножеств данного множества A обозначается $\mathcal{P}(A)$ или 2^A.

По определению, $\varnothing \subseteq A$ для любого множества A. Множества A и $\varnothing$ называются *несобственными подмножествами* множества A. Если же $B \subset A$ и существует такой элемент $a \in A$, что $a \notin B$, то множество B называется *собственным подмножеством* множества A; этот факт обозначается $B \subset A$.

В. Операции над множествами. *Пересечением* $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые одновременно принадлежат как множеству A, так и множеству B:

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$



(a) пересечение множеств (b) объединение множеств

(c) разность множеств (d) симметрическая разность множеств

Рис. 2.1. Диаграммы Эйлера, иллюстрирующие основные операции над множествами

Пустое множество является подмножеством самого себя, но при этом само с собой не пересекается: $\varnothing \subseteq \varnothing$, $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$.

Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат либо множеству A, либо множеству B, либо обоим этим множествам:

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B:

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Симметрической разностью $A \triangle B$ множеств A и B называется множество

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=\!=} (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Дополнением множества A называется множество A', состоящее из всех элементов, не принадлежащих A. Часто бывает удобно считать все множества, участвующие в некотором рассуждении, подмножествами некоторого множества U, называемого *универсальным множеством* (*универсумом*); в этом случае дополнение A' представляет собой разность $U \setminus A$. Дополнение множества A обозначают также $\overline{A}$, $\complement A$.

Для наглядного изображения множеств и отношений между ними используются диаграммы Эйлера—Венна (см. рис. 2.1).

Будем говорить, что два множества A и B *находятся в общем положении*, если существуют такие элементы a, b, c, что $a \in A$, $a \notin B$, $b \in B$, $b \notin A$, $c \in A$, $c \in B$. Два множества в общем положении изображены на рис. 2.2, где символ a, например, обозначает список всех элементов, содержащихся в множестве A, но не содержащихся в множестве B и т. д.

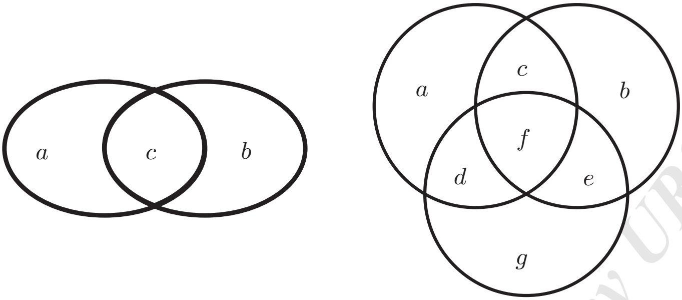


Рис. 2.2. Множества в общем положении

Аналогично вводится понятие трёх множеств в общем положении (см. рис. 2.2).

Пусть $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — некоторая система множеств. Пересечение и объединение этих множеств определяются и обозначаются следующим образом:

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid \forall \alpha \in \mathfrak{A} : x \in A_\alpha\},$$

$$\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid \exists \alpha \in \mathfrak{A} : x \in A_\alpha\}.$$

Используются также обозначения $\bigcap\limits_{k=m}^{n} A_k$, $\bigcup\limits_{k=m}^{n} A_k$ и им подобные.

2.1. Теорема. *Операции над множествами обладают следующими свойствами:*

(1) *коммутативность:*

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A;$$

(2) *ассоциативность:*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

(3) *взаимная дистрибутивность:*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

(4) *законы поглощения:*

$$(A \cap B) \cup B = B, \quad (A \cup B) \cap B = B;$$

(5) *законы дополнительности:*

$$A \cap A' = \varnothing, \quad A \cup A' = U;$$

(6) $A \setminus B = A \cap B'$;

(7) $\varnothing' = U$; $U' = \varnothing$;
(8) *законы де Моргана*:

$$(A \cap B)' = A' \cup B', \quad (A \cup B)' = A' \cap B'. \tag{2.1}$$

Декартовым (*прямым*) *произведением* $A \times B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Декартово произведение нескольких множеств $A_1, \ldots, A_n$ — это множество всех упорядоченных последовательностей, образованных элементами множеств $A_1, \ldots, A_n$:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Декартова (*прямая*) *степень* множества A определяется соотношениями

$$A^1 = A, \quad A^{n+1} = A \times A^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

C. Соответствия и отношения. *Соответствием* R, заданным на упорядоченной паре множеств A и B, называется любое подмножество R декартова произведения этих множеств $A \times B$. Если $(a, b) \in R$, то говорят, что элементы $a \in A$ и $b \in B$ находятся в рассматриваемом соответствии R. Вместо записи $(a, b) \in R$ обычно используют *инфиксную*[1] запись: $a\,R\,b$.

Для соответствия $R \subseteq A \times B$ введём следующие термины:

(i) *область отправления* — множество A;
(ii) *область прибытия* — множество B;
(iii) *область определения* $\operatorname{Dom} R$ — множество всех *первых* элементов пар из R:
$$\operatorname{Dom} R = \{a \mid \exists b : (a, b) \in R\};$$
(iv) *область значений* $\operatorname{Im} R$ — множество всех *вторых* элементов пар из R:
$$\operatorname{Im} R = \{b \mid \exists a : (a, b) \in R\}.$$

В случае конечных множеств A и B соответствие $R \subseteq A \times B$ удобно иллюстрировать с помощью графика: элементы множеств A и B изображаются точками плоскости; точки $a \in A$ и $b \in B$ соединяются стрелкой, если $a\,R\,b$ (см. рис. 2.3).

Выделяются следующие важные типы соответствий.

Соответствие $R \subseteq A \times B$ называется

(i) *всюду определённым*, если область определения совпадает с областью отправления: $\operatorname{Dom} R = A$; на графике из каждой точки области отправления исходит хотя бы одна стрелка (см. рис. 3(a));
(ii) *сюръективным*, если область значений совпадает с областью прибытия: $\operatorname{Im} R = B$; на графике в каждую точку области прибытия приходит хотя бы одна стрелка (см. рис. 3(b));

[1] Т.е. запись, при котором знак соответствия R ставится *между* символами элементов a и b.

(iii) *функциональным*, если в нём нет пар с одинаковыми первыми и различными вторыми компонентами, т.е.

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : b_1 \neq b_2 \implies a_1 \neq a_2$$

или, по контрапозиции,

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : a_1 = a_2 \implies b_1 = b_2;$$

на графике из каждой точки области отправления исходит не более одной стрелки, т.е. запрещены ситуации вида $\bullet\begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix}$ (см. рис. 3(c));

(iv) *инъективным*, если в нём нет пар с различными первыми и одинаковыми вторыми компонентами, т.е.

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : a_1 \neq a_2 \implies b_1 \neq b_2$$

или, по контрапозиции,

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R : b_1 = b_2 \implies a_1 = a_2;$$

на графике в каждую точку области прибытия приходит не более одной стрелки, т.е. запрещены ситуации вида $\begin{smallmatrix}\searrow\\ \nearrow\end{smallmatrix}\bullet$ (см. рис. 3(d));

(v) *взаимно однозначным соответствием*, или *биективным соответствием*, или *биекцией* между множествами A и B если оно всюду определено, функционально, сюръективно и инъективно.

Неформально биекция (взаимно однозначное соответствие) между множествами A и B может быть описана следующим образом: *каждому* элементу множества A (определённость всюду) поставлен в соответствие *один* элемент множества B (функциональность), причём *разным* элементам множества A соответствуют *разные* элементы множества B (инъективность) и *каждый* элемент множества B соответствует *хотя бы* одному элементу множества A (сюръективность).

Соответствия $R \subseteq A \times A$ называют *отношениями* на множестве A. Примерами отношений на множестве вещественных чисел могут служить отношения $=$, $>$, $\geqslant$.

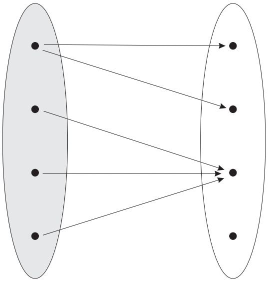
D. Отображения. Понятие отображения играет в математике центральную роль. Термины «отображение», «функция», «функционал», «оператор», «преобразование» являются синонимами; их употребление определяется лишь традицией, сложившейся в разных разделах математики.

Пусть f — соответствие, определённое на множествах A и Y, т.е. подмножество декартова произведения $A \times Y$, обладающее свойством функциональности: в нём нет пар с одинаковыми первыми и разными вторыми компонентами, т.е.

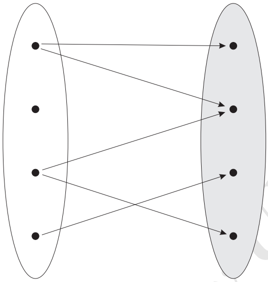
$$\forall (a_1, y_1), (a_2, y_2) \in f \colon y_1 \neq y_2 \implies a_1 \neq a_2.$$

Пусть X — область определения соответствия f, т.е. множество

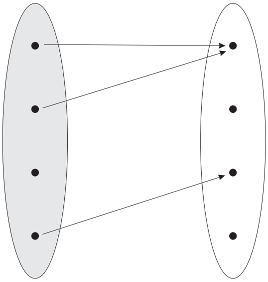
$$X = \operatorname{Dom} f \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \in A \mid \exists y \colon (x, y) \in f\}.$$



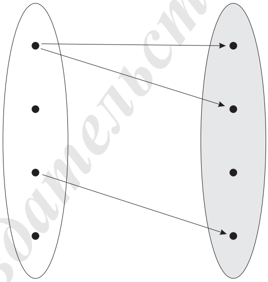
(a) всюду определённое



(b) сюръективное



(c) функциональное



(d) инъективное

Рис. 2.3. Типы соответствий

Тогда упорядоченная тройка (f, X, Y) называется *отображением*, определённым ***на*** множестве X и принимающим значения ***в*** множестве Y.[1]

Приведённое определение согласуется с представлением о функции, введённом в школьном курсе, как о правиле, посредством которого каждому элементу одного множества ставится в соответствие единственный элемент другого множества.

С понятием отображения связаны следующие термины и обозначения:

(1) если $(x, y) \in f$, то говорят, что y — *значение* отображения f на элементе x (в точке x), или y — *образ элемента* x при отображении f, и используют записи $y = f(x)$, $f\colon x \mapsto y$ и $x \xmapsto{f} y$; говорят также, что отображение f переводит (преобразует, превращает; функция f отображает) элемент x в элемент y;[2]

[1] Предлоги «на» и «в» в этом определении употребляются не произвольно, а играют самостоятельную роль, имеют терминологическое значение.

[2] Символ $f(x)$ обозначает *значение отображения на элементе* x; отображением является именно f, а не $f(x)$. Выражение «функция $y = f(x)$» некорректно: оно *задаёт* функцию, но *не является* ею. Однако во многих разделах математики часто обозначают через $f(x)$ как саму функцию, так и выражение, её задающее. Такое соглашение является в большинстве случаев удобным и вполне оправданным.

(2) *образ множества* $C \subseteq A$ при отображении f — это множество

$$f(C) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{f(c) \mid c \in C\} = \{y \in Y \mid \exists c \in C\colon (c, y) \in f\};$$

(3) X — *область определения* отображения f; говорят, что отображение f определено ***на*** X;
(4) A — *область отправления*[1] отображения f; говорят, что отображение f определено ***в*** A;
(5) Y — *область прибытия* отображения f; говорят, что отображение f принимает значения ***в*** множестве Y;
(6) $\operatorname{Im} f \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{y \in Y \mid \exists x\colon y = f(x)\} \subseteq Y$ — *область значений* отображения f; говорят, что отображение f принимает значения ***на*** множестве $\operatorname{Im} f$;
(7) записи $f\colon X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$ означают, что f — отображение с *областью определения* X и *областью прибытия* Y;
(8) отображение $f\colon X \to X$ часто называют (особенно в геометрии) *преобразованием* множества X;
(9) *прообраз элемента* $y \in Y$ — это множество

$$f^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{x \in X \mid f(x) = y\};$$

символ $f^{-1}(y)$ не следует ассоциировать с обратным отображением (см. ниже), которое может и не существовать;
(10) *прообраз подмножества* $B \subseteq Y$ — это множество

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(y).$$

Очевидно, если $y \in Y \setminus \operatorname{Im} f$, то $f^{-1}(y)$ не существует или, эквивалентно, $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$;
(11) множество всех отображений $f\colon X \to Y$ часто обозначается символом Y^X.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется

(1) *сюръективным* (сюръекцией, отображением «на»[2]), если $\operatorname{Im} f = Y$;
(2) *инъективным* (инъекцией), если из неравенства $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$ или, по контрапозиции, из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$;
(3) *биективным* (взаимно однозначным, биекцией), если оно одновременно сюръективно и инъективно.

Два отображения f и g называются *равными*, если их соответствующие области совпадают: $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{g} Y$, причём $f(x) = g(x)$ для любого $x \in X$.

[1] Понятие области отправления используется редко.
[2] Отображения, не являющиеся сюръективными, называют отображениями «в».

Композицией (или *суперпозицией*) отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ называется отображение $g \circ f\colon X \to Z$, определённое условием

$$(\forall x \in X)\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

(правее пишется то отображение, которое применяется первым). То же самое наглядно изображается при помощи диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Про эту диаграмму говорят, что она *коммутативна*, т.е. результат перехода от X к Z не зависит от того, сделаем мы это непосредственно при помощи $g \circ f$ или воспользуемся промежуточным этапом Y.

2.2. Теорема. *Композиция отображений ассоциативна, т.е. для отображений $f\colon X \to Y$, $g\colon y \to Z$, $h\colon Z \to W$ имеет место соотношение*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

что позволяет не ставить скобки и писать $h \circ g \circ f$.

Тождественным отображением на множестве X называется отображение

$$\mathrm{id}_X\colon X \to X, \quad x \mapsto x.$$

Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ — отображения. Если

$$g \circ f = \mathrm{id}_X,$$

то отображение g называется *левым обратным* для f, а f — *правым обратным* для g.

Если

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{и} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y, \tag{2.2}$$

то отображение g называется *двусторонним обратным* (или просто *обратным*) к отображению f и обозначается f^{-1}. Таким образом,

$$f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x.$$

Отображения f и f^{-1} называют *взаимно обратными.*

Обратное отображение обозначается тем же символом f^{-1}, что и операция взятия прообраза; следует избегать смешения этих понятий: прообраз элемента (или множества) существует даже в том случае, когда отображение не имеет обратного.

2.3. Теорема. *Если для отображения существует (двустороннее) обратное, то оно единственно.*

2.4. Теорема. *Отображение $f\colon X \to Y$ имеет обратное тогда и только тогда, когда оно биективно.*

2.5. Предложение.

1. *Если отображение $f\colon X \to Y$ биективно, то $f^{-1}\colon Y \to X$ также биективно, причём*
$$(f^{-1})^{-1} = f. \tag{2.3}$$
2. *Если $f\colon X \to Y$, $h\colon Y \to Z$ — биективные отображения, то их композиция $h \circ f\colon X \to Z$ также биективна, причём*
$$(h \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}. \tag{2.4}$$

E. Отношение эквивалентности. *Отношением* R на множестве X называется подмножество R в $X^2 \equiv X \times X$; если элемент (x, y) из X^2 принадлежит R, то говорят, что *элементы x и y множества X находятся в отношении* R и обозначают этот факт $x * y$, где $*$ — специальный символ, выбранный в качестве знака рассматриваемого отношения. Примерами отношений могут служить следующие отношения на множестве вещественных чисел: $=$, $>$, $\geqslant$ и т. п.

Отношение $*$ на множестве X называется

(i) *рефлексивным*, если для любого $x \in X$ имеем $x * x$;
(ii) *симметричным*, если для любых $x, y \in X$ из $x * y$ следует $y * x$;
(iii) *транзитивным*, если для любых $x, y, z \in X$ из $x * y$ и $y * z$ следует $x * z$.

Отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называется *отношением эквивалентности*.

Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$. *Классом эквивалентности* $[x]$ элемента x называется множество всех элементов, эквивалентных элементу x:
$$[x] \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

2.6. Теорема. *Любое отношение эквивалентности $\sim$ порождает разбиение множества A на непересекающиеся классы эквивалентности своих элементов:*
$$X = \bigcup_{a \in A} [a].$$

Множество
$$X/\!\sim \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{[a] \mid a \in A\},$$
элементами которого являются классы эквивалентности $[x]$ относительно $\sim$, называется *фактор-множеством множества X по отношению $\sim$*.

F. Конечные и бесконечные множества. Два множества A и B называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Множество называется *бесконечным*, если оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству. В противном случае множество называется конечным.

Каждое конечное множество A равномощно некоторому множеству натуральных чисел вида $\{1, 2, \ldots, n\}$; в этом случае n называется *числом элементов* множества A.

Бесконечное множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$; в противном случае бесконечное множество называется *несчётным*.

2.7. Теорема. *Множества $\mathbb{Z}$ целых чисел и $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счётны. Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел несчётно.*

2. Контрольные вопросы и задания

1. Составьте список элементов множества, заданного характеристическим свойством:
   (a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$; (b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x| < 3\}$.
2. Пусть A, B — заданные точки плоскости (пространства). Опишите следующие множества точек плоскости (пространства):
   (a) $A = \{M \mid AM = 3\}$; (b) $B = \{M \mid AM = BM\}$.
3. Какая разница между записями $A \in B$ и $A \subseteq B$?
4. Равны ли множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{1, \{2, 3\}\}$?
5. Верно ли, что $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 3\}\}$? Верно ли, что $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 3\}\}$?
6. Верно ли, что $\{1, 3\} \in \{1, 2, \{1, 3\}\}$? Верно ли, что $\{1, 3\} \subset \{1, 2, \{1, 3\}\}$?
7. Является ли множество $\{0\}$ пустым?
8. Приведите пример таких A и B, что: (a) высказывание $A \in B$ истинно, $A \subset B$ ложно; (b) $A \in B$ ложно, $A \subset B$ истинно; (c) оба высказывания $A \in B$ и $A \subset B$ истинны.
9. Приведите пример таких A, B, C, что $A \in B$, $B \in C$, $A \subset C$.
10. Приведите пример таких A, B, C, что $A \in B$, $B \in C$, $A \notin C$.
11. Для каждой пары множеств из приведённого списка укажите, является ли одно из них подмножеством другого: $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{\{1\}, 2, 3\}$, $E = \{\{1, 2\}, 3\}$.
12. Найдите пересечение, объединение, разность и симметрическую разность множеств A и B, если (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; (b) $A = (-4; 2]$, $B = [-2; 4)$.
13. Множество A состоит из чётных натуральных чисел, множество B — из натуральных чисел, делящихся на 3, множество C — из натуральных чисел, делящихся на 12. Изобразите множества с помощью диаграммы Эйлера.
14. Дано множество $A = \{1, 2, 3\}$. Перечислите все элементы множества $A \times A$.
15. Даны множества $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$. Перечислите все элементы множеств $A \times B$ и $B \times A$. Верно ли, что $A \times B = B \times A$?
16. Что такое соответствие? Приведите примеры.
17. Сформулируйте определения области отправления, области прибытия, области определения и области значений соответствия.
18. Сформулируйте определения инъективного, сюръективного, всюду определённого, функционального соответствия. Проиллюстрируйте эти понятия графически.
19. Сформулируйте определение биективного (взаимно однозначного) соответствия. Приведите примеры.
20. Сформулируйте определение отображения, его области отправления, области прибытия, области определения и области значений.

21. Объясните следующие термины: образ элемента, образ множества, прообраз элемента, прообраз множества.
22. Сформулируйте определения левого обратного, правого обратного, обратного отображения. Приведите примеры.
23. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования обратного отображения.
24. Что такое отношение на множестве? Приведите примеры.
25. Что такое рефлексивное отношение? Приведите примеры рефлексивных и нерефлексивных отношений.
26. Что такое симметричное отношение? Приведите примеры симметричных и несимметричных отношений.
27. Что такое транзитивное отношение? Приведите примеры транзитивных и нетранзитивных отношений.
28. Рассмотрим отношение A ⚭ B на множестве людей, заданное следующим образом: A ⚭ B в том и только том случае, если A и B — супруги или были супругами в прошлом. Является ли это отношение рефлексивным? симметричным? транзитивным?
29. Что такое отношение эквивалентности?
30. Что такое класс эквивалентности элемента?
31. Сформулируйте теорему о разбиении множества на классы эквивалентных элементов.
32. Что такое фактор-множество?
33. На множестве всех многоугольников зададим отношение $\simeq$ следующим образом: $A \simeq B$ в том и только том случае, когда многоугольники A и B имеют одинаковое число сторон. Является ли это отношение отношением эквивалентности? Если является, опишите классы эквивалентности и фактор-множество.
34. Что такое равномощные множества?
35. Что такое счётное множество?
36. Что такое несчётное множество?

3. Примеры решения задач

Пример 2.1. Пусть A_k — множество всех точек плоскости, лежащих внутри круга радиуса 2^k с центром в фиксированной точке O, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите $\bigcap\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$ и $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$.

Решение. Множество $\bigcap\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$ содержит единственную точку — общий центр O рассматриваемых кругов, поскольку для каждой точки $A \neq O$ найдётся круг, не содержащий её (а именно, любой круг радиуса $< AO$).

Множество $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$ совпадает со всей плоскостью, поскольку для каждой точки B плоскости найдётся круг, содержащий эту точку (а именно, любой круг радиуса $> BO$).

Пример 2.2. Докажите равенство
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

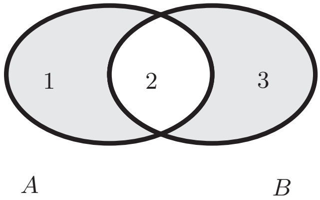


Рис. 2.4. К примеру 2.2

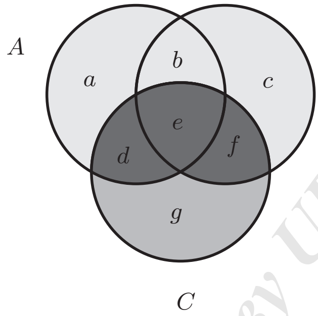


Рис. 2.5. К примеру 2.3

Решение. Рассмотрим два множества A и B в общем положении (см. рис. 2.4); $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, где символы 1, 2, 3 означают соответствующие списки элементов (например 1 — список элементов, лежащих в A, но не лежащих в B и т. п.). По определению

$$A \triangle B = (\underbrace{A \cup B}_{=\{1,2,3\}}) \setminus (\underbrace{A \cap B}_{=\{2\}}) = \{1, 3\}.$$

Далее,

$$\underbrace{(A \setminus B)}_{=\{1\}} \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{=\{3\}} = \{1, 3\},$$

что совпадает с $A \triangle B$.

Пример 2.3. Докажите равенство

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Решение. Рассмотрим три множества A, B, C в общем положении (см. рис. 2.5):

$$A = \{a, b, d, e\}, \quad B = \{b, c, e, f\}, \quad C = \{d, e, f, g\}.$$

Имеем:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad (A \cup B) \cap C = \{d, e, f\},$$
$$A \cap C = \{d, e\}, \quad B \cap C = \{e, f\}, (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{d, e, f\},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.4. Группе студентов был задан вопрос о том, какими иностранными языками они владеют. Выяснилось, что один человек владеет английским, немецким и французским, двое — английским и немецким, трое — английским и французским, четверо — немецким и французским, пятеро — только английским, шестеро — только немецким, семеро — только французским и восемь человек не владеют ни одним из этих языков. Сколько студентов приняло участие в опросе?

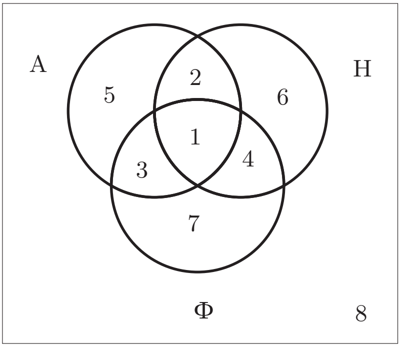


Рис. 2.6. К примеру 2.4

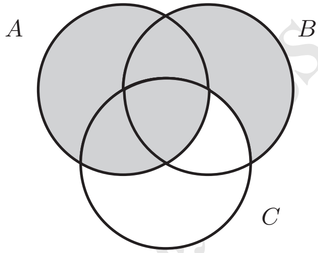


Рис. 2.7. К примеру 2.5

Решение. Изобразив с помощью диаграммы Эйлера данные задачи (см. рис. 2.6), с помощью прямого подсчёта убеждаемся, что в опросе приняло участие 36 человек.

Пример 2.5. Изобразите на диаграмме Эйлера множество $A \cup (B \setminus C)$.
Решение изображено на рис. 2.7.

Пример 2.6. Отображения $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $h\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ определены одним и тем же правилом $x \mapsto x^2$. Совпадают эти отображения или различны?
Решение. Все эти отображения различны:
(a) f не является ни сюръективным ($\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_{\geqslant 0}$), ни инъективным (числа x и $-x$ имеют один и тот же образ);
(b) g сюръективно, но не является инъективным;
(c) h биективно.

Пример 2.7. Приведите пример некоммутирующих отображений, т.е. таких, что $g \circ f \neq f \circ g$.
Решение. Числовые функций $f\colon x \mapsto x^2$ и $g\colon x \mapsto \sin x$ не коммутируют:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(x^2), \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin x)^2.$$

Пример 2.8. Рассмотрим функции

$$f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}, \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ x \mapsto x^2.$$

Докажите, что они не являются взаимно обратными. Постройте взаимно обратные функции, заданные теми же правилами, что и данные функции.
Решение. Рассмотрим композицию $g \circ f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Так как

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x \iff (g \circ f) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}},$$

то функция g является *левой обратной* для f, а функция f — *правой обратной* для $g(x)$. Однако g не является *правой обратной* для f, а функция f — *левой обратной* для $g(x)$, поскольку композиция $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не является тождественной функцией на $\mathbb{R}$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\,.$$

Поэтому функции f и g взаимно обратными *не являются.*

Рассмотрим функции

$$F\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ x \mapsto \sqrt{x}, \qquad G\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ x \mapsto x^2;$$

для них имеем

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = G(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x,$$
$$(F \circ G)(x) = F(G(x)) = F(x^2) = \sqrt{x^2} = x.$$

Таким образом, функции F и G являются *взаимно обратными.*

Пример 2.9. Рассмотрим следующие примеры отношений:

(i) отношение равенства $x = y$ на множестве вещественных чисел;
(ii) отношение $x < y$ на множестве вещественных чисел;
(iii) отношение $x \leqslant y$ на множестве вещественных чисел;
(iv) отношение $x \,\vdots\, y$ на множестве целых чисел, выражаемое словами «x без остатка делится на y»;
(v) отношение $a \parallel b$ параллельности прямых;[1]
(vi) отношение подобия треугольников: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$;
(vii) отношение на множестве людей, заданное следующим образом: $A \bowtie B$ тогда и только тогда, когда A и B имеют хотя бы одного общего родителя (т.е. являются братьями или сёстрами или братом и сестрой).

Эти отношения обладают следующими свойствами:

	рефлексивность	симметричность	транзитивность
$x = y$	+	+	+
$x < y$	−	−	+
$x \leqslant y$	+	−	+
$x \,\vdots\, y$	+	−	+
$a \parallel b$	+	+	+
$\triangle ABC \sim \triangle PQR$	+	+	+
$A \bowtie B$	+	+	−

[1] Параллельными прямыми будем называть прямые, лежащие в одной плоскости и либо не имеющие общих точек, либо совпадающие. Преимущества этого определения перед школьным вскоре выяснятся.

4. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Найдите $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, если

$$\text{(a) } A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]; \qquad \text{(b) } A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right);$$

$$\text{(c) } A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]; \qquad \text{(d) } A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right).$$

2.2. Условимся считать треугольником множество всех точек, лежащих на контуре треугольника и внутри его. Найдите $\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{A}} A$ и $\bigcup\limits_{A \in \mathfrak{A}} A$, где

(a) $\mathfrak{A}$ — множество всех треугольников, вписанных в данный круг Ω;
(b) $\mathfrak{A}$ — множество всех правильных треугольников, вписанных в данный круг Ω.

2.3. Докажите или опровергните следующие соотношения:
(a) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$; (b) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

2.4. В группе из 35 спортсменов 24 человека занимаются футболом, 18 волейболом, 12 баскетболом, 10 футболом и волейболом, 8 футболом и баскетболом, 5 волейболом и баскетболом. Сколько человек занимается всеми тремя видами спорта?

2.5. Пусть A, B, C — множества в общем положении. Изобразите на диаграмме Эйлера следующие множества:
(a) $A \cap B \cap C$;
(b) $(A \cap B) \setminus C$;
(c) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$;
(d) $(A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C')$;
(e) $A \setminus (B \cup C) = A \cap B' \cap C'$;
(f) $A \setminus (B \triangle C)$.

2.6. Для каждой диаграммы Эйлера на рис. 2.8 запишите соответствующее множество.

2.7. Рассмотрим функции

$$f\colon \mathbb{R} \to [-1; 1],\ x \mapsto \sin x, \qquad g\colon [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\ x \mapsto \arcsin x.$$

Докажите, что они не являются взаимно обратными. Постройте взаимно обратные функции, заданные теми же правилами, что и данные функции.

2.8. Пусть A — множество всех студентов некоторого учебного заведения. Определим на A следующее отношение $\sim$: $a \sim b$ тогда и только тогда, когда a и b учатся в одной группе. Проверьте, что $\sim$ — отношение эквивалентности на A. Что представляет собой класс эквивалентности элемента a? Что является фактор-множеством $A/\sim$?

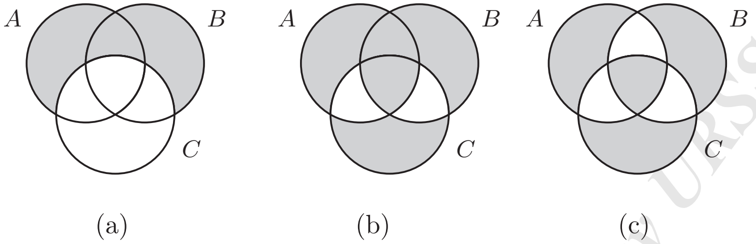


Рис. 2.8. К задаче 2.6

ГЛАВА 3

Комплексные числа

1. Основные понятия и факты

A. Числовое поле. *Числовое поле* $\mathbb{K}$ — это множество чисел, в котором корректно выполняются четыре арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление на ненулевое число. Примерами числовых полей могут служить множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и множество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ и целых чисел $\mathbb{Z}$ не являются числовыми полями, поскольку в них не выполняется операция деления (а в $\mathbb{N}$ ещё и вычитание).

Числовое поле $\mathbb{K}'$ называется *расширением* числового поля $\mathbb{K}$, если $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$; при этом поле $\mathbb{K}$ называется *подполем* поля $\mathbb{K}'$. Например, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, т.е. поле $\mathbb{Q}$ является подполем поля $\mathbb{R}$, а поле $\mathbb{R}$ является расширением поля $\mathbb{Q}$.

Пусть $\mathbb{K}$ — числовое поле. Будем обозначать символом $\mathbb{K}[x]$ множество всех многочленов от переменной x с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$.

Корнем многочлена $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ называется такое число $c \in \mathbb{K}$, что $f(c) = 0$.

Поле $\mathbb{K}$ называется *алгебраически замкнутым*, если любой многочлен из $\mathbb{K}[x]$ имеет корень $c \in \mathbb{K}$.

Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ не является алгебраически замкнутым, так как, например, многочлен $(x^2-2) \in \mathbb{Q}[x]$ не имеет рациональных корней. Если же рассматривать этот многочлен не как элемент множества $\mathbb{Q}[x]$, а как элемент множества $\mathbb{R}[x]$, то он имеет два корня $\pm\sqrt{2}$. Таким образом, переход от поля $\mathbb{Q}$ к его расширению $\mathbb{R}$ позволяет расширить класс многочленов, имеющих корни. Фактически построение указанного расширения осуществляется введением иррациональных чисел.

Однако поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ всё ещё не является алгебраически замкнутым: многочлен $x^2 + 1$ не имеет вещественных корней.

B. Поле комплексных чисел. Можно построить расширение поля вещественных чисел, в котором многочлен $x^2 + 1$ имеет корни. Для этого нужно ввести «число» i, называемое *мнимой единицей* и обладающее свойством $i^2 = -1$; тогда

$$x^2 + 1 = 0 \iff x = \pm i.$$

Рассмотрим далее множество, элементами которого являются объекты вида $x+iy$, а арифметические операции осуществляются так же, как операции над многочленами с учётом соотношения $i^2 = -1$. Такие объекты называются *комплексными числами*. Вещественные числа x и y называются соответственно *вещественной* и *мнимой* частями комплексного числа $z = x + iy$ и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел является полем; чтобы убедиться в этом, нужно проверить, что все четыре арифметические операции выполнимы в этом множестве. Действительно, для любых $x + iy \in \mathbb{C}$ и $u + iv \in \mathbb{C}$ имеем

$$(x + iy) \pm (u + iv) = (x \pm u) + i(y \pm v) \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}(x + iy) \cdot (u + iv) &= xu + xiv + iyu + iyiv = \\ &= (xu - yv) + i(xv + yu) \in \mathbb{C},\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{x + iy}{u + ix} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} &= \frac{(xu + yv) + i(yu - xv)}{u^2 + v^2} = \\ &= \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\frac{yu - xv}{u^2 + v^2} \in \mathbb{C}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

3.1. Теорема (основная теорема алгебры). *Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ является алгебраически замкнутым. Иными словами, любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень.*

3.2. Теорема (свойства арифметических операций над комплексными числами). *Для всех $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ выполняются следующие соотношения:*

(1) *коммутативность сложения*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
(2) *ассоциативность сложения*: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
(3) *коммутативность умножения*: $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
(4) *ассоциативность умножения*: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;
(5) *дистрибутивность*: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Пусть $z = x + iy$. Комплексное число $x - iy$ называется *сопряжённым* к z и обозначается $\bar{z} = x - iy$.

3.3. Теорема. *Операция сопряжения обладает следующими свойствами:*

(1) *инволютивность*: $\bar{\bar{z}} = z$;
(2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
(3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Очевидно, выполняются следующие соотношения:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

C. Существование комплексных чисел. Существование комплексных чисел можно доказать, построив *модель* поля $\mathbb{C}$. Рассмотрим множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ всех упорядоченных пар вещественных чисел и введём на нём операции сложения и умножения формулами, подсказанными соотношениями (3.2) и (3.1):

$$(x, y) \pm (u, v) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (x \pm u,\ y \pm v), \tag{3.4}$$

$$(x, y) \cdot (u, v) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (xu - yv,\ xv + yu). \tag{3.5}$$

Нетрудно проверить, что эти операции обладают всеми свойствами, перечисленными в теореме (3.2).

Имеем очевидные соотношения

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y), \quad (x, y) \cdot (1, 0) = (x, y),$$
$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0), \quad (x, 0) \cdot (u, 0) = (xu, 0).$$

Это позволяет отождествить пару вида $(x, 0)$ с вещественным числом x; в частности, $(0, 0) = 0$ и $(1, 0) = 1$.

Непосредственная проверка доказывает справедливость формулы

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Введём обозначение $i \stackrel{\text{def}}{=\!=} (0, 1)$; тогда

$$i^2 = -1, \quad (0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0) = iy, \quad (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Итак, мы построили модель поля комплексных чисел, состоящую из упорядоченных пар вещественных чисел с заданными операциями (3.4) и (3.5), что доказывает существование поля $\mathbb{C}$. Запись комплексного числа (x, y) в виде $x + iy$ называется *алгебраической формой записи.*

D. Тригонометрическая форма записи.

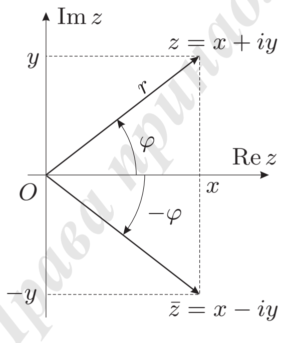


Рис. 3.1.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой (x, y) координатной плоскости Oxy либо радиус-вектором этой точки. Координатная плоскость называется при такой интерпретации *плоскостью комплексных чисел*, ось Ox — *вещественной осью*, ось Oy — *мнимой осью.* Комплексное число $\bar{z}$, сопряжённое к z, геометрически изображается точкой, симметричной точке z относительно вещественной оси (см. рис. 3.1).

Точка $z = (x, y)$ на плоскости может быть задана не только декартовыми, но и *полярными координатами* (r, φ), где r — расстояние от начала координат до точки, φ — ориентированный угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором точки. Очевидно, связь декартовых и полярных координат задаётся формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$
$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Число r называется *модулем* числа z, φ — его *аргументом*:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Аргумент определён с точностью до слагаемого $2\pi n$, поэтому различают

(i) *главное значение аргумента* — число $\arg z \in [0, 2\pi)$ (в некоторых задачах удобнее полагать $\arg z \in (-\pi, \pi]$);

(ii) (многозначный) *аргумент* — множество $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; используются также записи

$$\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}, \quad \operatorname{Arg} z = \varphi \pmod{2\pi},$$

имеющие вполне очевидный смысл.

Комплексное число можно представить в *тригонометрической форме*:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + i\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Тригонометрическую форму удобно использовать при умножении комплексных чисел:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2\Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2\Big) =$$
$$= r_1 r\Big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big).$$

Таким образом[1],

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

E. Формула Эйлера.

3.4. Определение. Показательная функция мнимого аргумента определяется следующим образом:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi;$$

эта формула называется *формулой Эйлера.*

Обратите внимание, что формула Эйлера является *определением* функции $e^{i\varphi}$, а потому не нуждается в доказательстве. Математический анализ доставляет множество веских аргументов в пользу целесообразности такого определения; вот один из них: функция $f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ обладает свойством

$$f(\varphi_1)\cdot f(\varphi_2) = f(\varphi_1+\varphi_2),$$

характерным для показательной функции.

[1]Вторая из этих формул означает, что для любого значения $\varphi \in \operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2)$ найдутся такие $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ и $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$, что $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Комплексное число можно представить в *показательной форме*:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z.$$

Показательная функция комплексного аргумента определяется при помощи формулы Эйлера: если $z = x + iy$, то

$$e^z \overset{\text{def}}{=\!=} e^{x+iy} = e^x\big(\cos y + i\sin y\big).$$

F. Возведение комплексных чисел в целую степень. Формула Муавра. Тригонометрическая и показательная формы записи удобны при возведении комплексных чисел в степень:

$$\Big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\Big]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При $r = 1$ получаем отсюда *формулу Муавра*:

$$\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \tag{3.6}$$

которая полезна при преобразованиях тригонометрических выражений.

G. Извлечение корней. Число w называется *корнем n-й степени из числа z*, если $w^n = z$:

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \Longleftrightarrow \quad w^n = z.$$

Представим числа w, z в показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = Re^{i\Phi}.$$

Наша задача — по данным r, φ найти R, Φ. Имеем:

$$\Big(Re^{i\Phi}\Big)^n = re^{i\varphi} \iff R^n e^{in\Phi} = re^{i\varphi} \iff$$

$$\begin{cases} R^n = r, \\ n\Phi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \iff \begin{cases} R = r^{1/n}, \\ \Phi = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

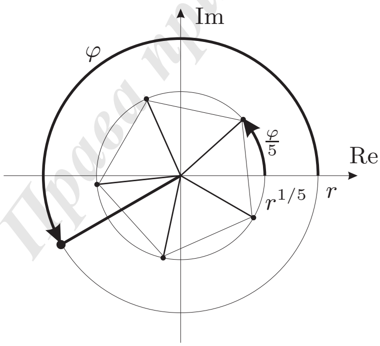


Рис. 3.2.

Таким образом, получается не одно, а несколько значений корня, однако различными будут только те, которые отвечают значениям $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Геометрически эти корни изображаются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r^{1/n}$. На рис. 3.2 приведена иллюстрация, поясняющая извлечение корня 5 степени.

H. Извлечение квадратного корня. Извлечение квадратного корня можно осуществить, не обращаясь к показательной форме. Пусть $\sqrt{a+ib} = x + iy$, где $b \neq 0$. Тогда

$$a + ib = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ \quad 2xy = b. \end{cases}$$

Вещественные решения этой системы дают искомые значения квадратного корня.

I. Тригонометрические функции комплексного аргумента. Из формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

получаем, заменяя φ на $-\varphi$ и учитывая, что косинус — чётная функция, а синус — нечётная:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Складывая или вычитая полученные равенства, находим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Эти формулы позволяют ввести определения синуса и косинуса комплексного аргумента:

$$\cos z \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{3.7}$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

легко проверяется. Все формулы для тригонометрических функций, справедливые для вещественных значений аргумента, остаются верными и для комплексных.

J. Гиперболические функции. Гиперболические функции определяются равенствами, похожими на (3.7):

$$\operatorname{ch} z \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \tag{3.8}$$

Эти функции называются соответственно *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*; в зарубежной литературе их принято обозначать $\cosh z$ и $\sinh z$.

Сравнивая формулы (3.7) и (3.8), находим связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} iz &= \cos z, \qquad & \cos iz &= \operatorname{ch} z, \\ \operatorname{sh} iz &= i\sin z, \qquad & \sin iz &= i\operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

Эти соотношения позволяют получить все соотношения для гиперболических функций из соответствующих соотношений для тригонометрических функций.

2. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое числовое поле? Приведите примеры.
2. Какое поле называется алгебраически замкнутым?
3. Являются ли поля рациональных чисел и вещественных чисел алгебраически замкнутыми? Ответ обоснуйте.
4. Что такое комплексное число? Что такое алгебраическая форма записи комплексных чисел? Приведите примеры.
5. Как определяются арифметические операции над комплексными числами?
6. Как разделить одно комплексное число на другое?
7. Перечислите свойства арифметических операций над комплексными числами.
8. Что такое комплексное сопряжение? Перечислите свойства комплексного сопряжения.
9. Что такое полярная система координат на плоскости? Запишите формулы связи декартовых и полярных координат.
10. Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Приведите примеры.
11. Что такое тригонометрическая форма записи комплексных чисел? Приведите примеры.
12. Докажите, что при модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент — сумме аргументов.
13. Запишите формулу Эйлера.
14. Запишите формулу Муавра.
15. Что называется корнем n-й степени из комплексного числа?
16. Сколько различных значений имеет корень n-й степени из комплексного числа? Какова их геометрическая интерпретация?
17. Опишите алгоритм извлечения корня n-й степени из комплексного числа.
18. Сформулируйте определение гиперболических функций.
19. Запишите формулы связи гиперболических и тригонометрических функций.

3. Примеры решения задач

Пример 3.1. Докажите, что множество $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ всех чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, является числовым полем.

Решение. Требуется проверить, что для любых чисел $(a+b\sqrt{2})$ и $(c+d\sqrt{2})$ их сумма, разность, произведение и частное имеют аналогичную структуру. Имеем:

$$(a+b\sqrt{2}) \pm (c+d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}],$$
$$(a+b\sqrt{2}) \cdot (c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

Для частного проверка несколько сложнее:

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

Пример 3.2. Вычислите значения выражений: (a) $(3+4i)(7-2i)$; (b) $\dfrac{29+22i}{7-2i}$.

Решение:

$$(3+4i)(7-2i) = 3\cdot 7 - 3\cdot 2i + 4i\cdot 7 - 4i\cdot 2i = 29+22i;$$

$$\frac{29+22i}{7-2i} = \frac{(29+22i)(7+2i)}{(7-2i)(7+2i)} =$$

$$= \frac{29\cdot 7 + 29\cdot 2i + 22i\cdot 7 + 22i\cdot 2i}{7^2-(2i)^2} = \frac{159+212i}{53} = 3+4i.$$

Пример 3.3. Запишите в тригонометрической и показательной форме следующие числа: (a) $z_1 = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$; (b) $z_2 = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$; (c) $z_3 = \sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$; (d) $z_4 = -\sin\frac{\pi}{7} - i\cos\frac{\pi}{7}$.

Решение. Для краткости введём обозначения $a = \cos\frac{\pi}{7}$, $b = \sin\frac{\pi}{7}$. Поскольку $a^2+b^2=1$, модули всех чисел z_k, $k=1,2,3,4$, равны 1; найдём их аргументы (см. рис. 3.3).

(a) Точка, изображающая число $z_1 = a - ib$, расположена в IV квадранте, т.е. $\varphi_1 = \arg z_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, и

$$\cos\varphi_1 = \cos\frac{\pi}{7}, \quad \sin\varphi_1 = -\sin\frac{\pi}{7} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{7},$$
$$z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{7}\right).$$

(b) Точка, изображающая число $z_2 = -a+ib$, расположена во II квадранте, т.е. $\varphi_2 = \arg z_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, и

$$\cos\varphi_2 = -\cos\frac{\pi}{7}, \quad \sin\varphi_2 = \sin\frac{\pi}{7} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7},$$
$$z_2 = \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7} = \exp\left(i\frac{6\pi}{7}\right).$$

(c) Точка, изображающая число $z_3 = b + ia$, расположена в I квадранте, т.е. $\varphi_3 = \arg z_3 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и

$$\cos\varphi_3 = \sin\frac{\pi}{7}, \quad \sin\varphi_3 = \cos\frac{\pi}{7} \quad \Rightarrow \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{14},$$
$$z_3 = \cos\frac{5\pi}{14} + i\sin\frac{5\pi}{14} = \exp\left(i\frac{5\pi}{14}\right).$$

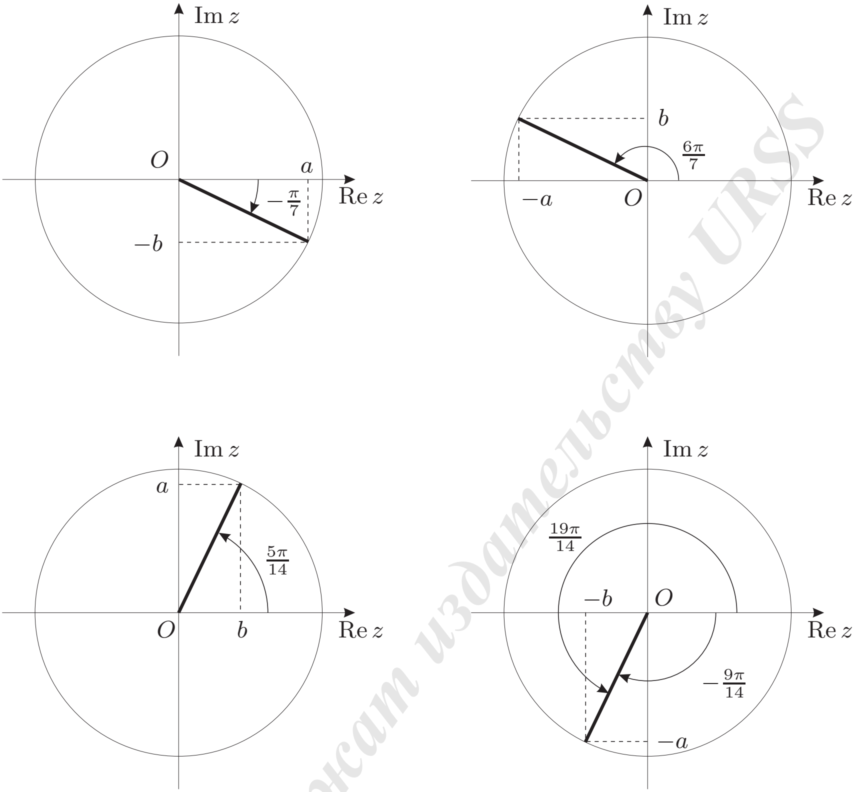


Рис. 3.3. К примеру 3.3

(d) Точка, изображающая число $z_4 = -b - ia$, расположена в III квадранте, т.е. $\varphi_4 = \arg z_4 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, и

$$\cos\varphi_4 = -\sin\frac{\pi}{7}, \quad \sin\varphi_4 = -\cos\frac{\pi}{7} \quad\Rightarrow\quad \varphi_4 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{19\pi}{14},$$
$$z_4 = \cos\frac{19\pi}{14} + i\sin\frac{19\pi}{14} = \exp\left(i\frac{19\pi}{14}\right).$$

Если выбирать главное значение аргумента не в промежутке $[0, 2\pi)$, как это было только что сделано, а в промежутке $(-\pi, \pi]$, то получим

$$\cos\varphi_4 = -\sin\frac{\pi}{7}, \quad \sin\varphi_4 = -\cos\frac{\pi}{7} \quad\Rightarrow\quad \varphi_4 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = -\frac{9\pi}{14},$$
$$z_4 = \cos\left(-\frac{9\pi}{14}\right) + i\sin\left(-\frac{9\pi}{14}\right) = \exp\left(-i\frac{9\pi}{14}\right).$$

Пример 3.4. Вычислите $(1-i)^{35}$.

Решение. Представим число $1-i$ в тригонометрической (показательной) форме:

$$\operatorname{Re}(1-i) = 1, \quad \operatorname{Im}(1-i) = -1,$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4};$$

здесь для $\arg z$ выбран диапазон значений $(-\pi, \pi]$. Имеем:

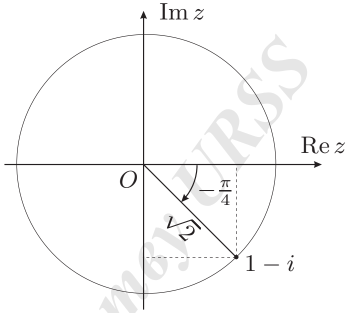


Рис. 3.4. К примеру 3.4

$$(1-i)^{35} = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{35} = 2^{\frac{35}{2}} e^{-i\pi\frac{35}{4}} = 2^{\frac{35}{2}} e^{-i\pi\left(8+\frac{3}{4}\right)} =$$
$$= 2^{\frac{35}{2}} e^{-i\pi\frac{3}{4}} = 2^{\frac{35}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2^{17}(1+i).$$

Пример 3.5. Получите формулы для косинуса и синуса тройного угла при помощи формулы Муавра.

Решение. Запишем формулу Муавра (3.6) для $n = 3$:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Развернём левую часть по формуле бинома Ньютона (см. формулу (4.3), с. 53):

$$\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi \cdot i^2\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части левой и правой частей этого равенства, получаем

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Пример 3.6. Выразите $\cos^5 t$ через тригонометрические функции кратных аргументов.

Решение. Поскольку $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ (см. формулы (3.7)), получаем, применяя формулу бинома Ньютона:

$$\cos^5 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^5 =$$
$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{5it} + 5e^{4it}e^{-it} + 10e^{3it}e^{-2it} + 10e^{2it}e^{-3it} + 5e^{it}e^{-4it} + e^{-5it}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5it} + e^{-5it}}{2} + 5\frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} + 10\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\cos 5t + \frac{5}{16}\cos 3t + \frac{5}{8}\cos t.$$

Пример 3.7. Преобразуйте в произведения следующие суммы:

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos kt = 1 + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt,$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sin kt = \sin t + \sin 2t + \dots + \sin nt.$$

Решение. Рассмотрим выражение $C + iS$:

$$C + iS = \sum_{k=0}^{n} \cos kt + i \sum_{k=0}^{n} \sin kt = \sum_{k=0}^{n} (\cos kt + i \sin kt) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}.$$

Вычислим сумму получившейся геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{ikt}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right)} =$$

$$= e^{i\frac{nt}{2}} \frac{\left(e^{i\frac{n+1}{2}t} - e^{-i\frac{n+1}{2}t}\right)/2i}{\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right)/2i} = e^{i\frac{nt}{2}} \; \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Отделяя в полученном выражении вещественную и мнимую части, приходим к окончательному результату:

$$C = \mathrm{Re}\; e^{i\frac{nt}{2}} \; \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}} = \frac{\cos\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}},$$

$$S = \mathrm{Im}\; e^{i\frac{nt}{2}} \; \frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}} = \frac{\sin\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{nt}{2}}.$$

Пример 3.8. Вычислите (a) $\sqrt{i}$; (b) $\sqrt{3-4i}$.

Решение. (a) Пусть $\sqrt{i} = x + iy$. Возводя в квадрат это равенство, получим $i = x^2 + 2ixy - y^2$, т.е.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 2xy = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{i} = \pm\frac{1+i}{2}.$$

(b) Пусть $\sqrt{3-4i} = x + iy$. Возводя в квадрат это равенство, получим $3 - 4i = x^2 + 2ixy - y^2$, т.е.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \mp 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3-4i} = \pm(2-i).$$

Пример 3.9. Найдите все значения $\sqrt[3]{1}$.
Решение. Очевидно, $|1| = 1$, $\arg 1 = 0$, $\operatorname{Arg} 1 = \{2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, поэтому

$$\sqrt[3]{1} = \left(1 \cdot e^{2i\pi k}\right)^{1/3} = \exp i\frac{2\pi k}{3},$$

где $k = 0, 1, 2$.
При $k = 0$ получаем

$$\left(\sqrt[3]{1}\right)_0 = e^{0i} = 1.$$

При $k = 1$

$$\left(\sqrt[3]{1}\right)_1 = \exp\frac{2\pi i}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При $k = 2$

$$\left(\sqrt[3]{1}\right)_2 = \exp\frac{4\pi i}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

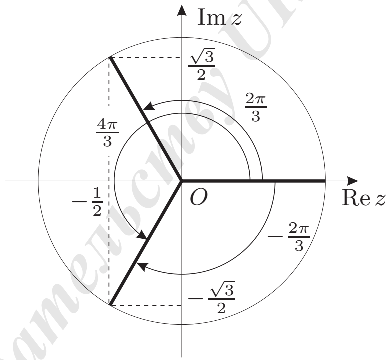


Рис. 3.5. К примеру 3.9

Пример 3.10. Вычислите $\sqrt[3]{-1}$.
Решение. Имеем

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i\pi}} = \exp\left(i\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$. При $k = 0$ получаем

$$\left(\sqrt[3]{-1}\right)_0 = \exp i\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

при $k = 1$

$$\left(\sqrt[3]{-1}\right)_0 = \exp i\pi = -1,$$

при $k = 2$

$$\left(\sqrt[3]{-1}\right)_0 = \exp i\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

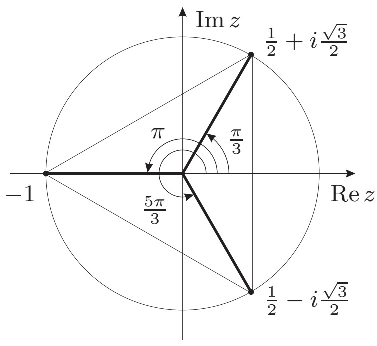


Рис. 3.6. К примеру 3.10

Пример 3.11. Найдите все значения $\sqrt[3]{-i}$.
Решение. Поскольку $|-i| = 1$, $\arg(-i) = 3\pi/2$, имеем:

$$\sqrt[3]{-1} = \left(1 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)^{1/3} = \exp i\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

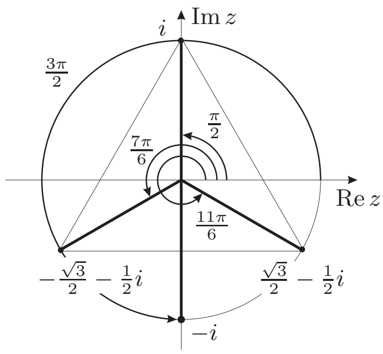


Рис. 3.7. К примеру 3.11

При $k=0$ получаем

$$\left(\sqrt[3]{-i}\right)_0 = \exp\frac{i\pi}{2} = i;$$

при $k=1$

$$\left(\sqrt[3]{-i}\right)_1 = \exp\frac{7i\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$$

при $k=2$

$$\left(\sqrt[3]{-i}\right)_1 = \exp\frac{11i\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Пример 3.12. Найдите все значения $\sqrt[4]{-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

Решение. Так как $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \exp\frac{2i\pi}{3}$ (см. пример 3.9), получаем

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \exp i\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

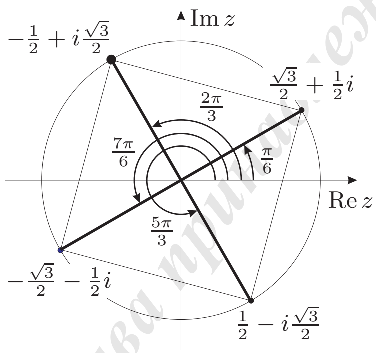


Рис. 3.8. К примеру 3.12

При $k=0$ имеем

$$\left(\sqrt[4]{\exp\frac{2i\pi}{3}}\right)_0 = \exp\frac{i\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

при $k=1$

$$\left(\sqrt[4]{\exp\frac{2i\pi}{3}}\right)_1 = \exp\frac{2i\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

при $k=2$

$$\left(\sqrt[4]{\exp\frac{2i\pi}{3}}\right)_2 = \exp\frac{7i\pi}{6} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

при $k=3$

$$\left(\sqrt[4]{\exp\frac{2i\pi}{3}}\right)_1 = \exp\frac{5i\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 3.13. Докажите тождества:

(a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$

(b) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$

(c) $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x+y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x-y}{2}$;
(d) $\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$,
(e) $\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$.

Решение:

(a) $$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \cos^2 ix - \left(\frac{1}{i}\sin ix\right)^2 = \cos^2 ix + \sin^2 ix = 1;$$

(b) $$\operatorname{ch} 2x = \cos 2ix = \cos^2 ix - \sin^2 ix = \\ = \operatorname{ch}^2 x - (i \sin x)^2 = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

(c) $$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{1}{i}(\sin ix + \sin iy) = \\ = \frac{1}{i} \cdot 2 \sin \frac{i(x+y)}{2} \cos \frac{i(x-y)}{2} = \\ = \frac{2}{i} \cdot i \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2};$$

(d) $$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y;$$

(e) $$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Пример 3.14. Найдите $\cos(i \ln 3)$.
Решение. Имеем

$$\cos(i \ln 3) = \operatorname{ch} \ln 3 = \frac{1}{2}\left(e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}\right) = \frac{5}{3}.$$

Таким образом, значения косинуса (и синуса) комплексного числа могут быть по модулю больше 1.

4. Задачи для самостоятельного решения

3.1. Вычислите:

(a) $(3-i)(2+5i)$; (e) $(1-2i)(2-3i)$;
(b) $(5-2i)(3+i)$; (f) $(1+2i)(1-3i)$;
(c) $(5-2i)(4-i)$; (g) $(5+i)(2-i)$;
(d) $(3+2i)(5-i)$; (h) $(3+5i)(1-i)$.

3.2. Вычислите:

(a) $\dfrac{17-i}{5-2i} + \dfrac{11+13i}{2+5i}$; (d) $\dfrac{4+7i}{1-2i} + \dfrac{7-i}{1-3i}$;
(b) $\dfrac{11-13i}{3+i} + \dfrac{18-13i}{5-2i}$; (e) $\dfrac{7+i}{1+3i} + \dfrac{4+7i}{2-3i}$;
(c) $\dfrac{17+7i}{3+2i} - \dfrac{4-7i}{2+3i}$; (f) $\dfrac{11-3i}{2-i} + \dfrac{17+7i}{3+2i}$.

3.3. Представьте следующие числа в тригонометрической и показательной форме:

(a) $\sin\alpha - i\cos\alpha, \quad \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; (d) $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}$;

(b) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha, \ -\pi < \alpha \leqslant \pi$; (e) $1 - \sin\alpha + i\cos\alpha, \ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

(c) $\dfrac{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\alpha - i\sin\alpha}, \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$; (f) $\dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

3.4. Вычислите:

(a) $\sqrt{8 - 6i}$; (e) $\sqrt{-8 - 6i}$;

(b) $\sqrt{21 - 20i}$; (f) $\sqrt{24 + 10i}$;

(c) $\sqrt{5 + 12i}$; (g) $\sqrt{-16 + 30i}$;

(d) $\sqrt{-3 - 4i}$; (h) $\sqrt{-2i}$

3.5. Решите уравнения:

(a) $z^2 - 4z + 8 = 0$; (c) $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - i = 0$;

(b) $z^2 - 6z + 10 = 0$; (d) $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$.

3.6. Вычислите кубические корни:

(a) $\sqrt[3]{\dfrac{7 - 22i}{3 - 2i} - \dfrac{11 + 17i}{3 + i}}$; (c) $\sqrt[3]{\dfrac{29 - 3i}{3 - 5i} - \dfrac{10 - 5i}{2 + i}}$;

(b) $\sqrt[3]{\dfrac{17 + 11i}{i - 3} - \dfrac{29 + 15i}{1 + 5i}}$; (d) $\sqrt[3]{-46 - 9i}$.

3.7. Вычислите корни четвертой степени:

(a) $\sqrt[4]{\dfrac{5i\sqrt{3} - 19}{1 + i\sqrt{3}} - \dfrac{8 - 11i\sqrt{3}}{2 - i\sqrt{3}}}$; (b) $\sqrt[4]{\dfrac{9 - 13i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} - \dfrac{31 - 10i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}}$.

3.8. Найдите суммы

(a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$; (b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$.

[Указание: Рассмотрите $(1 + i)^n$.]

ГЛАВА 4

Многочлены

1. Основные понятия и факты

А. Многочлены. Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое числовое поле.

Одночленом (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ называется выражение вида ax^k, где $a \in \mathbb{K}$ — *коэффициент* одночлена ($a \neq 0$), x — переменная, которая может принимать значения в $\mathbb{K}$. Число $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ называется *степенью* одночлена.

Многочлен степени n (от одной переменной x) над полем $\mathbb{K}$ — это сумма одночленов:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0 \neq 0$. Если $a_0 = 1$, то многочлен называется *нормированным*. Множество всех многочленов от переменной x над полем $\mathbb{K}$ обозначается $\mathbb{K}[x]$.

Степень многочлена $\deg P(x)$ — это наибольшая из степеней входящих в его состав одночленов. Степень нулевого многочлена (т.е. многочлена, все коэффициенты которого нулевые) считается равной $-\infty$. В дальнейшем при необходимости будем указывать степень многочлена при помощи нижнего индекса: запись $P_n(x)$ обозначает многочлен степени n.

Для суммы и произведения многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ имеют место соотношения

$$\deg\bigl(P(x) + Q(x)\bigr) \leqslant \max\bigl\{\deg P(x), \deg Q(x)\bigr\},$$
$$\deg\bigl(P(x)Q(x)\bigr) = \deg P(x) + \deg Q(x).$$

4.1. Теорема (теорема о равенстве многочленов)**.** *Два многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ и $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$ над числовым полем $\mathbb{K}$ тождественно равны тогда и только тогда, когда они имеют равные коэффициенты при одинаковых степенях переменной*:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots a_n = b_n.$$

В частности, тождественно равными могут быть лишь многочлены равных степеней.

B. Деление многочленов. Множество многочленов не является полем, поскольку в нём не всегда выполнима операция деления.

Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *делится* на многочлен $D(x)$, если существует такой многочлен $Q(x)$, что $P(x) = D(x)Q(x)$; при этом

$Q(x)$ называется *частным* от деления $P(x)$ на $D(x)$:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad P(x) = D(x)Q(x).$$

Ясно, что

$$\deg \frac{P(x)}{D(x)} = \deg P(x) - \deg D(x).$$

Деление многочленов осуществляется алгоритмом «деления уголком».

C. Деление с остатком. Деление многочленов нацело выполнимо не всегда, однако всегда возможно «*деление с остатком*».

4.2. Теорема (о делении многочленов с остатком)**.** *Для любых многочленов $P_n(x)$ и $D_m(x) \neq 0$ существуют такие многочлены $Q_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, что имеет место тождество*

$$P_n(x) = D_m(x)Q_{n-m}(x) + R_k(x), \tag{4.1}$$

причём

$$\deg R_k(x) < \deg D_m(x). \tag{4.2}$$

Многочлены $Q_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, называемые соответственно неполным частным и остатком[1] [*от деления $P_n(x)$ на $D_m(x)$*], *определены единственным образом.*

Если делить многочлен $P_n(x)$ на многочлен первой степени (линейный многочлен) $x - c$, то остаток будет многочленом нулевой степени, т.е. числом:

$$P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x) + R_0.$$

4.3. Теорема (теорема об остатке)**.** *Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $x - c$ равен $P_n(c)$.*

4.4. Следствие (теорема Безу)**.** *Многочлен $P_n(x)$ делится на $x - c$ без остатка тогда и только тогда, когда c — корень многочлена $P_n(x)$, т.е. $P_n(c) = 0$.*

Отсюда вытекает, что многочлен степени n не может иметь более n корней.

D. Схема Горнера. Деление многочлена на двучлен $x - c$ удобно производить с помощью алгоритма, известного под названием *схемы Горнера.*

Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Частное от деления $P_n(x)$ на $x - c$ представляет собой многочлен степени $n - 1$:

$$Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

[1] D — divisor (делитель), Q — quotient (частное), R — remainder (остаток).

а остаток R является числом. Формула деления с остатком (4.1) имеет в нашем случае вид

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ = (x-c)\big(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}\big) + R.$$

Раскрывая скобки в правой части и приводя подобные слагаемые, получим

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ = b_0x^n + (b_1 - cb_0)x^{n-1} + \dots + (b_{n-1} - cb_{n-2})x + (R - cb_{n-1}).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0, \\ a_1 &= b_1 - cb_0, \\ a_2 &= b_2 - cb_1, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= b_{n-1} - cb_{n-2}, \\ a_n &= R - cb_{n-1} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= cb_0 + a_1, \\ b_2 &= cb_1 + a_2, \\ &\dots\dots\dots \\ b_{n-1} &= cb_{n-2} + a_{n-1}, \\ R &= cb_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

Результаты вычислений по этим формулам удобно записывать в таблицу, называемую схемой Горнера:

	a_0	a_1	...	a_k	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	...	$b_k = cb_{k-1} + a_k$	...	b_{n-1}	R

В верхней строке таблицы записаны коэффициенты многочлена $P_n(x)$ в порядке убывания степеней, в нижней — коэффициенты b_i частного $Q_{n-1}(x)$ и остаток R.

Поскольку, согласно теореме Безу, остаток R от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - c$ равен значению $P(c)$, схема Горнера доставляет также удобный способ вычисления значения многочлена в точке.

E. Кратные корни многочлена. Если число c является корнем многочлена $P_n(x)$, т.е. $P_n(c) = 0$, то многочлен $P_n(x)$ может быть записан в виде

$$P_n(x) = (x-c)Q_{n-1}(x).$$

Если при этом число c не является корнем многочлена $Q_{n-1}(x)$, то говорят, что c — *простой корень* многочлена $P_n(x)$.

В противном случае можно записать

$$P_n(x) = (x-c)^pQ_{n-p}(x),$$

где многочлен $Q_{n-p}(c) \neq 0$, т.е. число c не является корнем многочлена $Q_{n-p}(x)$. В этом случае говорят, что число c является *корнем кратности p* многочлена $P_n(x)$.

4.5. Теорема. *Если число c является корнем кратности p многочлена $P(x)$, то оно является корнем кратности $p - 1$ его производной $P'(x)$.*

F. Многочлены над полем комплексных чисел.

4.6. Теорема (основная теорема алгебры; см. с. 33). *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ имеет по крайней мере один комплексный корень. Иными словами, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ является алгебраически замкнутым.*

4.7. Следствие. *Любой многочлен $P_n(x) \in \mathbb{C}[x]$ имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Таким образом, каждый многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени n может быть разложен в произведение линейных множителей:

$$P_n(x) = a_0(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

причём среди корней $c_1, \ldots, c_n$ могут быть и совпадающие.

G. Неприводимые многочлены. Многочлен $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ называется *неприводимым* (над полем $\mathbb{K}$), если он не может быть разложен в произведение двух многочленов меньшей ненулевой степени.

4.8. Теорема. *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ ненулевой степени можно разложить в произведение неприводимых многочленов*[1]:

$$P(x) = Q_1(x)Q_2(x) \ldots Q_m(x),$$

причём если $P(x) = R_1(x)R_2(x) \ldots R_l(x)$ — другое разложение такого типа, то $m = l$ и при подходящей нумерации множителей имеют место равенства $R_k(x) = \alpha_k Q_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, где $\alpha_k \in \mathbb{K}$, $\alpha_k \neq 0$.

4.9. Предложение.

1. *Любой многочлен первой степени неприводим.*
2. *Всякий многочлен $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ степени $\geqslant 2$, имеющий корень в поле $\mathbb{K}$, приводим.*[2]
3. *В множестве $\mathbb{C}[x]$ неприводимыми являются только многочлены первой степени.*
4. *В множестве $\mathbb{R}[x]$ неприводимыми являются только многочлены первой степени и многочлены второй степени (квадратные трёхчлены), не имеющие вещественных корней.*
5. *В множестве $\mathbb{Q}[x]$ существуют неприводимые многочлены любой степени.*

H. Многочлены над полем вещественных чисел. Каждый многочлен $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени n с *вещественными* коэффициентами можно рассматривать и как многочлен с комплексными коэффициентами, т.е. $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{K}[x]$. Многочлен, рассматриваемый как элемент множества $\mathbb{R}[x]$, может не иметь вещественных корней, однако тот же многочлен, рассматриваемый как элемент множества $\mathbb{C}[x]$, обязательно имеет n комплексных корней, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.

---

[1] Здесь индексы обозначают не степени многочленов, а номера сомножителей.

[2] Отметим, что обратное утверждение неверно: существуют приводимые многочлены, не имеющие корней, например, многочлен $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 \in \mathbb{R}[x]$ приводим в $\mathbb{R}[x]$, но вещественных корней не имеет.

4.10. Теорема. *Пусть $P(z)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, рассматриваемый как элемент множества $\mathbb{C}[z]$. Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем*

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)}.$$

4.11. Теорема. *Если $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен с вещественными коэффициентами, а число c — его корень, то сопряжённое число $\bar{z}$ также является корнем многочлена $P(z)$.*

Таким образом, *у многочлена с вещественными коэффициентами комплексные корни могут появляться только сопряжёнными парами.*

Пусть c, $\bar{c}$ — пара сопряжённых корней (с ненулевыми мнимыми частями). В разложение многочлена на множители входит произведение

$$(z - c)(z - \bar{c}) = z^2 - (c + \bar{c})z + c\bar{c} = z^2 - 2(\operatorname{Re} c)z + |c|^2,$$

являющееся квадратным трёхчленом; отметим, что этот трёхчлен неприводим, поскольку его дискриминант отрицателен:

$$D = 4(\operatorname{Re} c)^2 - 4|c|^2 < 0, \quad \text{так как} \quad |c|^2 = (\operatorname{Re} c)^2 + (\operatorname{Im} c)^2 > (\operatorname{Re} c)^2.$$

4.12. Теорема. *Каждый многочлен с вещественными коэффициентами может быть разложен в произведение линейных множителей и неприводимых квадратных трёхчленов*:

$$P(x) = a(x - c_1)^{\alpha_1} \cdots (x - c_s)^{\alpha_s}(x + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x + p_r x + q_r)^{\beta_r}.$$

I. Многочлены над полем рациональных чисел. Каждый многочлен $Q(x)$ с рациональными коэффициентами может быть представлен в виде $Q(x) = \frac{a}{b}P(x)$, где a, b — целые числа, а $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением многочленов с целыми коэффициентами. Множество таких многочленов будем обозначать $\mathbb{Z}[x]$.

4.13. Теорема. *Пусть*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Z}[x].$$

Если рациональное число $c = p/q$, где p и q — взаимно простые целые числа, является корнем многочлена $P(x)$, то q является делителем старшего коэффициента a_0 этого многочлена, а p — делителем свободного члена a_n.

Так как каждое целое число, отличное от нуля, имеет лишь конечное число делителей, то теорема позволяет путём конечного перебора найти все рациональные корни.

4.14. Теорема. *Если $P(x)$ — нормированный многочлен с целыми коэффициентами, то все его рациональные корни представляют собой целые числа, являющиеся делителями свободного члена.*

J. Бином Ньютона. *Факториалом* $n!$ натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно:

$$n! \stackrel{\text{def}}{=\!=} 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n.$$

По определению полагаем $0! = 1$. Число $n!$ равно количеству способов упорядочить множество, состоящее из n элементов, т.е. составить из элементов этого множества упорядоченное семейство.

Биномиальным коэффициентом C_n^r называется число

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Число C_n^r равно количеству способов извлечь r-элементное подмножество из n-элементного множества.

4.15. Теорема. *Биномиальные коэффициенты обладают следующими свойствами*:

(1) $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;

(2) $C_n^k = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k\ \textit{сомножителей}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}_{k\ \textit{сомножителей}}}$;

(3) $C_n^{n-k} = C_n^k$;

(4) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;

(5) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$;

(6) $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Приведённые свойства биномиальных коэффициентов позволяют указать следующий способ их вычисления. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & & C_0^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \\
 & & & C_1^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_1^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
 & & C_2^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_2^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_2^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & C_3^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_3^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_3^2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & C_3^3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{tikzcd}$$

В каждом горизонтальном ряду этой диаграммы расположены последовательно числа C_n^0, C_n^1, …, C_n^n, причём каждое из них равно сумме двух чисел, расположенных над ним. Эта диаграмма называется *треугольником Паскаля*:

$$
\begin{array}{r|ccccccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
n=1 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
n=2 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
n=3 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
n=4 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
n=5 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
n=6 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
n=7 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
n=8 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

4.16. Теорема. *Имеет место следующая формула, называемая формулой бинома Ньютона*:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k &= \\
&= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \\
&\qquad + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

2. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения следующих понятий: одночлен, многочлен, степень одночлена, степень многочлена, нормированный многочлен.
2. Как определяются операции сложения и умножения многочленов?
3. Чему равна степень произведения двух многочленов?
4. В каком случае степень суммы двух многочленов меньше максимальной из их степеней?
5. Сформулируйте теорему о делении с остатком для многочленов.
6. Сформулируйте теорему об остатке.
7. Сформулируйте теорему Безу.
8. Какое максимальное число корней может иметь многочлен степени n?
9. Опишите процесс деления многочлена на $x-c$ с помощью схемы Горнера.
10. Сформулируйте определение кратного корня многочлена.
11. Сформулируйте теорему о связи кратности корня многочлена и корня его производной.
12. Сформулируйте основную теорему алгебры.
13. Сколько корней имеет многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$?
14. Что такое неприводимый многочлен?
15. Сформулируйте теорему о разложении многочлена в произведение неприводимых многочленов.
16. Какие многочлены являются неприводимыми над полем $\mathbb{C}$?
17. Какие многочлены являются неприводимыми над полем $\mathbb{R}$?

18. Приведите примеры неприводимых многочленов над полем $\mathbb{Q}$, имеющих степень 2, 3, 4.
19. Сформулируйте свойство комплексных корней многочлена с вещественными коэффициентами.
20. Сформулируйте теорему о разложении многочленов из $\mathbb{R}[x]$ на неприводимые множители.
21. Сформулируйте теорему о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами.
22. Сформулируйте теорему о рациональных корнях нормированного многочлена с целыми коэффициентами.
23. Что называется факториалом натурального числа?
24. Что такое биномиальные коэффициенты? Сформулируйте их свойства.
25. Что такое треугольник Паскаля?
26. Запишите формулу бинома Ньютона в общем виде.
27. Запишите формулу бинома Ньютона для степеней 2, 3, 4, 5, 6.

3. Примеры решения задач

Пример 4.1. Разделите многочлен

$$P(x) = 10x^5 - 21x^4 + 21x^3 - 3x^2 - 7x + 6$$

на многочлен $D(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

Решение:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
10x^5 & -21x^4 & +21x^3 & -3x^2 & -7x & +6 & 2x^2 - 3x + 2 \\ \cline{7-7}
10x^5 & -15x^4 & +10x^3 & & & & 5x^3 - 3x^2 + x + 3 \\ \cline{1-3}
 & -6x^4 & +11x^3 & -3x^2 & -7x & +6 & \\
 & -6x^4 & +9x^3 & -6x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 2x^3 & +3x^2 & -7x & +6 & \\
 & & 2x^3 & -3x^2 & +2x & & \\ \cline{3-6}
 & & & 6x^2 & -9x & +6 & \\
 & & & 6x^2 & -9x & +6 & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ответ: $Q(x) = 5x^3 - 3x^2 + x + 3$.

Пример 4.2. Разделите многочлен $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x + 7$ на многочлен $D(x) = x^3 + 3x^2 - x - 2$ с остатком.

Решение:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5 - 2x^4 + x^3 \qquad\qquad + 2x + 7 & x^3 + 3x^2 - x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^5 + 9x^4 - 3x^3 - 6x^2} \qquad\qquad\quad & 3x^2 - 11x + 37 \\
- 11x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 7 & \\
\underline{- 11x^4 - 33x^3 + 11x^2 + 22x} \quad\; & \\
37x^3 - 5x^2 - 20x + 7 & \\
\underline{37x^3 + 111x^2 - 37x - 74} & \\
- 116x^2 + 17x + 81 &
\end{array}
$$

Итак, частное равно $Q(x) = 3x^2 - 11x + 37$, остаток $R(x) = -116x^2 + 17x + 81$.

Пример 4.3. Разделите многочлен $5x^5 + x + 1$ на $x + 3$ с помощью схемы Горнера.

Решение. Схема Горнера имеет вид

	$a_0 = 5$	$a_1 = 0$	$a_2 = 0$	$a_3 = 0$	$a_4 = 1$	$a_5 = 1$
$c = -3$	$b_0 = 5$	$b_1 = -15$	$b_2 = 45$	$b_3 = -135$	$b_4 = 406$	$R = -1217$

Вычисления:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0 = 5, \\
b_1 &= cb_0 + a_1 = (-3) \cdot 5 + 0 = -15, \\
b_2 &= cb_1 + a_2 = (-3) \cdot (-15) + 0 = 45, \\
b_3 &= cb_2 + a_3 = (-3) \cdot 45 + 0 = -135, \\
b_4 &= cb_3 + a_4 = (-3) \cdot (-135) + 1 = 406, \\
R &= cb_4 + a_5 = (-3) \cdot 406 + 1 = -1217.
\end{aligned}
$$

Итак, (неполное) частное равно $Q(x) = 5x^4 - 15x^3 + 45x^2 - 135x + 406$, а остаток равен $R = -1217$; кроме того, $P(-3) = -1217$.

Пример 4.4. Известно, что число $c = 2$ является корнем многочлена $P(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8$. Найдите кратность этого корня.

Решение. Разделим многочлен $P(x)$ на $x - 2$ по схеме Горнера:

	$a_0 = 1$	$a_1 = -4$	$a_2 = 1$	$a_3 = 10$	$a_4 = -4$	$a_5 = -8$
$c = 2$	$b_0 = 1$	$b_1 = -2$	$b_2 = -3$	$b_3 = 4$	$b_4 = 4$	$R = 0$

Частное имеет вид $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$. Разделим его на $x - 2$:

	$a_0 = 1$	$a_1 = -2$	$a_2 = -3$	$a_3 = 4$	$a_4 = 4$
$c = 2$	$b_0 = 1$	$b_1 = 0$	$b_2 = -3$	$b_3 = -2$	$R = 0$

Частное имеет вид $x^3 - 3x - 2$; делим его на $x - 2$:

	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$a_2 = -3$	$a_3 = -2$
$c = 2$	$b_0 = 1$	$b_1 = 2$	$b_2 = 1$	$R = 0$

Продолжаем процесс:

	$a_0 = 1$	$a_1 = 2$	$a_2 = 1$
$c = 2$	$b_0 = 1$	$b_1 = 4$	$R = 9$

Здесь остаток отличен от нуля, так что многочлен $P(x)$ делится на $(x-2)^3$, но не делится на $(x-2)^4$, и поэтому кратность корня $c = 2$ равна 3.

Отметим ещё, что при делении $P(x)$ на $(x-2)^3$ получился многочлен $x^2 + 2x + 1 \equiv (x+1)^2$. Таким образом, $P(x) = (x-2)^3(x+1)^2$.

Обычно все вычисления записывают в одной таблице:

	1	−4	1	10	−4	−8
2	1	−2	−3	4	4	0
2	1	0	−3	−2	0	
2	1	2	1	0		
2	1	4	9			

Пример 4.5. Найдите корни многочлена

$$P(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48.$$

Решение. Делителями свободного члена являются числа ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12, ±16, ±24, ±48. Вычисляем последовательно значения многочлена $P(x)$ в этих точках с помощью схемы Горнера:

	1	3	−12	−20	48	
1	1	4	−8	−28	20	$\Rightarrow$ 1 не является корнем
−1	1	2	−14	−6	54	$\Rightarrow$ −1 не является корнем
2	1	5	−2	−24	0	$\Rightarrow$ 2 является корнем
2	1	7	12	0		$\Rightarrow$ 2 является кратным корнем

Итак, $P(x) = (x-2)^2(x^2 + 7x + 12)$; квадратный трёхчлен легко разлагается на множители: $(x+3)(x+4)$. Итак, данный многочлен имеет простые корни -3 и -4 и корень 2 кратности 2 (двойной корень).

Пример 4.6. Разложите многочлен $P(x) = 6x^4 + x^3 - 5x^2 - 11x - 6$ на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$.

Решение. Делителями свободного члена являются числа ±1, ±2, ±3, ±6; ни в одной из этих восьми точек многочлен не равен нулю, так что целых корней он не имеет.

Делителями старшего коэффициента являются те же числа ±1, ±2, ±3, ±6; поэтому рациональными (не целыми) корнями многочлена $P(x)$

могут быть только числа $\pm\frac{1}{6}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{3}{2}$. Последовательно вычисляем значения многочлена $P(x)$ в этих точках (часть вычислений опущена):

	6	1	-5	-11	-6	
$\frac{1}{6}$	6	2	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{106}{9}$	$-\frac{215}{27}$	$\Rightarrow \frac{1}{6}$ не является корнем
$-\frac{1}{6}$	6	0	-5	$-\frac{61}{6}$	$-\frac{155}{36}$	$\Rightarrow \frac{1}{6}$ не является корнем
$\frac{1}{3}$	6	3	-4	$-\frac{37}{3}$	$-\frac{91}{9}$	$\Rightarrow \frac{1}{3}$ не является корнем
$-\frac{1}{3}$	6	-1	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{85}{9}$	$-\frac{77}{27}$	$\Rightarrow -\frac{1}{3}$ не является корнем
…	…	…	…	…	…	
$-\frac{2}{3}$	6	-3	-3	-9	0	$\Rightarrow -\frac{2}{3}$ является корнем
$\frac{3}{2}$	6	6	6	0		$\Rightarrow \frac{3}{2}$ является корнем

После деления $P(x)$ на $x + 2/3$ и на $x - 3/2$ получается квадратный трёхчлен $6x^2 + 6x + 6$, являющийся неприводимым над полем $\mathbb{R}$. Итак,

$$P(x) = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x^2 + x + 1) = (3x + 2)(2x - 3)(x^2 + x + 1).$$

Пример 4.7. Найдите все корни многочлена

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 8,$$

если известен один из его корней $1 + i$.

Решение. Поскольку у многочлена с вещественными коэффициентами комплексные корни могут появляться только сопряжёнными парами, заключаем, что число $1 - i$ также является корнем, а потому многочлен $P(x)$ делится на линейные двучлены $x - 1 - i$ и $x - 1 + i$, а стало быть, и на их произведение $(x - 1 - i)(x - 1 + i) = x^2 - 2x + 2$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 8 & x^2 - 2x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - 2x^3 + 2x^2} \qquad\qquad & x^2 - 2x - 4 \\
-\,2x^3 \qquad\quad + 4x - 8 & \\
\underline{-\,2x^3 + 4x^2 - 4x} \quad\; & \\
-\,4x^2 + 8x - 8 & \\
\underline{-\,4x^2 + 8x - 8} & \\
0 &
\end{array}$$

Итак, $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 4)$. Первый из квадратных трёхчленов имеет уже известные нам сопряжённые корни

$1 \pm i$, а корни второго, $1 \pm \sqrt{5}$, легко находятся по формуле решения квадратного уравнения.

Пример 4.8. Докажите свойство (4) биномиальных коэффициентов: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Решение:

$$\begin{aligned}
C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} = \\
&= \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{k!(n-k-1)!(k+1)(n-k)} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}.
\end{aligned}$$

Пример 4.9. Докажите формулу бинома Ньютона (4.3):

$$\begin{aligned}
(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \\
= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \\
+ \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Решение. Доказательство проведем методом индукции. База индукции:

$$(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b.$$

Предположение индукции состоит в том, что формула (4.3) справедлива при некотором значении n. Наша задача — пользуясь формулой (4.3), вывести её справедливость для показателя степени $n+1$. Итак,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \ a^{n-k} \ b^k \right) =$$

раскроем скобки:

$$= a \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \ a^{n-k} \ b^k \right) + b \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \ a^{n-k} \ b^k \right) =$$

внесём множитель под знак суммы:

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ a^{n-k+1} \ b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ a^{n-k} \ b^{k+1} =$$

первое слагаемое первой суммы и последнее слагаемое второй суммы запишем отдельно, а в оставшихся суммах сделаем замену индекса суммирования:

$$= a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_n^k\ a^{n-k+1}\ b^k}_{\substack{k=p+1,\\ k=1,\ldots,n,\\ p=0,\ldots,n-1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\ a^{n-k}\ b^{k+1}}_{k=p} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^{p+1}\ \underline{a^{n-p}\ b^{p+1}} + \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p\ \underline{a^{n-p}\ b^{p+1}} + b^{n+1} =$$

в обеих суммах пределы изменения индекса суммирования одинаковы и одинаковы также подчёркнутые выражения, так что можно привести подобные слагаемые:

$$= a^{n+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \underbrace{\left(C_n^{p+1} + C_n^p\right)}_{=C_{n+1}^{p+1}}\ a^{n-p}\ b^{p+1} + b^{n+1} =$$

воспользуемся свойством (4) биномиальных коэффициентов, учтём тот факт, что $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$ и сделаем замену индекса суммирования:

$$= C_{n+1}^0\ a^{n+1} + \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} C_{n+1}^{p+1}\ a^{(n+1)-(p+1)}\ b^{p+1}}_{\substack{k=p+1,\\ p=0,\ldots,n-1,\\ k=1\ldots,n}} + C_{n+1}^{n+1}\ b^{n+1} =$$

объединяем все слагаемые в одну сумму:

$$= C_{n+1}^0\ a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k\ a^{(n+1)-k}\ b^k + C_{n+1}^{n+1}\ b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k\ a^{(n+1)-k}\ b^k, \quad \text{что и требовалось.}$$

Пример 4.10. Докажите свойства (5) и (6) биномиальных коэффициентов:

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n, \quad C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Решение. Эти соотношения получаются из формулы бинома Ньютона (4.3), если положить $a = b = 1$ или $a = 1$, $b = -1$.

4. Задачи для самостоятельного решения

4.1. Разделите многочлен $P(x)$ на многочлен $D(x)$ с остатком:

(a) $P(x) = 2x^5 + x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 5x + 2$, $D(x) = x^2 + x + 1$;
(b) $P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 7x + 6$, $D(x) = x^2 + 2$;
(c) $P(x) = 3x^5 + 5x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3$, $D(x) = x^2 + 2x + 2$;
(d) $P(x) = x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 6x^3 - 6x^2 - x - 3$, $D(x) = x^3 + 2x^2 + 1$.

4.2. Разделите многочлен $P(x)$ на двучлен $D(x)$ с остатком, используя схему Горнера:

(a) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 + x - 4$, $D(x) = x - 2$;
(b) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + 5x + 3$, $D(x) = x + 2$;
(c) $P(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 7x - 9$, $D(x) = x + 3$;
(d) $P(x) = 3x^4 - 15x^3 - x^2 + 6x$, $D(x) = x - 5$

4.3. Найдите значение многочлена $P(x)$ в точках 1, 2, 3 с помощью схемы Горнера:

(a) $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2$;
(b) $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^3 + x - 2$.

4.4. Разложите многочлен $P(x)$ на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$:

(a) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$;
(b) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 8x + 4$;
(c) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$;
(d) $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$;
(e) $P(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54$;
(f) $P(x) = x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 10x + 4$;
(g) $P(x) = x^5 - 8x^3 + 3x^2 + 4x + 12$;
(h) $P(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 2$.

4.5. Решите уравнения:

(a) $6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1 = 0$;
(b) $12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$;
(c) $6x^4 + 13x^3 + 30x^2 + 52x + 24 = 0$;
(d) $4x^4 - 5x^2 - 10x + 6 = 0$.

4.6. Найдите все корни многочлена $P(x)$, если один корень известен:

(a) $P(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$, известен корень $2 - i$;
(b) $P(x) = x^4 + 8x^3 + 27x^2 + 38x + 26$, известен корень $-1 + i$;
(c) $P(x) = x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 20x + 25$, известен корень $-1 + 2i$;
(d) $P(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 4x - 4$, известен корень $-1 - i$.

ГЛАВА 5

Матрицы

1. Основные понятия и факты

А. Основные определения. *Матрицей* размера $m \times n$ (или $(m\times n)$-матрицей) называется совокупность mn чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из m строк и n столбцов и заключённой в скобки. (Подчеркнём, что при указании размера матрицы сначала указывается количество её строк, а затем — количество столбцов.) Элементы матрицы обозначаются буквами, снабжёнными двумя индексами, которые указывают положение элемента внутри матрицы; при этом используются две системы обозначений:

(1) *верхний* индекс указывает номер строки, *нижний* — номер столбца, не пересечении которых стоит элемент:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix};$$

(2) *первый* индекс указывает номер строки, а *второй* — номер столбца:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращённые обозначения:

$$A = \left(a_j^i\right)_n^m, \quad B = \left(b_{ij}\right)_{mn}.$$

Если требуется указать размер матрицы в явном виде, то мы записываем его под буквой, обозначающей матрицу: $\underset{m\times n}{A}$.

Будем также использовать следующее обозначение: если $A = \left(a_j^i\right)_n^m$ или $B = \left(b_{ij}\right)_{mn}$, то $\{A\}_j^i = a_j^i$ и $\{B\}_{ij} = b_{ij}$; фигурные скобки здесь обозначают «операцию извлечения элемента из матрицы».

Множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из множества X обозначается $X^{m\times n}$. В дальнейшем мы в основном будем работать с множеством $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех матриц размера $m \times n$ с вещественными элементами, хотя все полученные результаты справедливы для множества $\mathbb{K}^{m\times n}$, где $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле.

Вектор-строки и *вектор-столбцы* — это матрицы, состоящие соответственно из одной строки или из одного столбца. Множество всех вектор-строк длины m (т.е. состоящих из m элементов) обозначается

$$\mathbb{R}^{*m} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \right\}$$

и называется вещественным *арифметическим пространством строк.*

Множество всех вектор-столбцов высоты n (т.е. состоящих из n элементов) обозначается

$$\mathbb{R}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \;\middle|\; x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathbb{R} \right\}$$

и называется *вещественным арифметическим пространством* $\mathbb{R}^n$ (или кратко пространством $\mathbb{R}^n$). Отметим, что элементы столбцов нумеруются верхними индексами в соответствии с принятым соглашением о том, что верхние индексы нумеруют строки; нижние индексы в этом случае использовать неудобно, поскольку возникнет путаница со строками.

Выделяют следующие специальные виды матриц:

(i) *нулевая матрица O*: все её элементы равны нулю; в частности, рассматриваются нулевые столбцы и нулевые строки;

(ii) *квадратная матрица*: количество строк равно количеству столбцов),

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называют количество её строк (столбцов). *Главная диагональ* квадратной матрицы состоит из элементов a_1^1, a_2^2, …, a_n^n, а *побочная диагональ* — из элементов a_n^1, a_{n-1}^2, …, a_2^{n-1}, a_1^n. Сумма элементов главной диагонали называется *следом* квадратной матрицы и обозначается $\operatorname{tr} A$:

$$\operatorname{tr} A = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n = \sum_{i=1}^{n} a_i^i;$$

(iii) *диагональная матрица*: квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(a_1^1, a_2^2, a_3^3, \ldots, a_{n-1}^{n-1}, a_n^n\right);$$

(iv) *верхнетреугольная* (правая треугольная) и *нижнетреугольная* (левая треугольная) матрицы: у первой из них равны нулю все элементы, расположенные ниже главной диагонали, т.е. $a_j^i = 0$ для всех $i > j$, а у второй — выше главной диагонали, т.е. $a_j^i = 0$ для всех $i < j$:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix};$$

(v) *блочная матрица*: матрица, элементами которой являются матрицами; например

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right];$$

здесь матрицу A размера 3×3 можно рассматривать как блочную матрицу размера 2×2 с блоками

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения блочной матрицы будем использовать квадратные скобки.

B. Линейные операции над матрицами. Матрицы A и B называются *равными* (обозначение $A = B$), если их размеры совпадают, а элементы, стоящие на одинаковых местах, равны между собой:

$$a_j^i = b_j^i \quad \forall i = 1, \ldots, m, \ \forall j = 1, \ldots, n.$$

Сумма матриц $A = (a^i_j)^m_n$ *и* $B = (b^i_j)^m_n$ одинакового размера $m \times n$ и *произведение матрицы* $A = (a^i_j)^m_n$ *на число* α определяются следующим образом:

$$\{A + B\}^i_j = \{A\}^i_j + \{B\}^i_j, \quad \{\alpha A\}^i_j = \alpha\{A\}^i_j \quad \forall i = 1, \ldots, m, \ \forall j = 1, \ldots, n.$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называются *линейными операциями.* Говорят, что линейные операции выполняются *поэлементно*; это означает, что каждый элемент результирующей матрицы зависит только от элементов исходных матриц, расположенных на тех же местах.

5.1. Теорема. *Линейные операции над матрицами обладают следующими свойствами*:

(1) *коммутативность сложения*:

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad A + B = B + A;$$

(2) *ассоциативность сложения*:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad (A + B) + C = A + (B + C);$$

(3) *свойство нулевой матрицы* $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad A + O = A;$$

(4) *существование противоположной матрицы*:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad \exists A' \in \mathbb{R}^{m\times n}: \ A + A' = O;$$

(5) *свойство единицы*:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad 1 \cdot A = A;$$

(6) *ассоциативность умножения на число*:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A;$$

(7) *дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц*:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

(8) *дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел*:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

C. Линейная комбинация, линейная оболочка. Рассмотрим пространство столбцов $\mathbb{R}^n$.

Пусть даны столбцы $X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathbb{R}^n$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. *Линейной комбинацией* столбцов $X_1, X_2, \ldots, X_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ называется выражение вида

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k \equiv \sum_{s=1}^{k} \alpha_s X_s.$$

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все её коэффициенты равны нулю:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Очевидно, тривиальная линейная комбинация любых столбцов равна нулевому столбцу.

Линейной оболочкой столбцов $X_1, X_2, \dots, X_k$ называется множество всех линейных комбинаций, которые можно построить из этих столбцов:

$$L(X_1, X_2, \dots, X_k) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \left\{ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Можно рассматривать линейные комбинации и линейные оболочки матриц любого размера, однако на практике чаще всего встречаются именно линейные комбинации столбцов.

D. Линейная зависимость и независимость. Как уже отмечалось выше, тривиальная линейная комбинация любых столбцов равна нулевому столбцу. Возникает вопрос: может ли быть равна нулевому столбцу нетривиальная линейная комбинация, т.е. такая, в которой хотя бы один коэффициент ненулевой?

Простой пример показывает, что такая ситуация возможна:

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.2. Определение. Столбцы $X_1, \dots, X_k$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому столбцу.

Столбцы $X_1, \dots, X_k$ называются *линейно независимыми*, если равенство нулевому столбцу их линейной комбинации возможно лишь в случае, если эта линейная комбинация тривиальна.

Понятие линейной зависимости и независимости можно ввести не только для столбцов, но и для матриц произвольного размера.

E. Произведение матриц. *Произведением* матриц $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ и $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$ называется матрица $AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$\{AB\}^i_j = \sum_{k=1}^{s} a^i_k\, b^k_j.$$

Таким образом, элемент $\{AB\}^i_j$, расположенный в i-й строке и j-м столбце матрицы AB, равен сумме попарных произведений элементов i-й строки матрицы A и элементов j-го столбца матрицы B. Ясно, что перемножить матрицы можно лишь в том случае, когда *количество столбцов первой из перемножаемых матриц равно количеству строк второй.* Схема на рис. 5.1 иллюстрирует правило умножения матриц.

Единичной матрицей $\mathbb{1}$ называется диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1. Элементы единичной матрицы

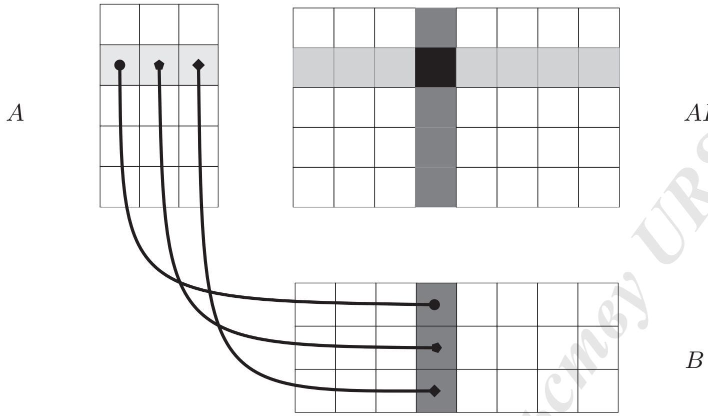


Рис. 5.1. Умножение матриц

обозначаются

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

δ^i_j называется *символом Кронекера.*

Произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3. Теорема. *Операция умножения матриц обладает следующими свойствами*:

(1) *ассоциативность*:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times s},\ \forall B \in \mathbb{R}^{s\times p},\ \forall C \in \mathbb{R}^{p\times n}: \quad A(BC) = (AB)C;$$

(2) *дистрибутивность слева*:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times s},\ \forall B, C \in \mathbb{R}^{s\times n}: \quad A(B + C) = AB + AC;$$

(3) *дистрибутивность справа*:

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times s},\ \forall C \in \mathbb{R}^{s\times n}: \quad (A + B)C = AC + BC;$$

(4) *свойство единичной матрицы*:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad \mathbb{1}_m A = A\mathbb{1}_n = A,$$

где $\mathbb{1}_m$ и $\mathbb{1}_n$ — единичные матрицы порядков m и n соответственно.

Если A — квадратная матрица, то её степень A^d, $d = 0, 1, \ldots$, определяется следующим образом:

$$A^0 = \mathbb{1}, \quad A^d = \underbrace{A \cdots A}_{d\ \text{раз}}.$$

Пусть $f(x) = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \dots + a_{d-1}x + a_d$ — многочлен степени d от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Под *многочленом от матрицы* понимается выражение

$$f(A) = a_0A^d + a_1A^{d-1} + \dots + a_{d-1}A + a_d\mathbb{1}.$$

F. Структура произведения матриц.

5.4. Теорема. *Пусть* $A = \left(a_l^j\right)_p^m$, $B = \left(b_k^l\right)_n^p$.

(1) *k-й столбец матрицы $C = AB$ равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам k-го столбца матрицы B:*

$$C_k = \sum_{l=1}^{p} A_l\ b_k^l.$$

(2) *k-й столбец матрицы $C = AB$ равен произведению матрицы A на k-й столбец матрицы B:*

$$C_k = A \cdot B_k.$$

(3) *s-я строка матрицы AB равна линейной комбинации строк матрицы B с коэффициентами, равными элементам s-й строки матрицы A:*

$$C^s = \sum_{k=1}^{p} a_k^s\ B^k.$$

(4) *s-я строка матрицы AB равна произведению s-й строки матрицы A на матрицу B:*

$$C^s = A^s \cdot B.$$

G. Обратная матрица. Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A, если выполняются соотношения

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}.$$

Матрица, для которой существует обратная, называется *обратимой*. Не все матрицы обратимы; очевидно, для нулевой матрицы обратная не существует. Вопрос о существовании обратной матрицы будет решён позже (см. теорему 6.19, с. 85).

5.5. Теорема. *Обратимые матрицы обладают следующими свойствами:*

(1) *Единичная матрица обратима и $\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}$.*
(2) *Если матрица A обратима, то её обратная матрица A^{-1} также обратима и $(A^{-1})^{-1} = A$.*
(3) *Если матрица A обратима, то обратная матрица A^{-1} единственна.*
(4) *Если матрицы A и B обратимы, то их произведение также обратимо и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

5.6. Теорема. *Матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

обратима тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$, *и обратная к ней вычисляется по формуле*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Если $ab - bc = 0$, *то матрица* A *обратной не имеет.*

Вопрос о вычислении обратной матрицы для матриц порядка выше 2 будет рассмотрен позже.

Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц. Однако существуют неквадратные матрицы, произведение которых является единичной матрицей, например, при любых a, b имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы в левой части равенства *не считаются* обратными друг к другу.

Н. Транспонирование. Матрицей, *транспонированной* по отношению к матрице $A = (a^i_j)^m_n \in \mathbb{R}^{m\times n}$, называется матрица $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, элементы которой суть

$$\{A^T\}^j_i = \{A\}^i_j.$$

Очевидно, количество строк (столбцов) транспонированной матрицы равно количеству столбцов (строк) исходной матрицы.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.7. Теорема. *Операция транспонирования обладает следующими свойствами:*

(1) *линейность:*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T;$$

(2) *инволютивность:*

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}: \quad (A^T)^T = A;$$

(3) *транспонирование произведения:*

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times p},\ \forall B \in \mathbb{R}^{p\times n}: \quad (AB)^T = B^T A^T;$$

(4) *транспонирование обратной матрицы: для любой обратимой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеем*

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Квадратная матрица A называется *симметричной*, если $A = A^T$, и *кососимметричной* (антисимметричной), если $A = -A^T$. Очевидно, все элементы главной диагонали кососимметричной матрицы равны нулю. Примеры:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Любая линейная комбинация симметричных (кососимметричных) матриц также является симметричной (кососимметричной) матрицей. Для произведения матриц аналогичное свойство не выполняется:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 23 & 28 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5.8. Теорема. *Любую квадратную матрицу A можно единственным образом представить в виде суммы симметричной A_1 и кососимметричной A_2 матриц:*

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{=A_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{=A_2}.$$

2. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое матрица? Как указываются размеры матрицы? Как нумеруются её элементы?
2. В какой строке и каком столбце расположен элемент матрицы, обозначенный a_{35}? a_4^2?
3. Как определяются линейные операции над матрицами?
4. Перечислите свойства линейных операций над матрицами.
5. Сформулируйте определение линейной комбинации столбцов. Что такое тривиальная (нетривиальная) линейная комбинация?
6. Что такое линейная оболочка?
7. Как определяется произведение матриц? Приведите примеры.
8. Каким условиям должны удовлетворять матрицы A и B, чтобы (a) существовало произведение AB? (b) существовало произведение BA? (c) существовали оба произведения AB и BA?
9. Известно, что произведение двух матриц равно нулевой матрице. Следует ли отсюда, что один из сомножителей представляет собой нулевую матрицу? Ответ обоснуйте.
10. На какую матрицу нужно умножить матрицу A, чтобы в результате получить (a) первый столбец A; (b) первую строку A?
11. Что такое символ Кронекера?

12. Перечислите свойства произведения матриц.
13. Как определяется многочлен от матрицы?
14. Сформулируйте теорему о структуре произведения матриц.
15. Что такое обратная матрица? Всегда ли существует обратная матрица?
16. Запишите формулу вычисления обратной матрицы для (2×2)-матрицы.
17. Существует ли обратная матрица для матрицы-строки $(1\ 2\ 3)$?
18. Сформулируйте теорему о свойствах обратной матрицы.
19. Что такое транспонирование матрицы? Сформулируйте теорему о свойствах операции транспонирования.
20. Какие матрицы называются симметричными? кососимметричными?
21. Сформулируйте теорему о разложении произвольной квадратной матрицы в сумму симметричной и кососимметричной.

3. Примеры решения задач

Пример 5.1. Найдите линейную комбинацию матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

с коэффициентами $\alpha = 2$, $\beta = -3$.

Решение:

$$\alpha A + \beta B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) & 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 6 - 3 \cdot 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -9 \\ -4 & 16 & 12 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.2. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

найдите произведения AB и BA.

Решение:

$$\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 1}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix};$$

произведение

$$\underset{2\times 1}{B} \cdot \underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

не существует, поскольку количество столбцов первой из перемножаемых матриц не равно количеству строк второй.

Пример 5.3. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

найдите произведения AB и BA.

Решение:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 5 & 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 4 & 3\cdot 2 + 4\cdot 5 & 3\cdot 3 + 4\cdot 6 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 4 & 5\cdot 2 + 6\cdot 5 & 5\cdot 3 + 6\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}.$$

Этот пример показывает, что при перестановке местами матриц-сомножителей произведения получаются разными; более того, они имеют разные размеры.

Пример 5.4. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

найдите произведения AB и BA.

Решение:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Здесь размеры матриц-произведений AB и BA равны, но сами произведения различны; таким образом, матрицы A и B не коммутируют.

Пример 5.5. Убедитесь в том, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

коммутируют.

Решение. Вычисляя произведения AB и BA, убеждаемся, что они совпадают:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.6. Докажите, что матрица $A = \lambda\mathbb{1}$, где λ — произвольное число, а $\mathbb{1}$ — единичная матрица, коммутирует со всеми матрицами того же порядка.

Решение. Для произвольной матрицы B того же порядка, что рассматриваемая матрица A, имеем:

$$AB = (\lambda\mathbb{1})B = \lambda(\mathbb{1}B) = \lambda B = \lambda(B\mathbb{1}) = B(\lambda\mathbb{1}) = BA,$$

что и требовалось.

Пример 5.7. Найдите обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для данной матрицы $ad - bc = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 5$, так что, согласно теореме 5.6, обратная матрица существует и

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В правильности вычисления можно убедиться непосредственной проверкой:

$$A^{-1}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.8. Найдите неизвестные матрицы X и Y из уравнений (a) $XA = B$, (b) $AY = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение. Каждая из матриц X, Y имеет размер 2×2. Проверим, обратима ли матрица A:

$$ad - bc = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2 \neq 0,$$

т.е. матрица A^{-1} существует и равна

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Умножая обе части уравнения $XA = B$ справа на A^{-1}, получим

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножая обе части уравнения $AY = B$ слева на A^{-1}, получим

$$Y = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Пример 5.9. Разложите матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

в сумму симметричной и кососимметричной.
Решение. Согласно теореме 5.8 имеем

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

найдите (a) $(3A - 2B)C^T$, (b) $(3A^T - 2B^T)C$, (c) $C^T(3A - 2B)$.

5.2. Для любого натурального n найдите

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n;$$

$$\text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n; \quad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

5.3. Найдите:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix};\ \text{(b)}\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n.$$

5.4. Для данных матриц A и B найдите $AB - BA$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.5. Найдите $f(A)$, если

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = x^2 - 7x - 2;$$

$$\text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = x^2 - 3x - 1;$$

$$\text{(c)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 3x + 2;$$

$$\text{(d)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - x + 3.$$

5.6. Для данных матриц найдите обратные:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \quad \text{(f)}\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

5.7. Решите уравнения (a) $XA = B$, (b) $AX = B$, (c) $AXB = \mathbb{1}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.8. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Запишите линейную комбинацию, в виде которой представляется (a) второй столбец матрицы AB, (b) третий столбец матрицы BA, (c) вторая строка матрицы AB, (d) третья строка матрицы BA.

5.9. Докажите, что каждая матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ второго порядка удовлетворяет уравнению $x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$.

5.10. Пусть P, A — квадратные матрицы одного порядка и $f(x)$ — произвольный многочлен. Докажите, что $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$.

5.11. Пусть квадратная матрица A такова, что $A^2+A+\mathbb{1} = O$. Докажите, что матрица A обратима, и найдите обратную матрицу.

5.12. Пусть квадратная матрица A такова, что $A^m = O$ (такие матрицы называются нильпотентными). Докажите, что матрица $\mathbb{1} - A$ обратима и $(\mathbb{1} - A)^{-1} = \mathbb{1} + A + \dots + A^{m-1}$.

5.13. Пусть A, B — столбцы одинаковой высоты и $C = AB^T$. Докажите, что существует такое число λ, что $C^2 = \lambda C$.

5.14. Пусть A, B — симметричные матрицы. Докажите, что матрица AB симметрична тогда и только тогда, когда матрицы A и B коммутируют.

5.15. Пусть A, B — кососимметричные матрицы. Докажите, что матрица AB симметрична тогда и только тогда, когда матрицы A и B коммутируют. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие кососимметричности произведения AB.

ГЛАВА 6

Определители

1. Основные понятия и факты

А. Система двух уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q, \end{cases} \tag{6.1}$$

где a, b, c, d, p, q — заданные числа, x, y — неизвестные. Решим систему методом исключения неизвестных.

Умножая первое уравнение на d, второе на $-b$ и складывая полученные уравнения, найдём

$$+\left\{\begin{array}{l|l} ax + by = p & \quad \cdot d \\ cx + dy = q & \quad \cdot(-b) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad (ad - bc)x = pd - qb.$$

Аналогично, умножая первое уравнение на $-c$, второе на a и складывая полученные уравнения, найдём

$$+\left\{\begin{array}{l|l} ax + by = p & \quad \cdot(-c) \\ cx + dy = q & \quad \cdot a \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad (ad - bc)y = qa - pc.$$

Если $ad - bc \neq 0$, то система имеет единственное решение

$$x = \frac{pd - qb}{ad - bc}, \quad y = \frac{qa - pc}{ad - bc}.$$

Если $ad - bc = 0$, то возможны следующие ситуации:

(i) если хотя бы одно из чисел $pd - qb$ и $qa - pc$ отлично от нуля, то система решений не имеет;

(ii) если оба числа $pd - qb$ и $qa - pc$ равны нулю, то уравнения системы пропорциональны, и система может иметь бесконечно много решений (каждое из которых получается, если одну из неизвестных взять произвольно, а вторую вычислить с помощью любого из уравнений системы), а может и не иметь решений.[1]

[1]Например, система

$$\begin{cases} 0x + 0y = 1, \\ 0x + 0y = 1; \end{cases}$$

здесь все три выражения $ad - bc$, $pd - qb$ и $qa - pc$ обращаются в нуль, но решений, очевидно, нет.

B. Определитель второго порядка. Запишем коэффициенты системы в виде (2×2)-матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

которая называется *основной матрицей системы*. Поставим в соответствие этой матрице число $ad - bc$; оно называется *определителем* (*детерминантом*) матрицы A и обозначается

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det A = |A| = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Этот определитель называют определителем второго порядка (по количеству строк и столбцов матрицы A). Таким образом, определитель второго порядка — это функция

$$\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},$$

которая каждой квадратной матрице $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ставит в соответствие число $|A| \in \mathbb{R}$.

С помощью определителей формулы для решения системы могут быть записаны в виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det A_x}{\det A}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det A_y}{\det A}, \tag{6.2}$$

где матрица A_x (соответственно, A_y) получается из матрицы A заменой первого (соответственно, второго) столбца на столбец, состоящий из свободных членов уравнений. Полученные формулы называются *формулами Крамера*.

6.1. Теорема. *Определитель второго порядка* $\det A$ *обладает следующими свойствами*:

(1) *линейность по каждому столбцу*:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b \\ c_1 + c_2 & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{pmatrix};$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

и аналогично для второго столбца;

(2) *кососимметричность*:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

(*при перестановке столбцов определитель меняет знак на противоположный*);

(3) *нормировка*:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$

(*определитель единичной матрицы равен* 1).

Из этих *основных* свойств определителя вытекает ряд новых свойств, полезных при вычислениях.

1. *Определитель второго порядка не изменится, если к любому из его столбцов прибавить другой столбец, умноженный на произвольное число*:

$$\begin{vmatrix} a+\alpha b & b\\ c+\alpha d & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} + \alpha\underbrace{\begin{vmatrix} b & b\\ d & d\end{vmatrix}}_{=0} = \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}.$$

2. Определитель не изменяется при транспонировании матрицы:

$$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c\\ b & d\end{vmatrix}.$$

Это означает, что строки и столбцы определителя равноправны: любое утверждение, справедливое для столбцов, будет справедливым и для строк.

6.2. Теорема. *Определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы.*

С. Определитель третьего порядка. Рассмотрим квадратную (3×3)-матрицу A. Будем считать, что структурными элементами матрицы являются не отдельные её элементы, а столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}],\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}.$$

Поставив соответствие каждой квадратной матрице порядка 3 по некоторому правилу определённое число, получим функцию, областью определения которой является множество $\mathbb{R}^{3\times 3}$ всех вещественных (3×3)-матриц.[1] Определитель представляет собой одну из таких функций.

6.3. Определение. *Определитель* (*детерминант*) *третьего порядка* — это функция

$$\det : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R},$$

областью определения которой является множество всех вещественных (3×3)-матриц, либо функция

$$\det : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

[1] Как и в предыдущей главе, все результаты справедливы для матриц из $\mathbb{K}^{3\times 3}$, где $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле.

трёх аргументов, каковыми являются трёхэлементные столбцы, обладающая следующими свойствами (скопированными со свойств определителя второго порядка):

(1) полилинейность по столбцам (т.е. линейность по каждому столбцу):

$$\det\left[\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right]=\det\left[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right]+\det\left[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right],$$
$$\det\left[\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right]=\alpha\det\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right],$$

и аналогично для всех остальных столбцов;

(2) кососимметричность: при перестановке любых двух столбцов определитель меняет знак на противоположный, например,

$$\det\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right]=-\det\left[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\right];$$

(3) нормировка:

$$\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=1$$

(определитель единичной матрицы равен 1).

Обратите внимание, что в основу *определения* детерминанта третьего порядка положены свойства, *доказанные* для детерминанта второго порядка.

Свойства полилинейности, кососимметричности и нормировки, входящие в определение детерминанта, будем называть *характеристическими*, или *основными*. Из них вытекает ряд *производных* свойств, полезных при практическом вычислении определителей.

6.4. Теорема. (1) *Определитель третьего порядка не меняется при транспонировании матрицы*:

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

Это означает, что все утверждения, сформулированные и доказанные для столбцов определителя, имеют аналоги, справедливые для строк.

(2) *Определитель с двумя пропорциональными (в частности, равными) столбцами равен нулю.*

(3) *Определитель не изменится, если к любому его столбцу прибавить произвольную линейную комбинацию остальных столбцов.*

(4) *Определитель, содержащий нулевой столбец, равен нулю.*

6.5. Теорема. *Определитель третьего порядка равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы.*

D. Разложение определителя по столбцу. Рассмотрим матрицу A и её определитель:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем элементы матрицы A будем называть также элементами определителя $|A|$.

6.6. Определение. *Минором* произвольного элемента определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный из исходного определителя вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит рассматриваемый элемент.

Например, минорами элементов a_1, b_3 и c_2 определителя $|A|$ являются соответственно

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

6.7. Определение. *Алгебраическим дополнением* произвольного элемента определителя третьего порядка называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{j+k}$, где j и k — номера строки и столбца, на пересечении которых стоит рассматриваемый элемент.

Например, алгебраическими дополнениями элементов a_1, b_3 и c_2 определителя $|A|$ являются соответственно

$$\mathcal{A}_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{B}_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{C}_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение элемента определителя будем обозначать той же буквой прописного начертания, что и сам элемент, как показано выше.

6.8. Теорема. *Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов любого столбца на их алгебраические дополнения*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=\mathcal{A}_1} + a_2 \cdot \underbrace{\left(- \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)}_{=\mathcal{A}_2} + a_3 \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{=\mathcal{A}_3} =$$

$$= b_1 \cdot \underbrace{\left(- \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)}_{=\mathcal{B}_1} + b_2 \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=\mathcal{B}_2} + b_3 \cdot \underbrace{\left(- \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right)}_{=\mathcal{B}_3} =$$

$$= c_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}_{=\mathcal{C}_1} + c_2 \cdot \underbrace{\left(- \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)}_{=\mathcal{C}_2} + c_3 \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}_{=\mathcal{C}_3}.$$

Эти формулы называются разложениями определителя по соответствующему столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\mathcal{A}_1+a_2\mathcal{A}_2+a_3\mathcal{A}_3 = b_1\mathcal{B}_1+b_2\mathcal{B}_2+b_3\mathcal{B}_3 = c_1\mathcal{C}_1+c_2\mathcal{C}_2+c_3\mathcal{C}_3.$$

6.9. Замечание. Поскольку определитель не меняется при транспонировании матрицы, имеют место аналогичные разложения по строкам:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\mathcal{A}_1+b_1\mathcal{B}_1+c_1\mathcal{C}_1 = a_2\mathcal{A}_2+b_2\mathcal{B}_2+c_2\mathcal{C}_2 = a_3\mathcal{A}_3+b_3\mathcal{B}_3+c_3\mathcal{C}_3.$$

6.10. Теорема (фальшивое разложение определителя)**.** *Сумма произведений элементов столбца определителя на алгебраические элементы* другого *столбца равно нулю, например,*

$$a_1\mathcal{B}_1 + a_2\mathcal{B}_2 + a_3\mathcal{B}_3 = 0, \quad a_1\mathcal{C}_1 + a_2\mathcal{C}_2 + a_3\mathcal{C}_3 = 0.$$

Аналогичное свойство имеет место для строк, например,

$$a_1\mathcal{A}_2 + b_1\mathcal{B}_2 + c_1\mathcal{C}_2 = 0, \quad a_3\mathcal{A}_1 + b_3\mathcal{B}_1 + c_3\mathcal{C}_1 = 0.$$

E. Формулы Крамера. Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3. \end{cases}$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

называются *основной* и *расширенной* матрицами системы соответственно. Введя в рассмотрение столбцы

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

мы можем записать систему в виде

$$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z = \boldsymbol{p}.$$

Пусть (x, y, z) — решение системы. Это означает, что столбец $\boldsymbol{p}$ является линейной комбинацией столбцов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ с коэффициентами x, y, z:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z.$$

Рассмотрим определитель $|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$:

$$|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = \Big|\underbrace{\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z}_{=\boldsymbol{p}},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\Big| =$$
$$= |\boldsymbol{a}x, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{b}y, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{c}z, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| =$$
$$= x\,|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| + y\,\underbrace{|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|}_{=0} + z\,\underbrace{|\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|}_{=0},$$

откуда, при условии $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| \neq 0$, получаем

$$x = \frac{|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|} = \frac{\det A_x}{\det A}.$$

Аналогично получаются формулы для y, z:

$$y = \frac{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|} = \frac{\det A_y}{\det A}, \quad z = \frac{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|} = \frac{\det A_z}{\det A},$$

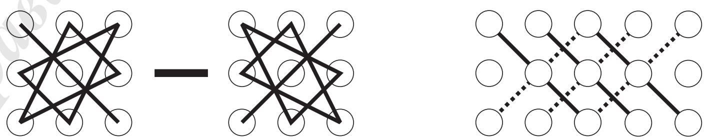
где определители $\det A_x$, $\det A_y$, $\det A_z$ получены из определителя $\det A$ заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов уравнений системы.

Формулы Крамера дают решение в случае, когда определитель $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$ основной матрицы системы отличен от нуля, и при этом доказывают единственность этого решения. Если же $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = 0$, то формулы Крамера неприменимы; в этом случае система может либо не иметь решений, либо иметь более одного решения.

F. Полное разложение определителя третьего порядка. Вычисляя алгебраические дополнения, входящие в разложение определителя третьего порядка по элементам какого-либо столбца, получаем следующую формулу, называемую *полным разложением определителя*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Правая часть формулы представляет собой сумму шести слагаемых, каждое из которых является произведением трёх элементов определителя, причём три слагаемых берутся со знаком $+$, а три остальных — со знаком $-$. Для запоминания этих произведений и их знаков имеются следующие мнемонические правила:



Во второй из этих схем к матрице приписаны справа её первые два столбца; произведения элементов, соединённых на схеме сплошной линией, входят в полное разложение определителя со знаком $+$, а элементов, соединённых пунктирной линией, — со знаком $-$. *Пользоваться этими* *правилами для практического вычисления определителей крайне нежелательно, потому что они приводят к большому объёму вычислений; кроме того, при вычислении произведений легко ошибиться в знаке.*

G. Определитель порядка n. Понятие определителя порядка n аналогично понятию определителя порядка 3.

Рассмотрим квадратную $(n\times n)$-матрицу A; будем считать, что структурными элементами этой матрицы являются не отдельные её элементы, а столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ & & \ddots & \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \Big[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\Big],$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \ \dots, \ \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}.$$

6.11. Определение. *Определитель* (*детерминант*) *порядка* n — это функция

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R},$$

областью определения которой является множество всех вещественных $(n \times n)$-матриц, либо функция

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ сомножителей}} \to \mathbb{R},$$

n аргументов, каковыми являются n-элементные столбцы, обладающая следующими свойствами:

(1) полилинейность по столбцам (т.е. линейность по каждому столбцу):

$$\det\big[\boldsymbol{a}_1' + \boldsymbol{a}_1'', \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\big] = \det\big[\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\big] + \det\big[\boldsymbol{a}_1'', \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\big],$$
$$\det\big[\alpha\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\big] = \alpha\det\big[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\big],$$

и аналогично для всех остальных столбцов;

(2) кососимметричность: при перестановке любых двух столбцов определитель меняет знак на противоположный, например,

$$\det\big[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n\big] = -\det\big[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\big];$$

(3) нормировка:

$$\det \mathbb{1} = 1$$

(определитель единичной матрицы равен 1).

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если её определитель отличен от нуля, и *вырожденной* в противном случае.

Свойства полилинейности, кососимметричности и нормировки, входящие в определение детерминанта, будем называть *характеристическими*, или *основными*. Из них вытекает ряд *производных* свойств, полезных при практическом вычислении определителей.

6.12. Теорема. (1) *Определитель порядка n не меняется при транспонировании матрицы*:

$$\det A^T = \det A.$$

Это означает, что все утверждения, сформулированные и доказанные для столбцов определителя, имеют аналоги, справедливые для строк.

(2) *Определитель с двумя пропорциональными* (*в частности, равными*) *столбцами равен нулю.*

(3) *Определитель не изменится, если к любому его столбцу прибавить произвольную линейную комбинацию остальных столбцов.*

(4) *Определитель, содержащий нулевой столбец, равен нулю.*

6.13. Теорема. *Определитель порядка n равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы.*

Вычисление определителей порядка n производится с помощью разложения по столбцам или строкам. Обратите внимание, что *для определителей порядка n не существует никаких формул, правил или алгоритмов, подобных правилам для определителей порядка* 3, *приведённым на с.* 82 в п. F.

Минором M_k^j произвольного элемента a_k^j определителя порядка n называется определитель порядка $n-1$, полученный из исходного определителя вычёркиванием j-й строки и k-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_k^j.

Алгебраическим дополнением $\mathcal{A}_k^j$ произвольного элемента a_k^j определителя порядка n называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{j+k}$, где j и k — номера строки и столбца, на пересечении которых стоит рассматриваемый элемент:

$$\mathcal{A}_k^j = (-1)^{j+k} M_k^j.$$

6.14. Теорема. *Определитель порядка n равен сумме произведений элементов любого столбца на их алгебраические дополнения*:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j.$$

Имеет место аналогичное разложение по строке:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j.$$

6.15. Теорема (фальшивое разложение определителя)**.** *Сумма произведений элементов столбца определителя на алгебраические элементы* *другого столбца равно нулю*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_l^j = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \det A, & k = l. \end{cases}$$

Аналогичное свойство имеет место для строк:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^l = \delta^{jl} = \begin{cases} 0, & j \neq l, \\ \det A, & j = l. \end{cases}$$

Для систем n уравнений с n неизвестными также имеют место формулы Крамера, однако на практике они не используются, поскольку приводят к большому объёму вычислений.

H. Определитель произведения матриц.

6.16. Теорема. *Если A и B — квадратные матрицы одного порядка, то*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

6.17. Следствие. *Если матрица A имеет обратную, то*

$$\det A^{-1} = \bigl(\det A\bigr)^{-1}.$$

I. Вычисление обратной матрицы.

6.18. Определение. Пусть A — квадратная матрица порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений $\mathcal{A}_k^j$ элементов a_k^j матрицы A и транспонируем её:

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1^1 & \mathcal{A}_2^1 & \dots & \mathcal{A}_n^1 \\ \mathcal{A}_1^2 & \mathcal{A}_2^2 & \dots & \mathcal{A}_n^2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathcal{A}_1^n & \mathcal{A}_2^n & \dots & \mathcal{A}_n^n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{рование}]{\text{транспони-}} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1^1 & \mathcal{A}_1^2 & \dots & \mathcal{A}_1^n \\ \mathcal{A}_2^1 & \mathcal{A}_2^2 & \dots & \mathcal{A}_2^n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathcal{A}_n^1 & \mathcal{A}_n^2 & \dots & \mathcal{A}_n^n \end{pmatrix}$$

Полученная матрица называется *присоединённой* к матрице A и обозначается $A^\vee$.

6.19. Теорема. *Матрица A обратима тогда и только тогда, когда она невырождена, т.е.* $\det A \neq 0$. *Обратная матрица A^{-1} выражается формулой*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\vee,$$

где $A^\vee$ — присоединённая матрица.

6.20. Теорема. *Произведение матрицы A на её присоединённую $A^\vee$ равно единичной матрице, умноженной на* $\det A$*:*

$$A \cdot A^\vee = \det A \cdot \mathbb{1}.$$

2. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение определителя второго порядка.
2. Перечислите свойства определителя второго порядка.
3. Выведите формулы Крамера для системы двух уравнений с двумя неизвестными.
4. Сформулируйте определение определителя третьего порядка.
5. Перечислите свойства определителя третьего порядка.
6. Что такое минор элемента определителя? Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя? В чём различие между этими понятиями?
7. Запишите формулы разложения определителя по любому столбцу.
8. Сформулируйте теорему о фальшивом разложении определителя.
9. Запишите полное разложение определителя третьего порядка.
10. Запишите формулы Крамера для системы трёх уравнений с тремя неизвестными.
11. Сформулируйте теорему об определителе произведения матриц.
12. Что такое невырожденная матрица?
13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.

3. Примеры решения задач

Пример 6.1. Вычислите определители

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 & 24695 \end{vmatrix}.$$

Решение. (a) Имеем

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

(b) Для вычисления определителя вычтем из его второй строки удвоенную первую строку:

$$\begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 & 24695 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 - 2\cdot 12345 & 24695 - 2\cdot 12347 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12345\cdot 1 - 12347\cdot 1 = -2.$$

Пример 6.2. Решите систему уравнений с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} -2x + 3y = 12, \\ 11x - 6y = -7. \end{cases}$$

Решение. 1. Вычислим определители, участвующие в формулах Крамера:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 11 & -6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-6) - 3\cdot 11 = 12 - 33 = -21,$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} = 12\cdot(-6) - 3\cdot(-7) = -72 + 21 = -51,$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 11 & -7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-7) - 12\cdot 11 = 14 - 132 = -118.$$

По формулам Крамера получаем

$$x = \frac{\det A_x}{A} = \frac{17}{7}, \quad y = \frac{\det A_y}{A} = \frac{118}{21}.$$

2. Запишем систему в матричной форме $AX = B$, введя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу A^{-1} с помощью формулы из теоремы 5.6 (см. с. 87):

$$A^{-1} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -11 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -11 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{11}{21} & \frac{2}{21} \end{pmatrix}.$$

Умножая обе части уравнения $AX = B$ на A^{-1} слева и учитывая, что $A^{-1}A = \mathbb{1}$, получим

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{11}{21} & \frac{2}{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ \frac{118}{21} \end{pmatrix}.$$

Пример 6.3. При любом значении p решите систему уравнений

$$\begin{cases} (p+2)x & - & 3y & = & p, \\ x & + & (p-2)y & = & -1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель основной матрицы системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} p+2 & -3 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 1.$$

Если $p \neq \pm 1$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} p & -3 \\ -1 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3,\ x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{(p+1)(p-3)}{(p-1)(p+1)} = \frac{p-3}{p-1},$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} p+2 & p \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2p - 2, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2(p+1)}{(p-1)(p+1)} = -\frac{2}{p-1}.$$

Если $p = -1$, то система имеет вид

$$\begin{cases} x - 3y = -1, \\ x - 3y = -1, \end{cases}$$

т.е. состоит из двух одинаковых уравнений. Взяв y произвольно, $y = c$, найдём с помощью этого уравнения $x = 3c - 1$.

Если $p = 1$, то система имеет вид

$$\begin{cases} 3x - 3y = \ \ 1, \\ \ x - \ y = -1; \end{cases}$$

полученные уравнения противоречивы, так что система не имеет решений.

Ответ: при $p \neq \pm 1$ решение единственно: $\left(\dfrac{p-3}{p-1}; -\dfrac{2}{p-1}\right)$; при $p = -1$ решений бесконечно много: $(3c-1; c)$, где c — произвольное число; при $p = 1$ решений нет.

Пример 6.4. Докажите, что при любых вещественных a, b, c уравнение

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$$

имеет вещественные корни.

Решение. Раскрывая определитель, получим квадратное уравнение

$$(a-x)(c-x) - b^2 = 0 \iff x^2 - x(a+c) + (ac - b^2) = 0.$$

Его дискриминант неотрицателен,

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a-c)^2 + b^2 \geqslant 0,$$

так что уравнение имеет вещественные корни.

Пример 6.5. Пусть все элементы матрицы A второго порядка являются дифференцируемыми функциями одной переменной x, так что определитель $\det A$ этой матрицы также является функцией от x. Докажите, что $\det A$ — дифференцируемая функция, причём имеет место формула

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' = \Big(a(x)d(x) - b(x)c(x)\Big)' =$$

$$= \underline{a'(x)d(x)} + \underline{a(x)d'(x)} - \underline{b'(x)c(x)} - \underline{b(x)c'(x)} =$$

$$= \Big(a'(x)d(x) - b'(x)c(x)\Big) + \Big(a(x)d'(x) - b(x)c'(x)\Big) =$$

$$= \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

Пример 6.6. Не раскрывая определителя, докажите, что он равен нулю:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. (a) Если из второго столбца вычесть сумму первого и третьего, то получим определитель с нулевым столбцом.

(b) Если к первому столбцу определителя прибавить второй, то получится столбец, все элементы которого равны $a+b+c$; он пропорционален третьему столбцу, так что определитель равен нулю по теореме 6.12.

Пример 6.7. Вычислите определители

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. (a) Преобразуем определитель так, чтобы в его первом столбце образовались два нулевых элемента; после этого разложим определитель по первому столбцу. Итак, ко второй строке прибавим первую, умноженную на -2:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \urcorner^{-2} \\ \leftarrow\!\lrcorner_{+} \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

(поскольку во второй строке образовались два нулевых элемента, немного изменим наши первоначальные намерения и раскроем определитель по второй строке)

$$= -(-7) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 91$$

(обратите внимание на минус перед (-7), появившийся в силу соотношения между минорами и алгебраическими дополнениями).

(b) Для вычисления второго определителя попытаемся получить нули в третьем столбце; для этого к первой строке прибавим утроенную вторую строку:

$$\begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & \mathbf{-1} \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow^{+} \\ \lrcorner_{3} \end{array} = \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

и ко второй строке прибавим третью строку, после чего разложим определитель по третьему столбцу:

$$= \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow^{+} \\ \lrcorner \end{array} = \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 16 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & \mathbf{1} \end{vmatrix} =$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 35 & 14 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot (45 - 32) = 91;$$

здесь мы вынесли за знак определителя общий множитель элементов первой строки, равный 7.

Пример 6.8. Для матрицы из примера 6.7(а) найдите обратную.

Решение. Вычислим обратную матрицу A^{-1} с помощью теоремы 6.19. Поскольку определитель равен 91 (см. пример 6.7(а)), обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$\mathcal{A}_1^1 = +\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad \mathcal{A}_2^1 = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2, \ \mathcal{A}_3^1 = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 26,$$

$$\mathcal{A}_1^2 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13, \quad \mathcal{A}_2^2 = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 13, \ \mathcal{A}_3^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -13,$$

$$\mathcal{A}_1^3 = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14, \ \mathcal{A}_2^3 = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad \mathcal{A}_3^3 = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим матрицу из найденных алгебраических дополнений; после транспонирования из неё получается присоединённая матрица:

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 26 \\ 13 & 13 & -13 \\ -14 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{рование}]{\text{транспони-}} A^{\vee} = \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{\vee} = \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.9. Вычислите определитель порядка 4:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя свойства определителя, преобразуем его так, чтобы в какой-либо строке или столбце появилось много нулевых элементов. Например, легко получить нулевые элементы во втором столбце, прибавив вторую строку, умноженную на подходящие коэффициенты, ко всем остальным строкам:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & \mathbf{1} & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 0 & -11 & 10 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 11 & -5 \\ 6 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

После этого можно раскрыть определитель по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 11 & 0 & -11 & 10 \\ 3 & \mathbf{1} & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 11 & -5 \\ 6 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & -11 & 10 \\ -2 & 11 & -5 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя последнюю строку полученного определителя третьего порядка, умноженную на подходящий коэффициент, получаем нули во втором столбце:

$$\begin{vmatrix} 11 & -11 & 10 \\ -2 & 11 & -5 \\ 6 & \mathbf{-1} & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -55 & 0 & -34 \\ 64 & 0 & 39 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель раскрываем по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} -55 & 0 & -34 \\ 64 & 0 & 39 \\ 6 & \mathbf{-1} & 4 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} -55 & -34 \\ 64 & 39 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 64 & 39 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -14 & 39 \end{vmatrix} = 31.$$

Пример 6.10. Решите систему уравнений с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 2x + 4y - z = 7, \\ -4x + 5y + z = 9. \end{cases}$$

Решение. 1. Вычислим определители, участвующие в формулах Крамера. Определитель основной матрицы системы был найден в примере 6.7:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 91.$$

Для нахождения значения неизвестной x нужен определитель матрицы, полученной из основной матрицы системы заменой её первого столбца на столбец правых частей уравнений; этот определитель также был вычислен в примере 6.7:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 91.$$

При вычислении определителей

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ -4 & 9 & 1 \end{vmatrix}, \quad \det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

попытаемся получить нули в первом столбце на месте выделенных элементов аналогично тому, как это было сделано выше при вычислении $\det A$; после этого каждый из полученных определителей разложим по элементам первого столбца:

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ -4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 0 & -21 & -7 \\ 0 & 65 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -21 & -7 \\ 65 & 13 \end{vmatrix} = 182,$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -21 \\ 0 & 13 & 65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -21 \\ 13 & 65 \end{vmatrix} = 273.$$

Теперь находим решение системы:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{91}{91} = 1, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{182}{91} = 2, \quad z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{273}{91} = 3.$$

2. Запишем систему в матричной форме $AX = B$, введя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица была вычислена выше в примере 6.8:

$$A^{-1} = \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно найти решение системы:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Задачи для самостоятельного решения

6.1. Вычислите следующие определители второго порядка; если определитель равен нулю, укажите линейную зависимость его столбцов и линейную зависимость его строк:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 10 & 15 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} n-1 & n \\ n & n+1 \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} \sin x + \sin y & \cos y + \cos x \\ \cos y - \cos x & \sin x - \sin y \end{vmatrix}$;

(g) $\begin{vmatrix} a^2 - ab + b^2 & a - b \\ a^2 + ab + b^2 & a + b \end{vmatrix}$; (h) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

6.2. Для данных матриц найдите обратные:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

6.3. Решите системы уравнений с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы:

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ -5x + 4y = -3; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -5x + 2y = -12, \\ 3x - 4y = 5; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 4x + 3y = 5; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 4x + 3y = 5. \end{cases}$

[Указание: используйте результат предыдущей задачи.]

6.4. Для всех значений параметра p решите системы уравнений:

(a) $\begin{cases} (p+2)x + 2py = 4, \\ 5x + (p+3)y = 5; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} (p+3)x + 15y = p, \\ px + (p+4)y = p-2. \end{cases}$

6.5. Известно, что числа 737, 871, 938 делятся на 67. Не вычисляя определителя, докажите, что число $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & 1 \\ 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ также делится на 67.

6.6. Вычислите определители третьего порядка:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} c & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & c \end{vmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ba & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix};$$

$$\text{(g)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}; \quad \text{(h)} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ x & y & z \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{(i)} \begin{vmatrix} 0 & x+1 & 1-x \\ 1-x & 0 & x+1 \\ x+1 & 1-x & 0 \end{vmatrix}.$$

6.7. Вычислите определители третьего порядка:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}.$$

6.8. Для данных матриц найдите обратные:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 10 & -11 \\ 2 & -11 & 30 \end{pmatrix}.$$

6.9. Решите следующие системы уравнений с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x + y - 3z = 8, \\ -x + 2y + 5z = -5, \\ -3x - y + 4z = -11; \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x + 2y + 4z = 17, \\ 2x + 5y - 2z = 6, \\ 4x - 2y - 3z = -9; \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} 5x + 3y + 5z = 5, \\ 4x - y + 4z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 6; \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 4, \\ -3x + 2y - 3z = 4, \\ -3x - 3y + 2z = 4; \end{cases}$$

$$\text{(e)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 10, \\ 2x + 5y + 8z = 24, \\ 3x + 8y + 14z = 39; \end{cases} \qquad \text{(f)} \begin{cases} x - 3y + 2z = -5, \\ -3x + 10y - 11z = 12, \\ 2x - 11y + 30z = 6. \end{cases}$$

[Указание: используйте результат предыдущей задачи.]

6.10. Вычислите определители четвёртого порядка:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \\ -4 & -4 & -1 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} -1 & 4 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ a & b & c & d \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

ГЛАВА 7

Алгоритм Гаусса—Жордана

1. Основные понятия и факты

А. Матрицы упрощённого вида. Назовём *ведущим элементом* строки первый (слева) ненулевой элемент этой строки.

Говорят, что матрица имеет *упрощённый вид*, если она имеет следующую структуру:

(a) ведущий элемент каждой ненулевой строки равен единице и является единственным ненулевым элементом в своём столбце; соответствующие столбцы называются *базисными*;
(b) ведущий элемент каждой строки располагается строго правее ведущего элемента строки, лежащей выше;
(c) все нулевые строки располагаются ниже всех ненулевых; ненулевые строки также называются *базисными*.

Таким образом, матрица упрощённого вида выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix}
\boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & * \\
0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & 0 & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{1} & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix};$$

здесь выделены ведущие элементы строк и базисные столбцы.

Очевидны следующие свойства матриц упрощённого вида:

(i) базисные столбцы матрицы упрощённого вида являются последовательными столбцами единичной матрицы;
(ii) все остальные столбцы являются линейными комбинациями *предшествующих* базисных столбцов.

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными преобразованиями строк*:

(1) перестановка двух строк местами;
(2) умножение любой строки на ненулевое число;
(3) прибавление к любой строке другой строки, умноженной на произвольное число;
(4) [удаление из матрицы нулевых строк].

7.1. Теорема. *Любую матрицу можно привести к упрощённому виду с помощью элементарных преобразований строк.*

B. Алгоритм Гаусса—Жордана. Алгоритм Гаусса—Жордана позволяет привести к упрощённому виду матрицу, содержащую m строк, не более чем за m шагов. Опишем один шаг алгоритма.

Шаг № k.

1. Среди строк матрицы с номерами $k, \ldots, m$ выбираем одну из строк с наименьшим количеством нулей, считая от начала строки. Эту строку назовём *ведущей строкой*, её первый ненулевой элемент был назван выше *ведущим элементом. Ведущим столбцом* назовём столбец, в котором располагается ведущий элемент.
2. Разделим ведущую строку на её ведущий элемент; в полученной новой строке ведущий элемент будет равен 1.
3. Переставим ведущую строку на k-е место.
4. Вычтем из каждой строки матрицы ведущую строку, умноженную на коэффициенты, подобранные таким образом, чтобы все элементы ведущего столбца (кроме ведущего элемента) обратились в нуль. После этого ведущий столбец будет представлять собой k-й столбец единичной матрицы.

Процесс завершается, когда каждая строка матрицы уже побывала в роли ведущей строки или когда ведущую строку выбрать невозможно.

На практике для проведения элементарных преобразований строк (безотносительно к алгоритму Гаусса—Жордана) удобно пользоваться следующим рецептом, который называется *правилом прямоугольников*:

(i) выбирается какая-либо ненулевая строка A^s и в ней какой-либо ненулевой элемент a_t^s (будем называть их *разрешающими*); разрешающая строка переписывается без изменений;
(ii) все элементы разрешающего столбца A_t, (т.е. столбца, в котором содержится разрешающий элемент), кроме самого разрешающего элемента, заменяются нулями;
(iii) каждый элемент a_j^i матрицы, не принадлежащий разрешающей строке или разрешающему столбцу, заменяется на элемент $a_j^i a_t^s - a_t^i a_j^s$.

Это правило можно схематически проиллюстрировать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a^i_j & \cdots & a^i_t & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a^s_j & \cdots & \boldsymbol{a^s_t} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a^i_j a^s_t - a^i_t a^s_j & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a^s_j & \cdots & \boldsymbol{a^s_t} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}.$$

C. Алгоритм Гаусса. *Алгоритм Гаусса* отличается от алгоритма Гаусса—Жордана тем, что при выполнении элементарных преобразований на каждом шаге обращают в нуль не все элементы ведущего столбца (за исключением, разумеется, ведущего элемента), а только элементы, лежащие ниже ведущего элемента. В результате матрица приводится к так называемому *ступенчатому виду по строкам*:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Матрица ступенчатого вида имеет следующую структуру:

(1) *ведущий элемент* каждой строки (т.е. первый ненулевой элемент строки) располагается строго правее ведущего элемента строки, лежащей выше;

(2) все нулевые строки располагаются ниже всех ненулевых.

В отличие от определения матрицы упрощённого вида здесь отсутствует требование, чтобы ведущий элемент каждой ненулевой строки был равен единице и являлся единственным ненулевым элементом в своём столбце.

D. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

7.2. Теорема. *Пусть A — некоторая матрица, $R(A)$ — матрица, полученная из A элементарными преобразованиями строк R. Тогда*

$$R(A) = R(\mathbb{1}) \cdot A,$$

где $\mathbb{1}$ — *единичная матрица*, $R(\mathbb{1})$ — *матрица, полученная из единичной с помощью тех же самых элементарных преобразований строк* R. *Матрица* $R(\mathbb{1})$, *называемая матрицей элементарных преобразований, обратима.*

7.3. Теорема. *Пусть матрица* A' *получена из матрицы* A *элементарными преобразованиями строк.*

(1) *Если столбцы матрицы* A *линейно независимы, то столбцы матрицы* A' *также линейно независимы.*

(2) *Если между столбцами матрицы* A *имеется линейная зависимость*

$$\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \cdots + \alpha^k A_n = O,$$

то соответствующие столбцы матрицы A' *связаны такой же линейной зависимостью:*

$$\alpha^1 A'_1 + \alpha^2 A'_2 + \cdots + \alpha^k A'_n = O.$$

7.4. Теорема. *В любой матрице количество линейно независимых строк равно количеству линейно независимых столбцов.*

7.5. Определение. *Рангом* матрицы называется количество её линейно независимых строк (столбцов).

7.6. Теорема. *При элементарных преобразованиях строк матрицы ранг не изменяется.*

Теорема 7.6 позволяет при помощи элементарных преобразований строк вычислять ранг матрицы. Для этого нужно привести матрицу приводится либо к упрощённому виду при помощи алгоритма Гаусса—Жордана (в этом случае помимо ранга можно установить и линейные зависимости между столбцами матрицы), либо к ступенчатому виду по строкам при помощи алгоритма Гаусса (в этом случае можно найти лишь ранг).

Выделим в прямоугольной матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ несколько строк с номерами $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ (всего k строк) и такое же количество столбцов с номерами $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ (ясно, что $k \leqslant \min\{m, n\}$) и образуем из элементов на их пересечении квадратную матрицу порядка k:

$$\begin{pmatrix}
a_1^1 & \dots & a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_2}^1 & \dots & a_{j_k}^1 & \dots & a_n^1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{i_1} & \dots & a_{j_1}^{i_1} & \dots & a_{j_2}^{i_1} & \dots & a_{j_k}^{i_1} & \dots & a_n^{i_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{i_2} & \dots & a_{j_1}^{i_2} & \dots & a_{j_2}^{i_2} & \dots & a_{j_k}^{i_2} & \dots & a_n^{i_2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{i_k} & \dots & a_{j_1}^{i_k} & \dots & a_{j_2}^{i_k} & \dots & a_{j_k}^{i_k} & \dots & a_n^{i_k} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^m & \dots & a_{j_1}^m & \dots & a_{j_2}^m & \dots & a_{j_k}^m & \dots & a_n^m
\end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
a_{j_1}^{i_1} & \dots & a_{j_2}^{i_1} & \dots & a_{j_k}^{i_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{j_1}^{i_2} & \dots & a_{j_2}^{i_2} & \dots & a_{j_k}^{i_2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{j_1}^{i_k} & \dots & a_{j_2}^{i_k} & \dots & a_{j_k}^{i_k}
\end{pmatrix};$$

будем называть её *подматрицей* (порядка k) матрицы A, соответствующей выбранным строкам и столбцам, и обозначать

$$A\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, \ldots\, i_k \\ j_1\, j_2\, \ldots\, j_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{i_1}_{j_1} & \ldots & a^{i_1}_{j_2} & \ldots & a^{i_1}_{j_k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^{i_2}_{j_1} & \ldots & a^{i_2}_{j_2} & \ldots & a^{i_2}_{j_k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^{i_k}_{j_1} & \ldots & a^{i_k}_{j_2} & \ldots & a^{i_k}_{j_k} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой подматрицы называется *минором* (порядка k) матрицы A, соответствующим выбранным строкам и столбцам.

7.7. Определение. Минор порядка r матрицы A называется *базисным*, если он отличен от нуля, а любой минор большего порядка равен нулю.

7.8. Теорема (теорема о базисном миноре)**.**

1. *Столбцы* (*строки*), *образующие базисный минор, линейно независимы.*
2. *Любой столбец* (*строка*) *является линейной комбинацией столбцов* (*строк*), *образующих базисный минор.*

Е. Вычисление обратной матрицы. Вычисление матрицы, обратной к заданной квадратной матрице A, при помощи алгоритма Гаусса—Жордана осуществляется следующим образом: составляется блочная матрица $\left[A \mid \mathbb{1}\right]$ и выполняются элементарные преобразования строк, приводящие её левый блок к единичной матрице; тогда в правом блоке образуется матрица A^{-1}:

$$\left[\, A \mid \mathbb{1} \,\right] \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эл. преобр.}} \left[\, \mathbb{1} \mid A^{-1} \,\right].$$

Аналогичную методику можно использовать для вычисления матрицы $A^{-1}B$:

$$\left[\, A \mid B \,\right] \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эл. преобр.}} \left[\, \mathbb{1} \mid A^{-1}B \,\right].$$

Таким способом можно находить решения систем уравнений $AX = B$, где A — квадратная невырожденная матрица. Действительно, умножая обе части равенства $AX = B$ на обратную матрицу A^{-1}, получим $X = A^{-1}B$.

Чтобы найти матрицу BA^{-1}, можно либо использовать элементарные преобразования столбцов (вся теория таких преобразований строится аналогично), либо поступить следующим образом:

$$BA^{-1} = \Big(\big(BA^{-1}\big)^T\Big)^T = \Big((A^T)^{-1}B^T\Big).$$

Сначала вычисляется матрица $(A^T)^{-1}B^T$:

$$\left[\, A^T \mid B^T \,\right] \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эл. преобр.}} \left[\, \mathbb{1} \mid (A^T)^{-1}B^T \,\right],$$

после чего результат транспонируется.

2. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое матрица упрощённого вида? Приведите пример.
2. Перечислите свойства матриц упрощённого вида.
3. Перечислите элементарные преобразования строк.
4. Что такое ведущий элемент? ведущая строка? ведущий столбец?
5. Опишите шаг алгоритма Гаусса—Жордана.
6. Сформулируйте правило прямоугольников.
7. Что такое алгоритм Гаусса? В чём его отличие от алгоритма Гаусса—Жордана?
8. Сформулируйте теорему о связи элементарных преобразований строк матрицы и операции умножения матриц.
9. Сформулируйте теорему о сохранении линейной зависимости и независимости столбцов матрицы при элементарных преобразованиях строк.
10. Сформулируйте определение ранга матрицы. Как найти ранг матрицы?
11. Сформулируйте определение базисного минора матрицы. Всегда ли существует базисный минор? Единствен ли базисный минор?
12. Сформулируйте теорему о базисном миноре.
13. Как вычислить обратную матрицу при помощи алгоритма Гаусса—Жордана? Ответ обоснуйте.

3. Примеры решения задач

Пример 7.1. При помощи алгоритма Гаусса—Жордана приведите матрицу A к упрощённому виду, укажите её базисные столбцы и линейные зависимости между столбцами. Чему равен ранг матрицы A? Укажите какой-либо базисный минор матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Шаг 1. В качестве ведущей строки можно выбрать вторую или четвёртую строку; выберем вторую. Ведущий элемент второй строки равен 2; разделим ведущую строку на ведущий элемент и переставим её на первое место:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow\!\urcorner \\ :2 \;\leftarrow\!\lrcorner \\ \\ \\ \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ \mathbf{3} & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ведущей строкой теперь является первая строка, а ведущим столбцом — первый столбец.

Обратим в нуль все элементы ведущего (первого) столбца, кроме ведущего элемента; единственный такой элемент — это 3 в четвёртой строке (этот элемент выделен жирным шрифтом). Выполним следующее элементарное преобразование: к четвёртой строке добавим ведущую (первую) строку, умноженную на (-3):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ \mathbf{3} & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Первый столбец матрицы теперь представляет собой первый столбец единичной матрицы порядка 4.

Шаг 2. На втором шаге в качестве ведущей строки можно выбрать вторую, третью или четвёртую строку. Выберем третью, разделим её на ведущий элемент (-1) (он выделен) и переставим на второе место:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & \mathbf{-1} & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} :(-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & \mathbf{-\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Ведущей строкой теперь является вторая строка, а ведущим столбцом — второй столбец.

Обратим в нуль все элементы ведущего (второго) столбца, кроме ведущего элемента (они выделены жирным шрифтом). Выполним следующие элементарные преобразования:

(1) к первой строке прибавим ведущую (вторую) строку, умноженную на $(-1/2)$;
(2) к третьей строке прибавим ведущую (вторую) строку, умноженную на 2;
(3) к четвёртой строке прибавим ведущую (вторую) строку, умноженную на $1/2$.

Результат выполнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & \mathbf{-\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец матрицы теперь представляет собой второй столбец единичной матрицы порядка 4.

Шаг 3. В качестве ведущей строки можно выбрать только четвёртую строку. Делим эту строку на её ведущий элемент $(-1/2)$ (он выделен) и переставляем на третье место:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad :\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \mathbf{\frac{1}{2}} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \mathbf{-1} & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ведущей строкой теперь является третья строка, а ведущим столбцом — четвёртый столбец.

Обратим в нуль элементы ведущего (четвёртого) столбца, кроме ведущего элемента (они выделены жирным шрифтом), для чего выполним следующие элементарные преобразования:

(1) к первой строке прибавим ведущую (третью) строку, умноженную на $(-1/2)$;

(2) ко второй строке прибавим ведущую (третью) строку.

Результат выполнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \mathbf{\frac{1}{2}} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \mathbf{-1} & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Четвёртый столбец матрицы теперь представляет собой третий столбец единичной матрицы порядка 4.

Ещё один шаг выполнить невозможно, так как четвертую строку нельзя выбрать в качестве ведущей: в ней нет ненулевых элементов. Процедура закончена, полученная матрица имеет упрощённый вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её первый, второй и четвёртый столбцы (A'_1, A'_2, A'_4) являются базисными (они совпадают соответственно с первым, вторым и третьим столбцами единичной матрицы размера порядка 4), а остальные столбцы являются линейными комбинациями базисных:

$$\begin{aligned} A'_3 &= 2A'_1 - 3A'_2, \\ A'_5 &= A'_1 - 2A'_2 + 2A'_4, \\ A'_6 &= -A'_1 + 3A'_2 + 2A'_4. \end{aligned}$$

Коэффициенты этих линейных комбинаций — не что иное, как элементы соответствующих столбцов преобразованной матрицы.

Как известно, элементарные преобразования строк не меняют линейные зависимости между столбцами (теорема 7.3); поэтому в исходной матрице A базисными столбцами являются столбцы A_1, A_2 и A_4, а остальные столбцы являются линейными комбинациями базисных:

$$A_3 = 2A_1 - 3A_2,$$
$$A_5 = A_1 - 2A_2 + 2A_4,$$
$$A_6 = -A_1 + 3A_2 + 2A_4;$$

эти соотношения легко проверяются прямым вычислением, например,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{A_3} = 2\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{A_1} - 3\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A_2}$$

Поскольку количество линейно независимых (базисных) столбцов матрицы равно трём, $\operatorname{rk} A = 3$.

Столбцы A_1, A_2 и A_4, будучи линейно независимыми, могут входить в состав базисного минора[1]. Рассмотрим подматрицу, образованную первым, вторым и четвёртым столбцами и первой, второй и третьей строками матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, определитель полученной подматрицы равен нулю (в ней первая и третья строки пропорциональны) и потому базисным минором не является. Рассмотрим подматрицу, образованную первым, вторым и четвёртым столбцами и первой, второй и четвёртой строками матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} 1\,2\,4 \\ 1\,2\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Раскрывая определитель этой подматрицы по последнему столбцу, находим её определитель, равный (-2). Этот определитель является одним из базисных миноров матрицы A; он образован первым, вторым и четвёртым столбцами и первой, второй и четвёртой строками матрицы A.

Пример 7.2. Докажите правило прямоугольников.

Решение. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \boldsymbol{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

[1]Отметим, что можно выбрать и другой набор, состоящий из трёх линейно независимых столбцов матрицы A, в результате чего получится другой базисный минор.

Проведём один шаг алгоритма Гаусса—Жордана, выбирая в качестве разрешающей строки и разрешающего столбцы строку и столбец, на пересечении которых стоит элемент c. Целью является обращение в нуль всех элементов разрешающего столбца (разумеется, кроме самого элемента c). Для уничтожения элемента r (при очевидном условии $r \neq 0$, иначе ничего преобразовывать не требуется) выполним предварительно следующие вспомогательные элементарные преобразования:

(1) первую строку матрицы умножим на c;
(2) вторую (разрешающую) строку умножим на r;

в результате получим

$$\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ a & b & \boldsymbol{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot c \\ \cdot r \\ \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} cp & cq & \boldsymbol{cr} & cs \\ ra & rb & \boldsymbol{rc} & rd \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Вычитая теперь из первой строки вторую (разрешающую) и после этого возвращая разрешающей строке её первоначальный вид (т.е. деля её на r), получим

$$\begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ ra & rb & \boldsymbol{rc} & rd \\ x & y & z & u \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ a & b & \boldsymbol{c} & d \\ x & y & z & u \end{pmatrix}.$$

Аналогично уничтожаем элемент z (если $z \neq 0$), для чего сначала выполняем вспомогательные преобразования:

(1) третью строку матрицы умножим на ведущий элемент c;
(2) вторую (ведущую) строку умножим на z;

в результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ za & zb & \boldsymbol{zc} & zd \\ cx & cy & \boldsymbol{cz} & cu \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки вторую (ведущую) и после этого возвращая ведущей строке её первоначальный вид, получим

$$\begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ za & zb & \boldsymbol{zc} & zd \\ cx-za & cy-zb & 0 & cu-zd \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} cp-ra & cq-rb & 0 & cs-rd \\ a & b & \boldsymbol{c} & d \\ cx-za & cy-zb & 0 & cu-zd \end{pmatrix}.$$

Цель достигнута: все элементы ведущего столбца, кроме ведущего элемента, стали равны нулю. Анализ выражений элементов полученной матрицы и приводит к правилу прямоугольников.

Пример 7.3. Приведите к упрощённому виду матрицу A, укажите её базисные столбцы и линейные зависимости между столбцами, найдите ранг и укажите какой-либо базисный минор:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & -8 \\ -2 & 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Шаг 1. Первая и вторая строки начинаются с нулей, поэтому в качестве разрешающей строки выбираем третью. Переставим её на первое место:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{3} & 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & -8 \\ -2 & 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Обратим в нуль все элементы разрешающего (первого) столбца, кроме самого́ разрешающего элемента, используя правило прямоугольников; при этом вторую и третью строки преобразовывать не требуется, поскольку их элементы, стоящие в разрешающем столбце, уже равны нулю. Впрочем, удобно разделить вторую строку (которая станет разрешающей на следующем шаге) на (-1):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве разрешающей выбираем вторую строку; при этом разрешающим столбцом будет второй столбец. Применяя правило прямоугольников, получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & -8 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & -8 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 15 & 5 \end{pmatrix};$$

после этого разделим третью строку на 2, а четвёртую — на 5.

Шаг 3. В качестве разрешающей выбираем третью строку; при этом разрешающим столбцом будет пятый столбец:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следующий шаг выполнить невозможно, поскольку четвёртая строка (единственная, не побывавшая в роли ведущей) нулевая. Деля первую строку на её ведущий элемент 3, получаем упрощённый вид матрицы:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисными столбцами являются первый, второй и пятый, т.е. столбцы A'_1, A'_2 и A'_5 — базисные в преобразованной матрице A', а столбцы A_1, A_2 и A_5 — базисные в исходной матрице A. Остальные столбцы матрицы A выражаются через базисные следующим образом:

$$A_3 = A_1+2A_2, \quad A_4 = -2A_1+3A_2, \quad A_6 = A_1+A_2+A_5, \quad A_7 = -3A_1+A_5.$$

Матрица A имеет три линейно независимых столбца; следовательно, $\operatorname{rk} A = 3$.

Найдём базисный минор. Столбцы A_1, A_2 и A_5, будучи линейно независимыми, могут входить в состав базисного минора. Рассмотрим подматрицу

$$A\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Её определитель равен 6 (его удобно вычислить, раскрыв по первому столбцу), т.е. является одним из базисных миноров матрицы A.

Пример 7.4. Найдите матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Используя алгоритм, описанный в п. E (см. с. 100), и правило прямоугольников, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Итак, обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 7.5 (см. пример 6.2, с. 87)**.** Решите систему уравнений методом Гаусса—Жордана:

$$\begin{cases} -2x + 3y = 12, \\ 11x - 6y = -7. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 12 \\ 11 & -6 & -7 \end{array}\right)$$

и приведём её к упрощённому виду, используя правило прямоугольников.

Шаг 1. В качестве ведущей строки выбираем первую, ведущим столбцом будет первый столбец, ведущий элемент (-2):

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{-2} & 3 & 12 \\ 11 & -6 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 12 \\ 0 & -21 & -118 \end{array}\right).$$

Шаг 2. В качестве ведущей строки выбираем вторую, ведущим столбцом будет второй столбец, ведущий элемент (-21):

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 12 \\ 0 & \boldsymbol{-21} & -118 \end{array}\right) \Rightarrow = \left(\begin{array}{cc|c} 42 & 0 & 102 \\ 0 & -21 & -118 \end{array}\right).$$

Разделив первую строку на 42, а вторую на (-21), получим

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 1 & \frac{118}{21} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{7}, \\ y = \frac{118}{21}. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ \frac{118}{21} \end{pmatrix}.$$

Применение метода Гаусса—Жордана в этом примере вряд ли приводит к упрощению решения по сравнению с методом Крамера (см. пример 6.2, с. 87): пересчёт элементов матрицы системы при помощи правила прямоугольников фактически повторяет вычисление определителей, фигурирующих в формулах Крамера.

Пример 7.6 (см. пример 6.10, с. 91)**.** Решите систему уравнений методом Гаусса—Жордана:

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 = 14, \\ 2x^1 + 4x^2 - x^3 = 7, \\ -4x^1 + 5x^2 + x^3 = 9. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 4 & -1 & 7 \\ -4 & 5 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

к упрощённому виду. Соответствующие выкладки приведём без комментариев, выделяя лишь разрешающую строку, разрешающий столбец и разрешающий элемент на каждом шаге:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 4 & -1 & 7 \\ -4 & 5 & 1 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \\ 0 & 13 & 13 & 65 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Итак, решение системы единственно и имеет вид $x^1 = 1$, $x^2 = 2$, $x^3 = 3$. Очевидно, объём вычислений здесь существенно меньше, нежели при использовании метода Крамера (см. пример 6.10, с. 91).

Пример 7.7. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Уравнение имеет вид $AX = B$, где $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, поэтому решением уравнения (если оно существует) должна быть матрица $X \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Способ 1. Поскольку матрица A обратима (обратная к ней была вычислена в примере 7.4), имеем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -7 & -8 & -12 \\ 17 & 24 & 25 & 32 \\ -10 & -13 & -13 & -16 \end{pmatrix}.$$

Способ 2, основанный на описанном в п. E алгоритме (см. с. 100), удобно применить, если матрица A^{-1} заранее не известна:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & -1 & -3 & -2 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & -9 & -11 & -16 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & -9 & -11 & -16 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -10 & -13 & -13 & -16 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -3 & -7 & -8 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & 24 & 25 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -13 & -13 & -16 \end{array}\right),$$

так что решением данного матричного уравнения является матрица

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -8 & -12 \\ 17 & 24 & 25 & 32 \\ -10 & -13 & -13 & -16 \end{pmatrix}.$$

4. Задачи для самостоятельного решения

7.1. Приведите следующие матрицы к упрощённому виду при помощи алгоритма Гаусса—Жордана. Укажите базисные столбцы и линейные зависимости между столбцами, определите ранг:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 & 3 & 13 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & -4 \\ 5 & 1 & 13 & -3 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{(c)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -7 & 0 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 11 & -3 & -11 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 3 & 10 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & 9 & 1 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & 2 & -1 & 9 & -3 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.2. Решите следующие квадратные системы уравнений с помощью алгоритма Гаусса—Жордана (ср. задачу 6.9):

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x + y - 3z = 8, \\ -x + 2y + 5z = -5, \\ -3x - y + 4z = -11; \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x + 2y + 4z = 17, \\ 2x + 5y - 2z = 6, \\ 4x - 2y - 3z = -9; \end{cases}$$

(c) $\begin{cases} 5x + 3y + 5z = 5, \\ 4x - y + 4z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 6; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z = 4, \\ -3x + 2y - 3z = 4, \\ -3x - 3y + 2z = 4; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 10, \\ 2x + 5y + 8z = 24, \\ 3x + 8y + 14z = 39; \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -5, \\ -3x + 10y - 11z = 12, \\ 2x - 11y + 30z = 6. \end{cases}$

7.3. Методом Гаусса—Жордана решите следующие квадратные системы (обратите внимание, что системы имеют одинаковые основные матрицы):

(a) $\begin{cases} 2x^1 - 2x^2 - 3x^3 - 4x^4 = 1, \\ 4x^1 - x^2 - 4x^3 - 5x^4 = 2, \\ 6x^1 - 9x^3 - 4x^4 = 3, \\ 8x^1 + x^2 - 14x^3 - 2x^4 = 4; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x^1 - 2x^2 - 3x^3 - 4x^4 = 4, \\ 4x^1 - x^2 - 4x^3 - 5x^4 = 3, \\ 6x^1 - 9x^3 - 4x^4 = 12, \\ 8x^1 + x^2 - 14x^3 - 2x^4 = 6. \end{cases}$

7.4. Для данных матриц найдите обратные методом Гаусса—Жордана (ср. задачу 6.8):

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 10 & -11 \\ 2 & -11 & 30 \end{pmatrix}$.

7.5. Найдите решение уравнений $AX = B$ и $YA = B$, где

(a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

7.6. Для данных матриц найдите обратные:

(a) $\begin{pmatrix} 14 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 10 & -5 & 3 \\ -2 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 8

Системы линейных уравнений

1. Основные понятия и факты

А. Системы линейных уравнений. Рассмотрим систему, состоящую из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \dots + a_n^1x^n = b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \dots + a_n^2x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \dots + a_n^mx^n = b^m. \end{cases}$$

Введём матрицы A и $\widetilde{A}$ — *основную* и *расширенную* матрицы системы, а также столбец неизвестных X и столбец правых частей B:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = \Big[A_1, A_2, \dots, A_n\Big], \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{array}\right) = \Big[A, B\Big], \qquad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

(напомним, что квадратные скобки мы используем для обозначения блочных матриц; см. с. 63). Тогда система может быть записана в матричном виде

$$AX = B,$$

а также в виде

$$A_1x^1 + A_2x^2 + \dots + A_nx^n = B.$$

Набор чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$ (столбец $X = \big(x^1, x^2, \dots, x^n\big)^T$) называется *решением* системы, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы получается верное числовое равенство (соответственно, при подстановке столбца в матричное уравнение получается верное матричное равенство).

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Две совместные системы называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают. Ясно, что эквивалентные системы содержат одинаковое число неизвестных; число же уравнений в них может быть различным. Несовместные системы будем считать эквивалентными только в случае, когда они содержат одинаковое количество неизвестных.

B. Однородные системы. Система линейных уравнений называется *однородной*, если правые части всех уравнений равны нулю:

$$\begin{cases} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n = 0, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^1x^n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \cdots + a_n^mx^n = 0; \end{cases}$$

в матричной записи

$$AX = O \quad \text{или} \quad A_1x^1 + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n = O.$$

Однородная система всегда совместна: числа $x^1 = x^2 = \cdots = x^n = 0$ (или, что то же, нулевой столбец) образуют её решение, называемое *тривиальным*. Однако однородная система может иметь и *нетривиальные* (т.е. ненулевые) решения.

8.1. Теорема. *Однородная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы её основной матрицы линейно зависимы.*

8.2. Теорема. *Если в однородной системе число неизвестных больше числа уравнений, то она имеет нетривиальное решение.*

8.3. Теорема. *Если X_1, X_2 — два решения однородной системы $AX = 0$, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.*

8.4. Определение. *Фундаментальное семейство решений* (или фундаментальная совокупность решений, или фундаментальная система решений, ФСР) однородной системы — это такой упорядоченный набор линейно независимых решений $X_1, X_2, \ldots, X_s$, что любое решение данной системы можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X = c^1X_1 + c^2X_2 + \cdots + c^sX_s,$$

где $c^1, c^2, \ldots, c^s$ — числовые коэффициенты. *Общим решением* системы называется выражение $c^1X_1 + c^2X_2 + \cdots + c^sX_s$, позволяющее с помощью надлежащего выбора чисел $c^1, c^2, \ldots, c^s$ получить любое решение однородной системы.

8.5. Теорема. *Количество s столбцов, образующих ФСР однородной системы, равно $s = n - r$, где n — количество неизвестных в системе, а r — ранг её основной матрицы.*

8.6. Определение. Матрица Φ, столбцами которой являются столбцы ФСР, называется *фундаментальной матрицей* данной системы:

$$\Phi = \Big[X_1, X_2, \ldots, X_s\Big].$$

Общее решение системы выражается через фундаментальную матрицу по формуле $X = \Phi C$, где $C = \big(c^1, c^2, \ldots, c^s\big)^T$ — столбец, состоящий из произвольных постоянных.

C. Неоднородные системы. Система $AX = B$ называется *неоднородной*, если $B \neq O$. Часто неоднородную систему $AX = B$ рассматривают вместе с однородной системой $AX = O$, которую называют *сопутствующей.*

8.7. Теорема. *Если X_1, X_2 — два решения неоднородной системы $AX = B$, то их разность $X_1 - X_2$ является решением сопутствующей однородной системы $AX = O$.*

8.8. Теорема (принцип линейной суперпозиции)**.** *Любое решение неоднородной системы* (*т.е. выражение для общего решения, ОРНС*) *можно представить в виде суммы некоторого частного решения этой неоднородной системы* (*ЧРНС*) *и подходящего решения однородной системы* (*т.е. выражения для её общего решения, ОРОС*)*:*

$$\text{ОРНС} = \text{ЧРНС} + \text{ОРОС}.$$

8.9. Теорема (теорема Кронекера—Капелли)**.** *Неоднородная система линейных уравнений $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда ранг её расширенной матрицы равен рангу основной матрицы:* $\operatorname{rk}\big[A|B\big] = \operatorname{rk} A$.

D. Однородные системы упрощённого вида.

8.10. Определение. Неизвестная x^k называется *базисной*, если она входит только в одно уравнение системы. Неизвестные, не являющиеся базисными, называются *свободными.*

8.11. Определение. Система называется *системой упрощённого вида*, если в каждом уравнении имеется базисная неизвестная; в случае, если некоторое уравнение содержит более одной базисной неизвестной, выбирается одна из них. В системе упрощённого вида количество базисных неизвестных равно количеству уравнений в системе.

Решение однородной системы упрощённого вида

$$\begin{cases} x^1 \qquad\qquad + a^1_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^1_n x^n = 0, \\ \quad x^2 \qquad\quad + a^2_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^2_n x^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x^r + a^r_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a^r_n x^n = 0 \end{cases}$$

легко найти, если все слагаемые, содержащие свободные неизвестные, перенести в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x^1 = -a^1_{r+1}x^{r+1} - \dots - a^1_n x^n, \\ x^2 = -a^2_{r+1}x^{r+1} - \dots - a^2_n x^n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^r = -a^r_{r+1}x^{r+1} - \dots - a^r_n x^n. \end{cases}$$

Если вместо свободных неизвестных $x^{r+1}, \dots, x^n$ подставлять произвольные числа и вычислять значения базисных неизвестных $x^1, \dots, x^r$ по указанным формулам, то полученный набор чисел $x^1, \dots, x^n$ будет представлять собой некоторое решение данной однородной системы.

Обозначив произвольные значения свободных неизвестных $x^{r+1}, \dots, x^n$ через $c^1, \dots, c^{n-r}$, представим общее решение системы в виде

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ x^{r+2} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^1_{r+1}c^1 - \dots - a^1_n c^{n-r} \\ -a^2_{r+1}c^1 - \dots - a^2_n c^{n-r} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1}c^1 - \dots - a^r_n c^{n-r} \\ c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^{n-r} \end{pmatrix} =$$

$$= c^1 \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} \\ -a^2_{r+1} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c^{n-r} \begin{pmatrix} -a^1_n \\ -a^2_n \\ \vdots \\ -a^r_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Столбцы, фигурирующие в последнем выражении, образуют фундаментальное семейство решений данной однородной системы, которое называется *нормальным ФСР (НФСР), соответствующим базисным неизвестным* $x^1, \dots, x^r$ *и свободным неизвестным* $x^{r+1}, \dots, x^n$: каждый столбец, входящий в нормальное фундаментальное семейство решений, получается, если значение одной из свободных неизвестных взять равным 1, а остальные положить равными нулю (соответствующие элементы столбцов выделены). Нормальная фундаментальная матрица рассматриваемой системы составлена из столбцов НФСР:

$$\Phi = \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} & \dots & -a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a^r_{r+1} & \dots & -a^r_n \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

выделенные элементы этой матрицы образуют единичную матрицу порядка $n-r$, откуда ясно, что $\operatorname{rk}\Phi = n-r$ (ср. с теоремой 8.5, с. 113).

E. Неоднородные системы упрощённого вида. Решение неоднородной системы упрощённого вида

$$\begin{cases} x^1 \quad\quad + a^1_{r+1}x^{r+1} + \dots + a^1_n x^n = b^1, \\ \quad x^2 \quad + a^2_{r+1}x^{r+1} + \dots + a^2_n x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad\quad x^r + a^r_{r+1}x^{r+1} + \dots + a^r_n x^n = b^r \end{cases}$$

может быть найдено аналогично: переписав систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = b^1 - a^1_{r+1}x^{r+1} - \dots - a^1_n x^n, \\ x^2 = b^2 - a^2_{r+1}x^{r+1} - \dots - a^2_n x^n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^r = b^r - a^r_{r+1}x^{r+1} - \dots - a^r_n x^n, \end{cases}$$

обнаруживаем, что её общее решение можно записать следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ x^{r+2} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЧРНС}} \underbrace{+ c^1 \begin{pmatrix} -a^1_{r+1} \\ \vdots \\ -a^r_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c^{n-r} \begin{pmatrix} -a^1_n \\ \vdots \\ -a^r_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ОРОС}}$$

(выделены свободные неизвестные). Фигурирующее здесь частное решение неоднородной системы $(b^1, \dots, b^r, 0, \dots, 0)^T$ называется *базисным решением, отвечающим базисным неизвестным* $x^1, \dots, x^r$ *и свободным неизвестным* $x^{r+1}, \dots, x^n$.

F. Решение произвольных систем. Чтобы решить систему произвольного вида, нужно преобразовать её к эквивалентной системе упрощённого вида.

Следующие преобразования системы уравнений переводят её в эквивалентную систему:

(1) перестановка двух уравнений местами;
(2) умножение любого уравнения системы на ненулевое число;
(3) прибавление к любому уравнению системы другого уравнения, умноженного на произвольное число;
(4) удаление из системы уравнения вида

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n = 0.$$

Эти преобразования систем линейных уравнений называются *элементарными преобразованиями.*

Вместо преобразований самой системы удобно выполнять преобразования расширенной матрицы этой системы; при этом элементарным преобразованиям системы соответствуют элементарные преобразования строк расширенной матрицы.

Таким образом, для решения произвольной системы (однородной или неоднородной) нужно сначала привести расширенную матрицу этой системы к упрощённому виду при помощи алгоритма Гаусса—Жордана, а затем выписать решение, как описано выше.

G. Составление системы линейных однородных уравнений по заданному ФСР. Чтобы найти систему линейных однородных уравнений, для которой данный набор линейно независимых столбцов $X_1, \dots, X_s$ образует фундаментальное семейство решений, нужно составить матрицу, столбцами которой являются векторы $X_1, \dots, X_s$ и вектор $X = (x^1, \dots, x^n)^T$, состоящий из неизвестных, и привести её к упрощённому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_s^1 & x^1 \\
x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_s^2 & x^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_1^s & x_2^s & \cdots & x_s^s & x^s \\
x_1^{s+1} & x_2^{s+1} & \cdots & x_s^{s+1} & x^{s+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_1^n & x_2^n & \cdots & x_s^n & x^n
\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & * \\
0 & 1 & \cdots & 0 & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & * \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & *
\end{array}\right).$$

Искомая система получится, если приравнять нулю выражения, образовавшиеся в правом нижнем углу последней матрицы (они выделены). Действительно, последний столбец матрицы является линейной комбинацией предыдущих тогда и только тогда, когда указанные выражения тождественно обращаются в нуль.

2. Контрольные вопросы и задания

1. Что такое однородная система линейных уравнений? неоднородная?
2. Что такое основная и расширенная матрицы системы уравнений?
3. Что такое решение системы? Какие системы называются совместными? несовместными?
4. Всегда ли совместна однородная система? неоднородная? Приведите примеры.
5. Что такое эквивалентные системы? Приведите примеры.
6. Сформулируйте достаточные условия существования нетривиальных решений однородной системы.
7. Сформулируйте и докажите теорему о линейной комбинации решений однородной системы.
8. Что такое фундаментальное семейство решений однородной системы уравнений? Что такое общее решение системы?
9. Что такое фундаментальная матрица однородной системы уравнений? Как записать общее решение системы с помощью фундаментальной матрицы?
10. Что такое нормальное фундаментальное семейство решений однородной системы уравнений? нормальная фундаментальная матрица?
11. Сформулируйте принцип линейной суперпозиции для решений неоднородных систем.
12. Что такое система упрощённого вида? Что такое базисная неизвестная? свободная неизвестная?
13. Как записать общее решение однородной системы упрощённого вида?
14. Как записать общее решение неоднородной системы упрощённого вида?
15. Перечислите элементарные преобразования, переводящие систему линейных уравнений в эквивалентную систему.
16. Как составить однородную систему линейных уравнений, имеющую заданное фундаментальное семейство решений?

3. Примеры решения задач

Пример 8.1. Запишите общее решение однородной системы упрощённого вида

$$\begin{cases} x^1 \qquad\; + 3x^3 \qquad + \;x^5 = 0, \\ \qquad x^2 + 4x^3 \qquad + 2x^5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x^4 + 2x^5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Базисными неизвестными являются x^1, x^2, x^4 (они выделены), свободными — x^3, x^5. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = -3x^3 - x^5, \\ x^2 = -4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = -x^5. \end{cases}$$

Если вместо свободных неизвестных x^3 и x^5 подставлять произвольные числа, $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, и вычислять x^1, x^2, x^4 по указанным формулам, то получим общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c^1 - c^2 \\ -4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ -c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{c^1 \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{X_1} + c^2 \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{X_2}}_{\text{ОРОС}}$$

(выделены свободные неизвестные). Нормальное фундаментальное семейство решений данной однородной системы уравнений состоит из столбцов X_1 и X_2. Нормальная фундаментальная матрица Φ данной системы состоит из столбцов X_1 и X_2, $\Phi = [X_1, X_2]$; общее решение системы выражается через неё следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix},$$

где c^1 и c^2 — произвольные постоянные. Обратите внимание, что выделенные элементы (значения свободных неизвестных) образуют единичную матрицу.

Пример 8.2. Запишите общее решение неоднородной системы упрощённого вида:

$$\begin{cases} x^1 \phantom{{}+x^2} + 3x^3 \phantom{{}+x^4} + x^5 = 1, \\ x^2 + 4x^3 + 2x^5 = 2, \\ x^4 + 2x^5 = 3. \end{cases} \tag{8.1}$$

Решение. Сопутствующая однородная система имеет вид

$$\begin{cases} x^1 \phantom{{}+x^2} + 3x^3 \phantom{{}+x^4} + x^5 = 0, \\ x^2 + 4x^3 + 2x^5 = 0, \\ x^4 + 2x^5 = 0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Базисными неизвестными в обеих системах (8.1) и (8.2) являются x^1, x^2, x^4 (они выделены). Перепишем системы в виде

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} x^1 = 1 - 3x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 - 4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 3 - x^5, \end{cases} \qquad \text{(B)} \quad \begin{cases} x^1 = -3x^3 - x^5, \\ x^2 = -4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = -x^5. \end{cases}$$

Частное решение неоднородной системы получаем, подставляя в (A) нулевые значения свободных неизвестных, а фундаментальное семейство решений однородной системы получаем из (B), выбирая сначала $x^3 = 1$ и $x^5 = 0$, а затем $x^3 = 0$ и $x^5 = 1$. Общее решение исходной системы (8.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3c^1 - c^2 \\ 2 - 4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 3 - c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЧРНС}} + \underbrace{c^1 \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{X_1} + c^2 \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{X_2}}_{\text{ОРОС}}$$

(здесь выделены значения свободных неизвестных).

Пример 8.3. Решите систему однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \phantom{-2x^1 +{}} x^2 + 2x^3 + 3x^4 + x^5 + 5x^6 + x^7 = 0, \\ - x^2 - 2x^3 - 3x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = 0, \\ 3x^1 \phantom{{}+x^2} + 3x^3 - 6x^4 + x^5 + 6x^6 - 8x^7 = 0, \\ -2x^1 + x^2 \phantom{{}+2x^3} + 7x^4 \phantom{{}+x^5+6x^6} + 6x^7 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную матрицу системы (поскольку система однородная, выписывать расширенную матрицу нет необходимости: при любых преобразованиях системы или расширенной матрицы нулевой столбец изменяться не будет):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & -8 \\ -2 & 1 & 0 & 7 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица была приведена к упрощённому виду в примере 7.3:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

здесь выделены базисные столбцы матрицы и коэффициенты при базисных неизвестных. Однородная система, соответствующая этой матрице, имеет вид

$$\begin{cases} x^1 \phantom{{}+x^2} + x^3 - 2x^4 \phantom{{}+x^5} + x^6 - 3x^7 = 0, \\ \phantom{x^1+{}} x^2 + 2x^3 + 3x^4 \phantom{{}+x^5} + 2x^6 \phantom{{}-3x^7} = 0, \\ \phantom{x^1+x^2+2x^3+3x^4+{}} x^5 + 3x^6 + x^7 = 0; \end{cases}$$

здесь выделены базисные неизвестные x^1, x^2, x^5; остальные неизвестные (x^3, x^4, x^6, x^7) являются свободными. Выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x^1 = -x^3 + 2x^4 - x^6 + 3x^7, \\ x^2 = -2x^3 - 3x^4 - 2x^6, \\ x^5 = -3x^6 - x^7. \end{cases}$$

Если придавать свободным неизвестным x^3, x^4, x^6, x^7 произвольные значения, которые обозначим через c^1, c^2, c^3, c^4 соответственно, то получим следующее выражение общего решения системы:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \\ x^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^1 + c^2 - c^3 + c^4 \\ -2c^1 - 3c^2 - 2c^3 \\ c^1 \\ c^2 \\ -3c^3 - c^4 \\ c^3 \\ c^4 \end{pmatrix} =$$

$$= c^1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют нормальное фундаментальное семейство решений рассматриваемой однородной системы (выделены значения свободных неизвестных).

Матрица

$$\Phi = \Big[X_1, X_2, X_3, X_4\Big] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

представляет собой нормальную фундаментальную матрицу системы; обратите внимание, что выделенные элементы (значения свободных неизвестных) образуют единичную матрицу порядка 4. Общее решение X системы выражается через фундаментальную матрицу формулой $X = \Phi C$, где $C = \big(c^1, c^2, c^3, c^4\big)^T$ — произвольный четырёхкомпонентный столбец.

Пример 8.4. Решите систему неоднородных линейных уравнений

$$\begin{cases} - 2x^2 + 6x^3 + 2x^4 + 8x^5 = -2, \\ 2x^1 + x^2 + x^3 = 1, \\ - x^2 + 3x^3 + x^4 + 4x^5 = -1, \\ 3x^1 + x^2 + 3x^3 + x^5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Эта матрица была приведена к упрощённому виду в примере 7.1 (см. с. 101):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(здесь выделены базисные столбцы и коэффициенты при базисных неизвестных). Система уравнений, соответствующая этой матрице, и сопутствующая однородная система имеют вид

$$\text{(A)}\begin{cases} x^1 = -2x^3 - x^5 - 1, \\ x^2 = 3x^3 + 2x^5 + 3, \\ x^4 = -2x^5 + 2, \end{cases} \qquad \text{(B)}\begin{cases} x^1 = -2x^3 - x^5, \\ x^2 = 3x^3 + 2x^5, \\ x^4 = -2x^5. \end{cases} \qquad (8.3)$$

Частное решение неоднородной системы получаем, полагая в (8.3)(A) значения всех свободных неизвестных равными нулю:

$$\begin{cases} x^1 = -1, \\ x^2 = 3, \\ x^4 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нормальное фундаментальное семейство решений однородной системы получаем, полагая в (8.3)(B) сначала $x^3 = 1$, $x^5 = 0$, а затем $x^3 = 0$, $x^5 = 1$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, общее решение неоднородной системы имеет вид

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЧРНС}} + \underbrace{c^1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ОРОС}}.$$

Пример 8.5. Составьте систему однородных линейных уравнений, для которой столбцы $X_1 = \left(1, 2, 3, 4\right)^T$ и $X_2 = \left(5, 6, 7, 8\right)^T$ образуют фундаментальное семейство решений.

Решение. Составим из данных столбцов матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x^1 \\ 2 & 6 & x^2 \\ 3 & 7 & x^3 \\ 4 & 8 & x^4 \end{array}\right)$$

и приведём её к упрощённому виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 5 & x^1 \\ 2 & 6 & x^2 \\ 3 & 7 & x^3 \\ 4 & 8 & x^4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x^1 \\ 0 & \boxed{-4} & -6x^1 + 5x^2 \\ 0 & -8 & -7x^1 + 5x^3 \\ 0 & -12 & -8x^1 + 5x^4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 0 & 26x^1 - 25y \\ 0 & -4 & 5x^2 - 6x^1 \\ 0 & 0 & -20x^1 + 40x^2 - 20x^3 \\ 0 & 0 & -40x^1 + 60x^2 - 20x^4 \end{array}\right).$$

Для того чтобы третий столбец матрицы был линейной комбинацией двух предыдущих, требуется обращение в нуль выделенных элементов. Разделив эти выражения на (-20) и приравняв их к нулю, получаем искомую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 + x^3 = 0, \\ 2x^1 - 3x^2 + x^4 = 0. \end{cases}$$

Замечание. Найденная система имеет упрощённый вид; базисными неизвестными являются x^3 и x^4. *Нормальное* фундаментальное семейство решений, отвечающее этим базисным неизвестным, состоит из столбцов (проверьте!)

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(выделены значения свободные неизвестные). Нетрудно получить разложения столбцов $X_1 = \begin{pmatrix}1, 2, 3, 4\end{pmatrix}^T$ и $X_2 = \begin{pmatrix}5, 6, 7, 8\end{pmatrix}^T$ (которые также образуют фундаментальное семейство решений, однако не являющееся *нормальным*) в линейные комбинации столбцов НФСР Y_1 и Y_2:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Y_1 & Y_2 & X_1 & X_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & 6 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $X_1 = Y_1 + 2Y_2$, $X_2 = 5Y_1 + 6Y_2$.

4. Задачи для самостоятельного решения

8.1. Для следующих однородных систем упрощённого вида укажите базисные и свободные неизвестные, найдите ФСР и запишите общее решение:

(a) $x^1 + x^2 = 0$;

(b) $x^1 + x^2 + x^3 = 0$;

(c) $\begin{cases} x^1 + x^3 = 0, \\ x^2 + x^3 = 0; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^1 + x^3 + x^4 = 0, \\ x^2 + x^3 + x^4 = 0; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 0, \\ x^1 - x^2 + x^4 = 0. \end{cases}$

8.2. Для следующих неоднородных систем упрощённого вида укажите базисные и свободные неизвестные, запишите общее решение:

(a) $x^1 + x^2 = 1;$

(b) $x^1 + x^2 + x^3 = 1;$

(c) $\begin{cases} x^1 + x^3 = 1, \\ x^2 + x^3 = 2; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^1 + x^3 + x^4 = 1, \\ x^2 + x^3 + x^4 = 2; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 1, \\ x^1 - x^2 + x^4 = 2. \end{cases}$

8.3. Решите следующие однородные системы при помощи алгоритма Гаусса—Жордана (см. задачу 7.1):

(a) $\begin{cases} 2x^1 + x^2 + 3x^3 + 5x^4 = 0, \\ 3x^1 + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 = 0; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 3x^4 + 13x^5 = 0, \\ 2x^2 - 4x^3 + 4x^4 - 4x^5 = 0, \\ 5x^1 + x^2 + 13x^3 - 3x^4 + 8x^5 = 0; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x^1 - x^2 - 7x^3 + 5x^4 - x^5 + 4x^6 = 0, \\ -2x^1 + 3x^2 + 11x^3 - 3x^3 - 11x^4 - 6x^5 + 4x^6 = 0, \\ x^1 + 2x^2 + 5x^3 + x^3 + x^4 + 5x^5 - x^6 = 0; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x^1 + x^2 + 4x^3 + x^4 - x^5 + 5x^6 + x^7 = 0, \\ -x^1 + 2x^2 - 7x^3 + 3x^4 + 10x^5 + 2x^6 - 5x^7 = 0, \\ 3x^1 + 9x^3 + x^4 - 4x^5 + 8x^6 + x^7 = 0, \\ 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 2x^4 - x^5 + 9x^6 - 3x^7 = 0, \\ 3x^1 + x^2 + 7x^3 + x^4 - 3x^5 + 7x^6 + 2x^7 = 0. \end{cases}$

8.4. Решите следующие неоднородные системы при помощи алгоритма Гаусса—Жордана (см. задачу 7.1):

(a) $\begin{cases} 2x^1 + x^2 + 3x^3 = 5, \\ 3x^1 + 2x^2 + 4x^3 = 7; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 3x^4 = 13, \\ 2x^2 - 4x^3 + 4x^4 = -4, \\ 5x^1 + x^2 + 13x^3 - 3x^4 = 8; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x^1 - x^2 - 7x^3 + 5x^4 - x^5 = 4, \\ -2x^1 + 3x^2 + 11x^3 - 3x^3 - 11x^4 - 6x^5 = 4, \\ x^1 + 2x^2 + 5x^3 + x^3 + x^4 + 5x^5 = -1; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x^1 + x^2 + 4x^3 + x^4 - x^5 + 5x^6 = 1, \\ -x^1 + 2x^2 - 7x^3 + 3x^4 + 10x^5 + 2x^6 = -5, \\ 3x^1 + 9x^3 + x^4 - 4x^5 + 8x^6 = 1, \\ 2x^1 - x^2 + 8x^3 + 2x^4 - x^5 + 9x^6 = -3, \\ 3x^1 + x^2 + 7x^3 + x^4 - 3x^5 + 7x^6 = 2. \end{cases}$

8.5. Даны столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составьте однородную систему, фундаментальное семейство решений которой состоит из столбцов (a) X_1; (b) X_1, X_2; (c) X_1, X_2, X_3.

8.6. Даны столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составьте однородную систему, фундаментальная совокупность решений которой состоит из столбцов (a) X_1; (b) X_1, X_2; (c) X_1, X_2, X_3; (d) X_1, X_2, X_3, X_4.

ГЛАВА 9

Векторная алгебра

1. Основные понятия и факты

А. Некоторые понятия из школьного курса геометрии. Предполагается, что из курса геометрии средней школы читателю известны основные геометрические понятия и факты. Напомним некоторые из них.

Основными неопределяемыми понятиями в геометрии[1] являются *точки*, *прямые* и *плоскости*. *Точки* обозначаем прописными латинскими буквами (A, B, ...), *прямые* — строчными латинскими буквами (a, b, ...), *плоскости* — строчными греческими буквами (α, β, ...). Прямая, проходящая через точки A и B, обозначается также (AB); плоскость, проходящая через точки A, B и C, обозначается (ABC).

Термин «параллельность» будем использовать в расширенном смысле: две прямые a и b называются *параллельными* (обозначение $a \parallel b$), если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек либо если они совпадают. Аналогично, две плоскости α и β называются параллельными (обозначение $\alpha \parallel \beta$), если они не имеют общих точек либо совпадают.

Плоскость α и прямая a называются параллельными, если они либо не имеют общих точек, либо прямая лежит в плоскости. Будем считать по определению, что если $\alpha \parallel a$, то $a \parallel \alpha$ и наоборот.

Отрезок $[AB]$ — это множество, состоящее из точек A и B и всех точек прямой (AB), *лежащих между*[2] A и B. Каждому отрезку $[AB]$ ставится в соответствие неотрицательное число, называемое *длиной* этого отрезка (или *расстоянием* между точками A и B) и обозначаемое $|AB|$. Длина отрезка обладает следующими свойствами:

(1) $|AB| = |BA|$ для любых точек A и B;

(2) $|AB| \geqslant 0$ для любых точек A и B, причём $|AB| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$;

(3) $|AB| \leqslant |AC| + |CB|$ для любых точек A, B и C, причём $|AB| = |AC| + |CB|$ тогда и только тогда, когда $C \in [AB]$.

Любая точка A, лежащая на прямой a, разбивает эту прямую на два *луча* a_1 и a_2 с началом в точке A; эти лучи называются *дополнительными* друг к другу. Точка A принадлежит обоим лучам.

---

[1]Точнее, в изложении геометрии, основанном на аксиоматике Евклида—Гильберта.

[2]«Лежать между» — одно из основных неопределяемых отношений в схеме Евклида—Гильберта.

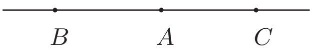


Рис. 9.1.

Две точки $B \neq A$ и $C \neq A$ принадлежат одному лучу тогда и только тогда, когда $A \notin [BC]$, и принадлежат дополнительным лучам только тогда, когда $A \in [BC]$.

Луч с началом в точке A, на котором лежит точка $B \neq A$, обозначается $[AB)$.

Два луча, лежащие на одной прямой, называются *одинаково направленными*, если их пересечение является лучом, и *противоположно направленными* в противном случае. Так, лучи $[CA)$ и $[AB)$ на рис. 9.1 одинаково направлены, а лучи $[CB)$ и $[AC)$ — противоположно направлены.

Каждая прямая a, лежащая в плоскости α, разбивает эту плоскость на две *полуплоскости* α_1 и α_2; будем говорить, что эти полуплоскости определяются прямой a. Сама прямая a принадлежит обеим полуплоскостям. Две точки A и B лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой a, тогда и только тогда, когда $[AB] \cap a = \varnothing$ (см. рис. 9.2).

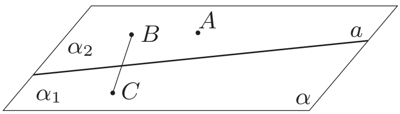


Рис. 9.2

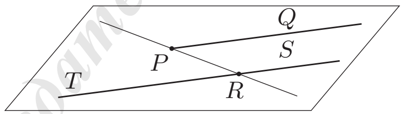


Рис. 9.3

Два луча $[AB)$ и $[CD)$, лежащие на параллельных прямых, лежат также в одной плоскости. Лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются *одинаково направленными*, или *сонаправленными* (обозначение $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$), если они лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой (AC), и *противоположно направленными* ($[AB) \uparrow\downarrow [CD)$), если они лежат в разных полуплоскостях. Так, на рис. 9.3 $[PQ) \uparrow\uparrow [RS)$, $[PQ) \uparrow\downarrow [RT)$.

Отношение сонаправленности лучей является отношением эквивалентности.

Если на прямой a выбраны три точки A, B, C (A лежит между B и C), то лучи $[AB)$ и $[AC)$ противоположно направлены; любой другой луч, лежащий на этой прямой, сонаправлен либо с $[AB)$, либо с $[AC)$. Таким образом, на прямой a можно определить два взаимно противоположных направления (*ориентации*), каждое из которых представляет собой множество всех лучей, сонаправленных либо с $[AB)$, либо с $[AC)$.

Если на прямой l выбрано одно из двух возможных направлений, то эта прямая называется *ориентированной прямой*, или *осью*, и обозначается $\vec{l}$.

На чертежах положительным направлением считается направление слева направо или снизу вверх. Разумеется, никакого точного математического смысла такой термин не имеет, а используется лишь для наглядности.

В. Направленные отрезки.

9.1. Определение. *Направленным отрезком* $\overrightarrow{AB}$ называется упорядоченная пара точек A и B, первая A из которых называется *началом*, а вторая B — *концом* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$. На чертеже направленный отрезок изображается стрелкой, начинающейся в точке A и заканчивающейся в точке B. Если точки A и B совпадают, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ (точнее, $\overrightarrow{AA}$) называется *вырожденным* или *нулевым* и обозначается $\mathbf{0}_A$.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называют также *связанным вектором*, а его начало A — *точкой приложения*.

Говорят, что направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ *параллелен прямой* a (плоскости α), если прямая (AB) параллельна прямой a (соответственно, плоскости α) либо $\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}_A$.

Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_kB_k}$ называются *коллинеарными* (*компланарными*), если все они параллельны одной и той же *прямой* (соответственно, *плоскости*).

Длиной $|\overrightarrow{AB}|$ направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина $|AB|$ отрезка $[AB]$; часто для краткости вместо $|\overrightarrow{AB}|$ пишут $|AB|$. Очевидно, длина нулевого направленного отрезка равна нулю.

Осью координат называется ось, на которой зафиксированы некоторая точка O, называемая *началом координат*, и масштабный направленный отрезок, длина которого полагается равной единице; часто этот отрезок называют *ортом* рассматриваемой оси (см. рис. 9.4).

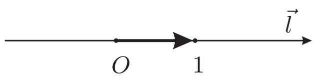


Рис. 9.4.

Ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *одинаково направленными*, или *сонаправленными* (обозначение $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), если сонаправлены лучи $[AB)$ и $[CD)$, и *противоположно направленными* (обозначение $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$), если лучи $[AB)$ и $[CD)$ имеют противоположное направление.

Отношение сонаправленности направленных отрезков является отношением эквивалентности.

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, если середины отрезков $[AD]$ и $[BC]$ совпадают; обозначение $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. На рис. 9.5 изображены все возможные случаи взаимного расположения равных направленных отрезков.

Из свойств параллелограмма следует, что ненулевые направленные отрезки, не лежащие на одной прямой, равны тогда и только тогда, когда четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм.

Отметим, что *понятие равенства направленных отрезков отличается от понятия равенства чисел*: два числа называются равными, если они совпадают; два направленных отрезка могут быть равными, но при

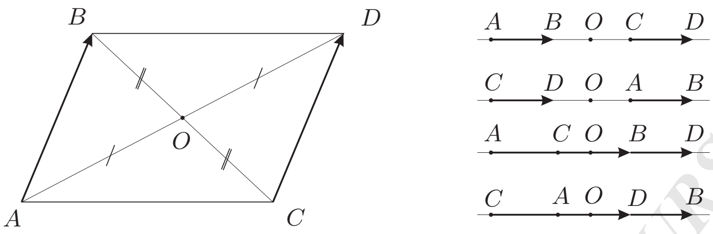


Рис. 9.5

этом не совпадать, будучи отложенными от разных точек. Более того, понятие равенства направленных отрезков может быть введено иначе, чем это было сделано выше, и в результате получится объект с совершенно иными свойствами (например, скользящий вектор).

9.2. Теорема. *Направленные отрезки* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые длины и одинаковые направления:*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \quad \text{и} \quad \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}.$$

9.3. Теорема (об откладывании направленного отрезка)**.** *Для любого направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *и любой точки* C *существует такая единственная точка* D*, что* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$*. Иными словами, направленный отрезок можно перенести в любую точку* (*или отложить от любой точки*)*.*

C. Понятие вектора. *Вектором* (или *свободным вектором*), порождённым направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, называется класс эквивалентности $[\overrightarrow{AB}]$ этого направленного отрезка относительно отношения эквивалентности, определённого как равенство направленных отрезков. Векторы обычно обозначаются строчными полужирными буквами: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и т. д.

Отложить вектор $\boldsymbol{a}$ от точки A означает построить направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A, входящий в класс эквивалентности, описываемый вектором $\boldsymbol{a}$, или, что то же, такой, что $[\overrightarrow{AB}] = \boldsymbol{a}$. Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *представителем* или *реализацией* вектора $\boldsymbol{a}$.

Нулевой вектор — это класс эквивалентности нулевого направленного отрезка; обозначение нулевого вектора $\mathbf{0}$.

Длина вектора $\boldsymbol{a}$ — это длина любого направленного отрезка, являющегося его представителем; обозначение $|\boldsymbol{a}|$. Аналогичным образом, мы можем говорить о сонаправленных и противоположно направленных векторах, о коллинеарных и компланарных векторах и т. п.

D. Линейные операции над векторами: сложение и умножение на число. *Сумма* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — это вектор, обозначаемый $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ и определяемый одним из следующих двух способов.

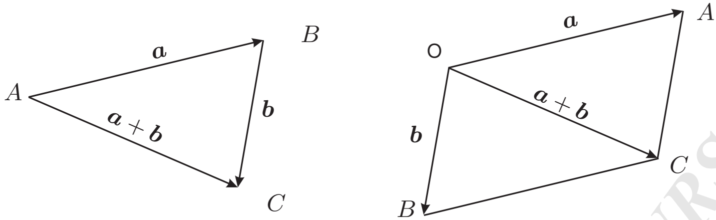


Рис. 9.6. Сложение векторов

(1) *Правило треугольника.* Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от точки A, получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$; отложим вектор $\boldsymbol{b}$ от точки B, получим направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Класс эквивалентности $\boldsymbol{c} = [\overrightarrow{AC}]$ направленного отрезка $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

(2) *Правило параллелограмма.* Отложим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от точки O, получим направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Проведём через точку A прямую, параллельную (OB), а через точку B — прямую, параллельную (OA). Пусть C — точка пересечения построенных прямых. Класс эквивалентности $\boldsymbol{c} = [\overrightarrow{OC}]$ направленного отрезка $\overrightarrow{OC}$ называется суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Обозначение: $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ *на вещественное число* α называется вектор $\alpha\boldsymbol{a}$, определяемый следующим образом: длина вектора $\alpha\boldsymbol{a}$ равна

$$\left|\alpha\boldsymbol{a}\right| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{a}|,$$

а его направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположно направлению вектора $\boldsymbol{a}$, если $\alpha < 0$. Если же $\alpha = 0$, то $0 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Сложение векторов и умножение вектора на число называются *линейными операциями* над векторами. При помощи линейных операций из векторов можно строить более сложные конструкции, называемые линейными комбинациями. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — некоторые векторы, $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ — вещественные числа (здесь верхние индексы обозначают номера, а не показатели степени!). *Линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ с коэффициентами $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ называется вектор $\alpha^1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha^k\boldsymbol{a}_k$.

9.4. Теорема. *Сложение векторов и умножение векторов на числа обладают следующими свойствами*:

(1) *коммутативность сложения*: *для всех векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a};$$

(2) *ассоциативность сложения*: *для всех векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c});$$

(3) *свойство нулевого вектора*: *для любого вектора* $\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a};$$

(4) *существование противоположного вектора*: *для любого вектора* $\boldsymbol{a}$ *существует такой вектор* $\boldsymbol{a}'$, *что*

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \mathbf{0};$$

(5) *свойство единицы*: *для любого вектора* $\boldsymbol{a}$

$$1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a};$$

(6) *ассоциативность умножения на число*: *для любого вектора* $\boldsymbol{a}$ *и любых чисел* α *и* β

$$(\alpha\beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\,(\beta\boldsymbol{a})\,;$$

(7) *дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов*: *для любых векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *и любого числа* α

$$\alpha\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b};$$

(8) *дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел*: *для любого вектора* $\boldsymbol{a}$ *и любых чисел* α *и* β

$$(\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}.$$

Е. Базисы и координаты. Векторы называются *коллинеарными*, если коллинеарны направленные отрезки, являющиеся их представителями. Если коллинеарные векторы отложить от общего начала, получим направленные отрезки, лежащие на одной прямой.

Векторы называются *компланарными*, если компланарны направленные отрезки, являющиеся их представителями. Если компланарные векторы отложить от общего начала, получим направленные отрезки, лежащие в одной плоскости.

9.5. Теорема.

1. *Для того, чтобы* два *вектора* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа* α, β, *не равные одновременно нулю, что*

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \mathbf{0}.$$

2. *Для того, чтобы* три *вектора* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа* α, β, γ *не равные одновременно нулю, что*

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \mathbf{0}.$$

9.6. Определение. *Базисом на плоскости* будем называть произвольную упорядоченную пару неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. Если на плоскости задан какой-либо базис $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$, то любой вектор на этой плоскости можно представить в виде линейной комбинации

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{a}_1 + x^2\boldsymbol{a}_2.$$

Это соотношение называется *разложением вектора* $\boldsymbol{x}$ *по базису* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$, а числа x^1, x^2 — *координатами вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. Координаты вектора принято нумеровать верхними индексами и записывать в виде столбца из чисел

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Впрочем, часто для экономии места координаты вектора записывают и в строку; это несущественно, если при проведении вычислений не используется матричная техника.

Базисом в пространстве будем называть произвольную упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Любой вектор пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{a}_1 + x^2\boldsymbol{a}_2 + x^3\boldsymbol{a}_3;$$

это соотношение называется *разложением вектора* $\boldsymbol{x}$ *по базису* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, а числа x^1, x^2, x^3 — *координатами вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисе* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Координаты вектора будем записывать в виде столбца из чисел $(x^1, x^2, x^3)^T$.

Ортонормированный базис — это базис, состоящий из единичных попарно перпендикулярных векторов.

9.7. Теорема. *Разложение вектора по базису единственно, т.е. набор координат векторов в каждом базисе определен однозначно.*

9.8. Теорема. *Если x^1, x^2, x^3 — координаты вектора $\boldsymbol{x}$, а y^1, y^2, y^3 — координаты вектора $\boldsymbol{y}$ относительно некоторого базиса, то в том же базисе вектор $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ имеет координаты x^1+y^1, x^2+y^2, x^3+y^3, а вектор $\alpha\boldsymbol{x}$, где α — произвольное число, имеет координаты αx^1, αx^2, αx^3.*

9.9. Теорема.

1. *Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы на плоскости, имеющие в некотором базисе координаты $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)^T$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)^T$. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0.$$

2. *Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — векторы в пространстве, имеющие в некотором базисе координаты $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_x)^T$, $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)^T$, $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)^T$. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

F. Используемые обозначения. Мы будем пользоваться следующими обозначениями.

Базис на плоскости обозначается $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ или $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2$, а в пространстве — $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ или $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ (в большинстве задач этот базис считается ортонормированным). Системы координат обозначаются следующим образом:

$$O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} \iff Oxy \iff O\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 \iff Ox^1x^2,$$

$$O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\boldsymbol{k} \iff Oxyz \iff O\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 \iff Ox^1x^2x^3.$$

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{a}$. Его разложение по базису записываем в виде

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = a^1\boldsymbol{i}_1 + a^2\boldsymbol{i}_2 + a^3\boldsymbol{i}^3,$$

где
$$A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$
— столбец координат вектора $\boldsymbol{a}$.

Используется также запись
$$\boldsymbol{a} = A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = (a_x, a_y, a_z)^T = (a^1, a^2, a^3)^T,$$
в которой вектор и его столбец координат отождествляются.

Часто координаты вектора, следуя традиции, сложившейся в преподавании аналитической геометрии, записывают в виде строки, хотя их следует записывать в виде столбца. Если при решении задачи не используется матричная техника, то это допустимо.

Для обозначения координат точки используем запись $M(x, y, z)$ или $M(\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{r}$ обозначает радиус-вектор точки M, т.е. направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$, где O — начало координат. Обратите внимание, что радиус-вектор точки является *связанным* (отложенным) вектором, т.е. направленным отрезком, но можно рассмотреть его класс эквивалентности и получить из него свободный вектор, хотя в большинстве задач это бессмысленно.[1]

G. Скалярное произведение векторов.

9.10. Определение. *Ортогональная проекция вектора* $\boldsymbol{a}$ *на прямую* l — это вектор $\mathrm{Pr}_l\, \boldsymbol{a}$, коллинеарный прямой l, начало (конец) которого представляет собой ортогональную проекцию начала (конца) вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую, параллельную $\boldsymbol{b}$ (см. рис. 9.7).

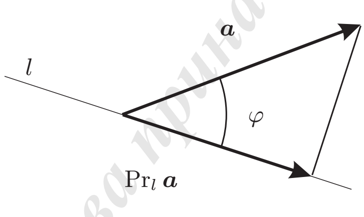


Рис. 9.7. Ортогональная проекция вектора на прямую

Ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{a}$ *на координатную ось* $\vec{l}$ — это число
$$\mathrm{pr}_{\vec{l}}\boldsymbol{a} = \begin{cases} \left|\mathrm{Pr}_l\, \boldsymbol{a}\right|, & \text{если } \mathrm{Pr}_l\, \boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \vec{l}, \\ -\left|\mathrm{Pr}_l\, \boldsymbol{a}\right|, & \text{если } \mathrm{Pr}_l\, \boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \vec{l}. \end{cases}$$
Любой вектор $\boldsymbol{l}$, сонаправленный с осью $\vec{l}$, называется *направляющим вектором оси*; проекция на ось $\vec{l}$ обозначается, наряду с $\mathrm{pr}_{\vec{l}}$, символом $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{l}}$.

Подчеркнём, что согласно принятым определениям проекция вектора на прямую является *вектором*, а проекция вектора на ось — *числом.*

[1]Примером осмысленной задачи, в которой радиус-вектор точки удобно рассматривать как свободный вектор, является задача о сдвиге начала координат (см. гл. 13).

Очевидно, проекция $\mathrm{pr}_{\vec{l}}\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на ось $\vec{l}$ равна

$$\mathrm{pr}_{\vec{l}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi,$$

где φ — угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью $\vec{l}$ (или, что то же, угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{l}$).

9.11. Определение. *Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$* — это число

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi = \mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} \cdot |\boldsymbol{b}|.$$

Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, нулевой вектор ортогонален любому другому, а ненулевые векторы ортогональны тогда и только тогда, когда они перпендикулярны.

9.12. Теорема. *Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами*:

(1) *линейность по каждому сомножителю*:

$$(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = \alpha_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + \alpha_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}),$$
$$(\boldsymbol{a}, \beta_1\boldsymbol{b}_1 + \beta_2\boldsymbol{b}_2) = \beta_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1) + \beta_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2),$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ — произвольные векторы, α_1, α_2, β_1, β_2 — произвольные числа;

(2) *симметричность* (*коммутативность*):

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a});$$

(3) *положительная определённость*: *для любого вектора $\boldsymbol{a}$*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqslant 0,$$

причём $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

9.13. Теорема. 1. *Проекция вектора $\boldsymbol{a}$* на прямую, *параллельную вектору $\boldsymbol{b}$, равна*

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}\boldsymbol{b}. \tag{9.1}$$

2. *Проекция вектора $\boldsymbol{a}$* на ось, *коллинеарную вектору $\boldsymbol{b}$, равна*

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|}. \tag{9.2}$$

9.14. Теорема. *Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ выражается через их координаты (a_x, a_y, a_z) и (b_x, b_y, b_z) относительно произвольного ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ формулой*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Если обозначить через A и B соответственно столбцы $(a_x, a_y, a_z)^T$ и $(b_x, b_y, b_z)^T$ координат векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = A^T B.$$

Скалярный квадрат вектора — это скалярное произведение вектора на себя:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2.$$

Длину вектора можно выразить через его скалярный квадрат:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Угол между векторами можно найти по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

H. Ортогональные базисы.

9.15. Определение. Базис на плоскости (в пространстве) называется *ортогональным*, если векторы, составляющие его, попарно ортогональны.

Ортонормированный базис является частным случаем ортогонального, когда все базисные векторы имеют единичную длину.

9.16. Теорема. *Координаты* (a_1, a_2, a_3) *произвольного вектора* $\boldsymbol{a}$ *относительно ортогонального базиса* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *вычисляются по формулам*

$$a_1 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)}, \quad a_2 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)}, \quad a_3 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3)}{(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)}. \tag{9.3}$$

В частности, координаты (a_x, a_y, a_z) *вектора* $\boldsymbol{a}$ *относительно ортонормированного базиса* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ *вычисляются по формулам*

$$a_x = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}), \quad a_y = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}), \quad a_z = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) \tag{9.4}$$

Формулы (9.3) *и* (9.4) *называются формулами Гиббса.*

I. Ориентация плоскости и пространства. Подобно понятию ориентации прямой (выбора одного из двух возможных *направлений* на прямой, каждое из которых представляет собой класс эквивалентности сонаправленных лучей) можно ввести понятие *ориентации* плоскости и пространства. Как на плоскости, так и в пространстве имеется две возможных ориентации, каждая из которых представляет собой класс эквивалентности базисов относительно следующего отношения эквивалентности: два базиса считаются эквивалентными, если один из них получается из другого непрерывной деформацией.

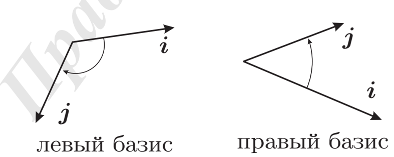


Рис. 9.8. Ориентация базиса на плоскости

Базис *на плоскости* $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ называется *правым*, если кратчайший поворот, переводящий вектор $\boldsymbol{i}$ в вектор $\boldsymbol{j}$, осуществляется *против* часовой стрелки, и *левым*, если этот поворот осуществляется *по* часовой стрелке (отметим, что это общепринятое в математике соглашение направление отсчёта углов).

Базис *в пространстве* $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ называется *правым*, если выполнено одно из следующих (равносильных) условий (см. рис. 9.9):

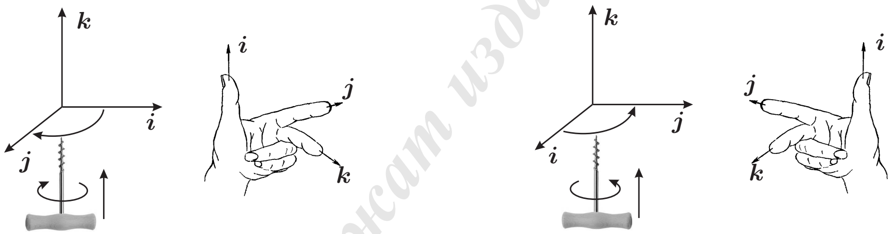
(1) если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{k}$, то кратчайший поворот, переводящий вектор $\boldsymbol{i}$ в вектор $\boldsymbol{j}$, осуществляется против часовой стрелки;

(2) векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ удовлетворяют правилу буравчика: если вращать буравчик в направлении поворота, переводящего (кратчайшим образом) вектор $\boldsymbol{j}$ в вектор $\boldsymbol{j}$, то поступательное движение буравчика происходит в направлении вектора $\boldsymbol{k}$;

(3) векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ удовлетворяют правилу правой руки: их расположение совпадает с естественным положением большого, указательного и среднего пальцев правой руки.

В противном случае базис в пространстве называется *левым*.

9.17. Замечание. Термин «правая тройка» (и подобные ему) векторов может использоваться в отношении любых трёх некомпланарных векторов в пространстве безотносительно к тому, рассматриваются ли эти векторы как базис (т.е. используются ли для разложения других векторов; разумеется, такие векторы образуют базис).



левый базис правый базис

Рис. 9.9. Ориентация базиса в пространстве

J. Векторное произведение векторов.

9.18. Определение. *Векторное произведение векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — это вектор, обозначаемый $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{c}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

(i) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi$;

(ii) вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

(iii) векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (в указанном порядке) образуют правую тройку.

9.19. Теорема. *Векторное произведение векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *выражается через их координаты* (a_x, a_y, a_z) *и* (b_x, b_y, b_z) *относительно произвольного ортонормированного базиса* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ *формулой*

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{9.5}$$

где выбирается знак «+», если базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ правый, и «−» — если базис левый. Раскрывать определители нужно по первой строке: алгебраические дополнения элементов первой строки (векторов ортонормированного базиса) суть координаты вектора $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ в этом базисе.

9.20. Теорема (свойства векторного произведения)**.** *Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:*

(1) *линейность по каждому сомножителю:*

$$[\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}] = \alpha_1 [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}] + \alpha_2 [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}],$$
$$[\boldsymbol{a}, \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2] = \beta_1 [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1] + \beta_2 [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2],$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ — произвольные векторы, α_1, α_2, β_1, β_2 — произвольные числа;

(2) *кососимметричность:*

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}].$$

9.21. Теорема. *Имеет место следующая формула для двойного векторного произведения:*

$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

9.22. Теорема (тождество Якоби)**.** *Справедливо следующее тождество:*

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] + [\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]] = \boldsymbol{0}.$$

K. Смешанное произведение.

9.23. Определение. *Смешанным произведением трёх векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$* называется число

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]).$$

9.24. Теорема. *Смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ выражается через их координаты (a_x, a_y, a_z) и (b_x, b_y, b_z) относительно произвольного ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ формулой*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_k \\ b_x & b_y & b_k \\ c_x & c_y & c_k \end{vmatrix},$$

где знак «+» выбирается в случае правого базиса, а знак «−» — в случае левого.

9.25. Теорема. *Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами:*

(1) *линейность по каждому сомножителю:*

$$(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha_1 (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \alpha_2 (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

(для остальных сомножителей аналогично); здесь $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — произвольные векторы, α_1, α_2 — произвольные числа;

(2) *циклическая симметрия:*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a});$$

(3) *возможность перестановки векторного произведения под знаком скалярного*:
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}).$$

9.26. Теорема.

1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ *тогда и только тогда, когда векторы* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *линейно зависимы.*
2. *Векторы* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *образуют правую тройку при* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$ *и левую тройку при* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) < 0$; *при этом модуль смешанного произведения* $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|$ *равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

2. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение сонаправленных (противоположно направленных) лучей.
2. Сформулируйте определения оси; координатной оси.
3. Сформулируйте определение направленного отрезка, равенства направленных отрезков.
4. Сформулируйте критерий равенства направленных отрезков.
5. Сформулируйте теорему об откладывании направленного отрезка.
6. Сформулируйте определение свободного вектора.
7. Что значит «отложить вектор от точки»?
8. Сформулируйте определения линейных операций над векторами и перечислите их свойства. Сделайте поясняющие чертежи.
9. Что такое линейная комбинация векторов?
10. Сформулируйте определения коллинеарных (компланарных) векторов.
11. Сформулируйте критерии коллинеарности двух (компланарности трёх) векторов.
12. Сформулируйте определение базиса на плоскости (в пространстве), координат вектора относительно базиса и теорему о единственности разложения вектора по базису.
13. Что такое ортонормированный базис?
14. Сформулируйте определение ортогональной проекции вектора на прямую и на координатную ось. Объясните разницу между этими понятиями.
15. Запишите формулы для нахождения ортогональной проекции вектора на прямую и на координатную ось.
16. Сформулируйте определение скалярного произведения векторов и перечислите его свойства.
17. Запишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.
18. Запишите формулу для вычисления длины вектора и угла между векторами.
19. Сформулируйте определение векторного произведения векторов и перечислите его свойства.
20. Запишите формулу для вычисления векторного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.

21. Запишите формулу для двойного векторного произведения.
22. Запишите тождество Якоби.
23. Сформулируйте определение смешанного произведения векторов и перечислите его свойства.
24. Запишите формулу для вычисления смешанного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.
25. Как при помощи смешанного произведения определить ориентацию тройки векторов?
26. Как при помощи смешанного произведения найти объём параллелепипеда?

3. Примеры решения задач

Пример 9.1. Докажите теорему об откладывании направленного отрезка (теорему 9.3).

Доказательство. Пусть точка O — середина отрезка $[BC]$ (см. рис. 9.10). Из определения равенства направленных отрезков следует, что D — точка на прямой (AO), симметричная точке A относительно точки O. Такая точка определена однозначно.

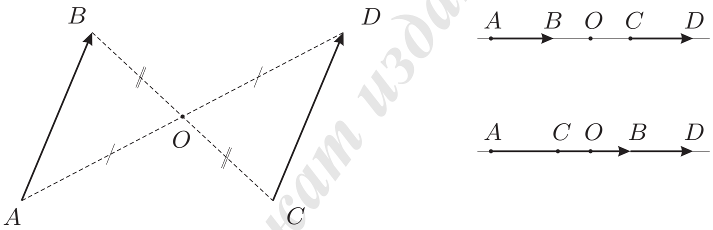


Рис. 9.10. К примеру 9.1

Пример 9.2. Докажите теорему о единственности разложения по базису (теорему 9.7).

Доказательство. Предположим, что имеется два разложения произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$:

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{a}_1 + x^2\boldsymbol{a}_2 + x^3\boldsymbol{a}_3 = y^1\boldsymbol{a}_1 + y^2\boldsymbol{a}_2 + y^3\boldsymbol{a}_3.$$

Вычитая из одного разложение второе, получим

$$\mathbf{0} = (x^1 - y^1)\boldsymbol{a}_1 + (x^2 - y^2)\boldsymbol{a}_2 + (x^3 - y^3)\boldsymbol{a}_3.$$

В силу критерия компланарности векторов (см. теорему 9.5) это равенство возможно лишь при одновременном выполнении равенств $x^1 = y^1$, $x^2 = y^2$, $x^3 = y^3$, что и требовалось доказать.

Пример 9.3. Точки E и F являются серединами сторон $[AB]$ и $[CD]$ четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{EF} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)/2$.

Решение (см. рис. 9.11). Имеем:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}, \quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}.$$

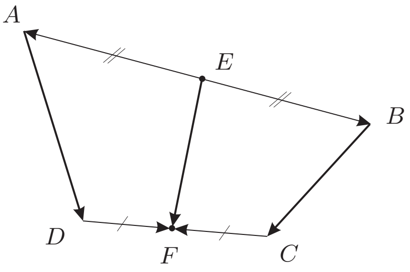


Рис. 9.11. К примеру 9.3

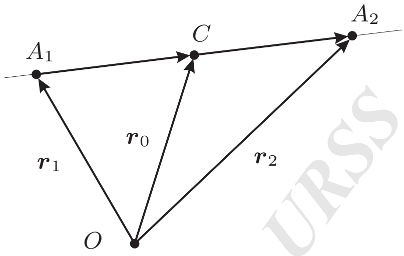


Рис. 9.12. К примеру 9.4

Складывая эти равенства и учитывая, что $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{DF}$, получаем требуемое.

Пример 9.4. Найдите радиус-вектор точки A_2, симметричной точке $A_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно точки $C(\boldsymbol{r}_0)$.

Решение. Если точка A_2 симметрична точке $A_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно точки $C(\boldsymbol{r}_0)$, то

$$\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1$$

(см. рис. 9.12), откуда

$$\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_2} = \boldsymbol{r}_0 + (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1) = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1.$$

Ответ: $\boldsymbol{r}_2 = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1$.

Пример 9.5. Проверьте, что векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ образуют базис на плоскости. Найдите разложения векторов $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{y} = 17\boldsymbol{i} + 39\boldsymbol{j}$ по этому базису.

Решение. Перейдём от векторов к столбцам их координат:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Для проверки линейной независимости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ воспользуемся теоремой 9.9. Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, а потому образуют базис на плоскости.

Для разложения вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ нужно найти такие числа α, β, чтобы $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ или для столбцов координат

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = -1, \\ 3\alpha + 4\beta = -1. \end{cases}$$

Решим эту систему с помощью формул Крамера:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Таким образом, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Можно записать ответ, указав столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, но в этом случае необходимо уточнение, касающееся базиса, поскольку в данной задаче используется два разных базиса; это можно сделать, например, так:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ в базисе } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}.$$

Аналогично получаем разложение вектора $\boldsymbol{y}$ по базису $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$:

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \gamma + 2\delta = 17, \\ 3\gamma + 4\delta = 9, \end{cases}$$

откуда $\gamma = 5$, $\delta = 6$ и $\boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b}$.

Пример 9.6. В треугольнике ABC точка M — середина стороны $[AC]$, точка K делит сторону $[AB]$ в отношении $|AK| : |KB| = 3 : 5$, точка L делит сторону $[BC]$ в отношении $|BL| : |LC| = 2 : 3$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BM}$ в базисе $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{CK}$.

Решение (см. рис. 9.13). План решения задачи таков: сначала выразим искомый вектор $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, затем выразим векторы $\overrightarrow{AL}$ и $\overrightarrow{CK}$ через $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, после чего найдём обратные выражения $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ через $\overrightarrow{AL}$ и $\overrightarrow{CK}$ и подставим их в выражение для $\overrightarrow{BM}$.

Вектор $\overrightarrow{BM}$ выражается через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ очевидным образом:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}).$$

Введём обозначения

$$\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{AL} = \boldsymbol{x}, \quad \overrightarrow{CK} = \boldsymbol{y}.$$

Имеем:

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LA} = \frac{2}{5}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KC} = \frac{5}{8}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{y}.$$

Отсюда получаем

$$\boldsymbol{x} = \frac{2}{5}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{y} = \frac{5}{8}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$$

или, эквивалентно,

$$5\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{c} - 5\boldsymbol{a}, \quad 8\boldsymbol{y} = 5\boldsymbol{a} - 8\boldsymbol{c}.$$

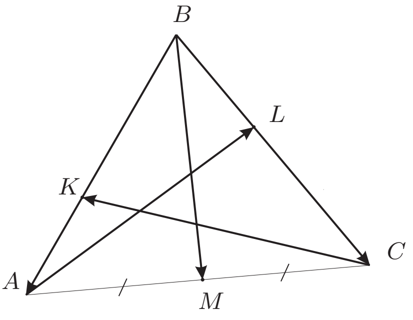


Рис. 9.13. К примеру 9.6

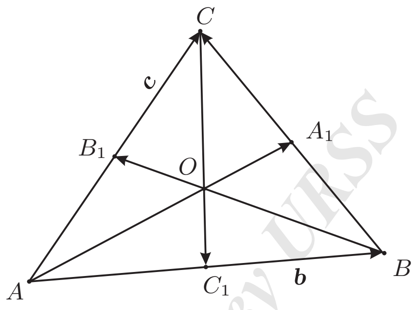


Рис. 9.14. К примеру 9.7

Итак, векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ выражены через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$. Найдём обратные выражения $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ через $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Сложив последние соотношения, получим

$$5\boldsymbol{x} + 8\boldsymbol{y} = -6\boldsymbol{c} \iff \boldsymbol{c} = -\frac{5}{6}\boldsymbol{x} - \frac{4}{3}\boldsymbol{y}$$

и далее

$$\boldsymbol{a} = \frac{2}{5}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x} = \frac{2}{5}\left(-\frac{5}{6}\boldsymbol{x} - \frac{4}{3}\boldsymbol{y}\right) - \boldsymbol{x} = -\frac{4}{3}\boldsymbol{x} - \frac{8}{15}\boldsymbol{y}.$$

Окончательно

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = \; = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\boldsymbol{x} - \frac{8}{15}\boldsymbol{y} - \frac{5}{6}\boldsymbol{x} - \frac{4}{3}\boldsymbol{y}\right) = \; = -\frac{13}{12}\boldsymbol{x} - \frac{14}{15}\boldsymbol{y}.$$

Ответ: $\overrightarrow{BM} = -\dfrac{13}{12}\overrightarrow{AL} - \dfrac{14}{15}\overrightarrow{CK}$.

Пример 9.7. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Решение (см. рис. 9.14). Рассмотрим базис на плоскости, образованный векторами $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$.

Сначала докажем, что медианы BB_1 и CC_1 делятся точкой их пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины. Имеем

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{BO} = \alpha\overrightarrow{BB_1} = \alpha\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}\right), \quad \overrightarrow{CO} = \beta\overrightarrow{CC_1} = \beta\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\right).$$

Векторы $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{BC}$ удовлетворяют соотношению

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO},$$

откуда

$$-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \alpha\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}\right) - \beta\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\right).$$

Это эквивалентно равенству

$$\left(-\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)\boldsymbol{b} + \left(\frac{1}{2}\alpha + \beta\right)\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

В силу единственности разложения по базису получаем

$$\alpha + \frac{1}{2}\beta = 1, \quad \frac{1}{2}\alpha + \beta = 1.$$

Решением этой системы является пара чисел $\alpha = \beta = 2/3$, так что

$$\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}, \quad \overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}.$$

Теперь докажем, что медиана AA_1 также проходит через точку O и делится этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины. Имеем

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \boldsymbol{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} = \boldsymbol{b} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1},$$

что и требовалось.

Пример 9.8. Однородная пластинка имеет форму прямоугольника со сторонами a и b, в котором сделан прямоугольный вырез; линии разреза параллельны координатным осям и проходят через центр пластинки. Определите положение центра масс пластинки.

Решение. Введём прямоугольную декартову систему координат, начало которой находится в вершине O пластинки $OADEFB$, а оси которой направлены вдоль её сторон OA и OB (см. рис. 9.15). В этой системе координат центр масс прямоугольника $OACB$ находится в точке $E(a/2; b/2)$, а центр масс прямоугольника $EDCF$ — в точке $P(3a/4; 3b/4)$. Обозначим координаты центра масс Q пластинки $OADEFB$ через x и y.

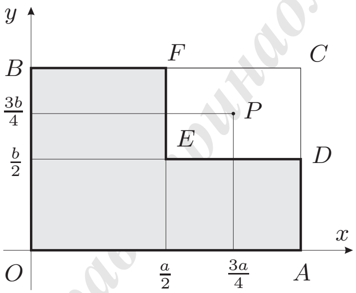


Рис. 9.15. К примеру 9.8

Поскольку прямоугольник $OACB$ является объединением шестиугольника $OADEFB$ и прямоугольника $EDCF$, его центр масс можно найти по формуле

$$\boldsymbol{r}_E = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2},$$

где m_1, m_2 — массы (площади) шестиугольника $OADEFB$ и прямоугольника $EDCF$, а $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ — радиус-векторы их центров масс. Таким образом, имеем:

$$\begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ab}\left[\frac{3ab}{4}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{ab}{4}\begin{pmatrix} 3a/4 \\ 3b/4 \end{pmatrix}\right].$$

Решая эту систему относительно x и y, получаем $x = 5a/12$, $y = 5b/12$.

Пример 9.9. Докажите, что если векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$ компланарны, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ также компланарны.

Решение. Вычислим смешанное произведение

$$\Big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],\ [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}],\ [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]\Big) = \Big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],\ \big[[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}],\ [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]\big]\Big) =$$
$$= \Big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\underbrace{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c})}_{=0}\Big) = \big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}\big)(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2.$$

Итак, если $\Big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}],\ [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}],\ [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]\Big) = 0$, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны.

Пример 9.10. Докажите тождество

$$\big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]\big) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) \end{vmatrix}.$$

*Решение*Доказательство:

$$\big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \underbrace{[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]}_{\boldsymbol{x}}\big) = \big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{x}\big) = \big(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}]\big) = \big(\boldsymbol{a}, \big[\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]\big]\big) =$$
$$= \big(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\big) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}).$$

Пример 9.11. Докажите тождество

$$\big[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]\big] = \boldsymbol{c}\big(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\big) - \boldsymbol{d}\big(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\big).$$

Доказательство:

$$\big[\underbrace{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}_{\boldsymbol{x}}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]\big] = \big[\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]\big] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) =$$
$$= \boldsymbol{c}\big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{d}\big) - \boldsymbol{d}\big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}\big) = \boldsymbol{c}\big(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\big) - \boldsymbol{d}\big(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\big).$$

Пример 9.12. Докажите, что площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с координатами (a_x, a_y) и (b_x, b_y) соответственно (см. рис. 9.16), равна

$$S = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Решение. Площадь параллелограмма с точностью до знака равна

$$S = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin(\beta - \alpha) =$$
$$= |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \big(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha\big) =$$
$$= \underbrace{|\boldsymbol{a}|\cos\alpha}_{=a_x} \cdot \underbrace{|\boldsymbol{b}|\sin\beta}_{b_y} - \underbrace{|\boldsymbol{a}|\sin\alpha}_{a_y} \cdot \underbrace{|\boldsymbol{b}|\cos\beta}_{b_x} = a_x b_y - a_y b_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

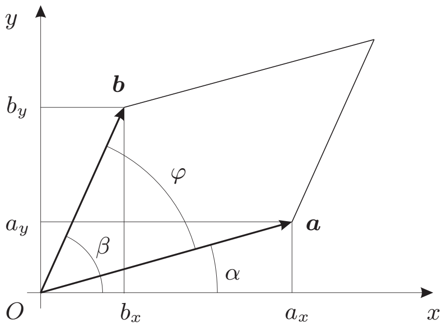


Рис. 9.16. К примеру 9.12

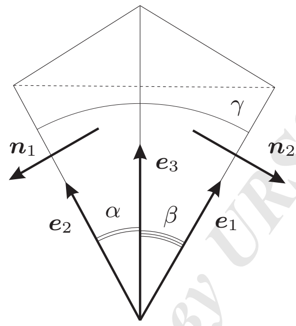


Рис. 9.17. К примеру 9.13

Пример 9.13. Даны плоские углы α, β, γ трёхгранного угла. Найдите его двугранные углы.

Решение. Направим единичные векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ вдоль ребер двугранного угла (см. рис. 9.17). Векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, перпендикулярные граням, могут быть выражены как

$$\boldsymbol{n}_1 = [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3], \quad \boldsymbol{n}_2 = [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1].$$

Очевидно,

$$|\boldsymbol{n}_1| = \sin\alpha, \quad |\boldsymbol{n}_2| = \sin\beta.$$

Угол между рассматриваемыми гранями равен углу между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Имеем

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = \big([\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3], [\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1]\big) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) \\ (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) & (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\gamma \\ 1 & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma.$$

Поэтому косинус искомого угла равен

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Пример 9.14. Найдите ортогональную проекцию $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на *прямую* b, параллельную вектору $\boldsymbol{b}$, и ортогональную проекцию $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на *ось*, определяемую вектором $\boldsymbol{b}$, где

$$\boldsymbol{a} = \big(10, -5, 19\big)^T, \quad \boldsymbol{b} = \big(3, -6, 2\big)^T.$$

Представьте вектор $\boldsymbol{a}$ в виде суммы двух взаимно ортогональных векторов, один из которых коллинеарен прямой b, а второй ортогонален ей.

Решение. Имеем:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 19^2} = 9\sqrt{6}, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = 7,$$
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 10 \cdot 3 + (-5) \cdot (-6) + 19 \cdot 2 = 98.$$

Далее, по формулам (9.1) и (9.2) имеем

$$\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}\boldsymbol{b} = \frac{98}{49}\begin{pmatrix} 3\\ -6\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\\ -12\\ 4\end{pmatrix} = 2\boldsymbol{b},$$

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{98}{7} = 14, \quad \cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{98}{9\sqrt{6}\cdot 7} = \frac{14}{9\sqrt{6}}.$$

Вектор $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}$ коллинеарен прямой b, а вектор

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 10\\ -5\\ 19\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6\\ -12\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ 7\\ 15\end{pmatrix}$$

ортогонален этой прямой:

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 3\cdot 4 + (-6)\cdot 7 + 2\cdot 15 = 0.$$

Искомое разложение имеет вид $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

Пример 9.15. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{x}$ заданы своими координатами относительно некоторого ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1\\ 4\\ 2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -27\\ 19\\ 7\end{pmatrix}.$$

Докажите, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны. Найдите такой вектор $\boldsymbol{c}$, что $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — правый ортогональный базис и разложите вектор $\boldsymbol{x}$ по этому базису.

Решение. Найдём скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 2\cdot 1 + (-3)\cdot 4 + 5\cdot 2 = 0,$$

так что действительно $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. Вектор $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ ортогонален обоим векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, поэтому базис $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ будет правым ортогональным:

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -3 & 5\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -26\\ 1\\ 11\end{pmatrix}.$$

Для нахождения координаты x_a вектора $\boldsymbol{x}$ умножим скалярно обе части разложения

$$\boldsymbol{x} = x_a\boldsymbol{a} + x_b\boldsymbol{b} + x_c\boldsymbol{c}$$

на вектор $\boldsymbol{a}$:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = x_a(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + x_b(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + x_c(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}).$$

Поскольку базис ортогональный, второе и третье слагаемые в правой части равны нулю, и мы получаем

$$x_a = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = \frac{2\cdot(-27) + (-3)\cdot 19 + 5\cdot 7}{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = -2.$$

(Фактически мы повторили вывод формул Гиббса (9.3).) Аналогично находим остальные координаты:

$$x_b = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})} = \frac{63}{21} = 3, \quad x_c = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c})} = \frac{798}{798} = 1.$$

Итак, $\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

Пример 9.16. Пусть $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — единичные векторы, причём $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. Найдите $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$.

Решение. Умножим скалярно обе части данного векторного равенства поочерёдно на $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ и сложим полученные равенства:

$$\begin{gathered}
\underbrace{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}_{=1} + \underline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} + \underline{\underline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})}} = 0, \\
\underline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} + \underbrace{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})}_{=1} + \utilde{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})} = 0, \\
\underline{\underline{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})}} + \utilde{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})} + \underbrace{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c})}_{=1} = 0,
\end{gathered}$$

(подобные слагаемые подчёркнуты), откуда

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = -\frac{3}{2}.$$

Пример 9.17. Докажите тождество

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = 2\big(|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2\big)$$

и объясните его геометрический смысл.

Решение. Имеем

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) =$$

(воспользуемся свойством линейности скалярного произведения)

$$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}).$$

Аналогично получаем

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}).$$

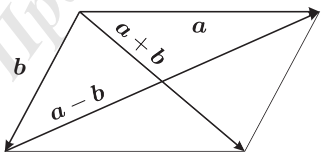


Рис. 9.18. К примеру 9.17

Складывая полученные равенства, получим требуемую формулу. Геометрический смысл полученного равенства (см. рис. 9.18): сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его двух смежных сторон.

4. Задачи для самостоятельного решения

9.1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$, найдите в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CE}$.

9.2. Докажите, что векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ образуют базис на плоскости, и найдите разложения векторов $\boldsymbol{x} = 11\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{j}$ по этому базису.

9.3. Точки $A_1(\boldsymbol{r}_1)$, $A_2(\boldsymbol{r}_2)$, $A_3(\boldsymbol{r}_3)$, не лежащие на одной прямой, являются последовательными вершинами параллелограмма. Найдите радиус-вектор $\boldsymbol{r}_4$ четвёртой вершины A_4 этого параллелограмма.

9.4. Даны три точки $A_1(\boldsymbol{r}_1)$, $A_2(\boldsymbol{r}_2)$, $A_3(\boldsymbol{r}_3)$, не лежащие на одной прямой. Найдите радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$.

9.5. В треугольнике ABC проведена биссектриса $[AD]$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ в базисе, образованном векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

9.6. Докажите, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

9.7. Однородная пластинка $OADEC$ получена из прямоугольника $OACB$ со сторонами, равными $2a$ и $2b$, от которого отрезан треугольник ECD, где D и E — середины сторон $[AC]$ и $[BC]$ соответственно. Найдите координаты центра масс пластинки в системе координат с началом O и осями, направленными вдоль сторон $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$.

9.8. Из проволочного каркаса кубической формы (ребро куба равно a) удалено одно ребро. Найдите координаты центра масс полученной фигуры в системе координат, оси которой направлены по трём рёбрам куба так, чтобы изъятое ребро располагалось в плоскости Oxy параллельно оси Oy.

9.9. Найдите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если известны их длины и величина угла между ними:

(a) $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, $\varphi = 60^\circ$;
(b) $|\boldsymbol{a}| = 6$, $|\boldsymbol{b}| = 1$, $\varphi = 150^\circ$;
(c) $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 4$, $\varphi = 90^\circ$;
(d) $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $\varphi = 180^\circ$.

9.10. Найдите проекцию вектора $\boldsymbol{a} = (4; 2; 6)$ (a) на прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{b} = (-3; 2; -5)$; (b) на координатную ось, направление которой задаётся вектором $\boldsymbol{b}$.

9.11. Найдите скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданных своими координатами в некотором ортонормированном базисе:

(a) $\boldsymbol{a} = (2; 3; -1)$, $\boldsymbol{b} = (-1; 5; 13)$;
(b) $\boldsymbol{a} = (3; -3; 2)$, $\boldsymbol{b} = (2; -1; 3)$;
(c) $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 1)$, $\boldsymbol{b} = (-3; 5; -2)$;
(d) $\boldsymbol{a} = (4; -3; -2)$, $\boldsymbol{b} = (-2; 4; -1)$.

9.12. Найдите векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданных своими координатами в некотором ортонормированном базисе:

(a) $\boldsymbol{a} = (2; 3; -1)$, $\boldsymbol{b} = (-1; 5; 13)$;
(b) $\boldsymbol{a} = (3; -3; 2)$, $\boldsymbol{b} = (2; -1; 3)$;
(c) $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 1)$, $\boldsymbol{b} = (-3; 5; -2)$;
(d) $\boldsymbol{a} = (4; -3; -2)$, $\boldsymbol{b} = (-2; 4; -1)$.

9.13. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — ортонормированный базис,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{x} = 17\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}.$$

Докажите, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны. Найдите такой вектор $\boldsymbol{c}$, что $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — правый ортогональный базис и разложите вектор $\boldsymbol{x}$ по этому базису.

9.14. Упростите выражения: (a) $[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]$; (b) $[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}]$.

9.15. Для векторов $\boldsymbol{a} = (2; 3; -1)$, $\boldsymbol{b} = (3; 1; 1)$, $\boldsymbol{c} = (1; -5; -2)$, заданных своими координатами в некотором ортонормированном базисе, найдите (a) $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$; (b) $[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}]$.

9.16. Векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ заданы своими координатами в некотором ортонормированном базисе. Для каждой тройки векторов найдите их смешанное произведение и укажите ориентацию этой тройки векторов:
(a) $\boldsymbol{a} = (2; 3; -1)$, $\boldsymbol{b} = (3; -3; 2)$, $\boldsymbol{c} = (-1; 5; 13)$;
(b) $\boldsymbol{a} = (3; -3; 2)$, $\boldsymbol{b} = (-2; 1; 1)$, $\boldsymbol{c} = (2; -1; 3)$;
(c) $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 1)$, $\boldsymbol{b} = (1; -4; 3)$, $\boldsymbol{c} = (-3; 5; -2)$;
(d) $\boldsymbol{a} = (4; -3; -2)$, $\boldsymbol{b} = (-2; 4; -1)$, $\boldsymbol{c} = (1; -4; 3)$.

9.17. Докажите, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ взаимно ортогональны.

9.18. В треугольнике ABC известны длины сторон $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$. Найдите $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

9.19. Найдите угол между скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра.

9.20. Даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Представьте вектор $\boldsymbol{b}$ в виде суммы таких двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, чтобы вектор $\boldsymbol{x}$ был коллинеарен, а вектор $\boldsymbol{y}$ — ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$.

9.21. Докажите следующие тождества:

(a) $\left|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\right|^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2$;

(b) $[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$;

(c) $[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$;

(d) $\big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]\big) + \big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}]\big) + \big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big) = 0$;

(e) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 + \Big|\big[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}\big]\Big|^2 = \left|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\right|^2 \cdot |\boldsymbol{c}|^2$;

(f) $\big([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]\big) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$;

(g) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}) \end{vmatrix}$;

(h) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{z},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{z},\boldsymbol{c}) \end{vmatrix}$;

(i) $\big[\boldsymbol{a},\big[\boldsymbol{b},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\big]\big] = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}](\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}) - [\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}](\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$;

(j) $\big[\boldsymbol{a},\big[\boldsymbol{b},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\big]\big] = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]$;

(k) $\big([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}],[\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}]\big) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f})$.

ГЛАВА 10

Прямые на плоскости

1. Основные понятия и факты

Основные типы уравнений прямой на плоскости, отнесённых к декартовой системе координат (косоугольной или прямоугольной, причём случай прямоугольной системы координат всегда оговаривается):

(1) *уравнение с угловым коэффициентом*:

$$y = kx + b,$$

где k — тангенс угла между прямой и положительным направлением оси Ox (в прямоугольной декартовой системе координат);

(2) *векторное параметрическое уравнение*:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор опорной точки M_0 прямой (т.е. произвольной фиксированной точки этой прямой), $\boldsymbol{a}$ — направляющий вектор прямой (т.е. произвольный вектор, параллельный данной прямой; см. рис. 10.1), t — вещественный параметр, $t \in \mathbb{R}$;

(3) *параметрические уравнения в координатах*:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_x, \\ y = y_0 + ta_y, \end{cases}$$

где (x, y), (x_0, y_0), (a_x, a_y) — координаты векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{a}$ соответственно;

(4) *параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и $M_2(\boldsymbol{r}_2)$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1), \qquad \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

где (x_1, y_1), (x_2, y_2) — координаты векторов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$;

(5) *канонические уравнения*:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}, \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_x & a_y \end{vmatrix} = 0$$

(смысл обозначений тот же, что и ранее);

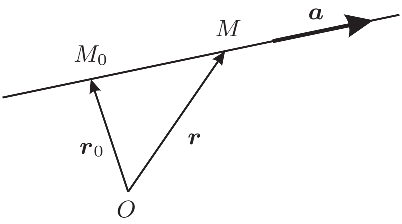


Рис. 10.1. Задание прямой направляющим вектором

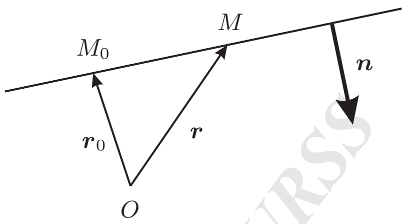


Рис. 10.2. Задание прямой нормальным вектором

(6) *канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0;$$

(7) *общее уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку* (x_0, y_0):
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$$

(8) *общее уравнение прямой на плоскости*:
$$Ax + By = D;$$

(9) *уравнение в отрезках*:
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$
где a и b — отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях;

(10) *векторное нормальное уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку* $M_0(\boldsymbol{r}_0)$:
$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0,$$
где $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к прямой (т.е. произвольный вектор, перпендикулярный прямой);

(11) *векторное нормальное уравнение прямой на плоскости*:
$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D,$$
где D — некоторое число;

(12) *нормальное уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$:
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$
где A, B — координаты вектора нормали $\boldsymbol{n}$ прямой (только в прямоугольной декартовой системе координат);

(13) *нормальное уравнение прямой на плоскости*:
$$Ax + By = D,$$
где A, B — координаты вектора нормали $\boldsymbol{n}$ прямой (только в прямоугольной декартовой системе координат);

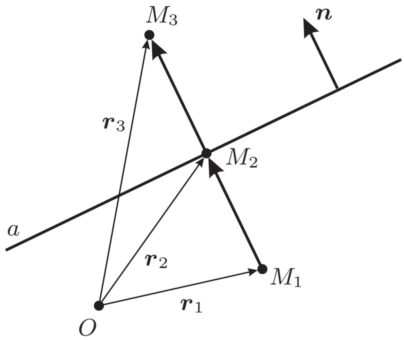


Рис. 10.3. К теореме 10.1

(14) *нормированное уравнение прямой в прямоугольной декартовой системе координат*:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p,$$

где p — расстояние от начала координат до прямой ($p \geqslant 0$), α — угол между положительным направлением оси Ox и нормальным вектором прямой, отложенным от начала координат.

Уравнение прямой в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

где α — угол между нормалью прямой и полярной осью, p — расстояние от полюса до прямой. В случае, когда прямая проходит через полюс под углом β к полярной оси, она распадается на два луча, уравнения которых имеют вид $\varphi = \beta$ и $\varphi = \beta + \pi$ (или $\varphi = \beta - \pi$) соответственно.

10.1. Теорема. *Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и прямая a, заданная векторным нормальным уравнением $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$* (см. рис. 10.3).

1. *Радиус-вектор ортогональной проекции $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую a выражается формулой*

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}. \tag{10.1}$$

2. *Расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой a выражается формулой*

$$d(M_1, a) = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{|\boldsymbol{n}|}. \tag{10.2}$$

3. *Радиус-вектор точки $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, симметричной точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно прямой a, выражается формулой*

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}. \tag{10.3}$$

Формула (10.2) в координатной записи имеет вид

$$d(M_1, a) = \frac{|Ax_1 + By_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{10.4}$$

где (x_1, y_1) — координаты точки M_1, а прямая a имеет уравнение $Ax + By = D$.

Отклонение точки $M_1(x_1, y_1)$ *от прямой* a, заданной нормированным уравнением $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$, равно

$$\delta(M_1, a) = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p.$$

Модуль этой величины равен расстоянию $d(M_1, a)$ от точки M_1 до прямой a, а знак показывает, в какой из двух полуплоскостей лежит точка M_1: если $\delta(M_1, a) < 0$, то точка M_1 и начало координат O лежат в одной полуплоскости, а если $\delta(M_1, a) > 0$ — то в разных. Отклонение точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ от прямой a, заданной векторным нормальным уравнением $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$, может быть найдено по формуле, аналогичной формуле для расстояния от точки до прямой:

$$\delta(M_1, a) = \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{|\boldsymbol{n}|} \cdot \operatorname{sgn} D,$$

где $\operatorname{sgn} D$ — знак[1] числа D.

Пучок прямых (на плоскости) с центром C — это множество $\pi(C)$ всех прямых на этой плоскости, проходящих через точку C.

10.2. Теорема. *Пусть* $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ *и* $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$ *— уравнения двух прямых, пересекающихся в точке* C. *Прямая принадлежит пучку* $\pi(C)$ *тогда и только тогда, когда она задаётся уравнением*

$$\Big(\boldsymbol{r}, \alpha_1\boldsymbol{n}_1 + \alpha_2\boldsymbol{n}_2\Big) = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2,$$

где α_1 *и* α_2 *— числа, не равные одновременно нулю. Это уравнение называется уравнением пучка прямых.*

2. Контрольные вопросы и задания

1. Запишите векторное параметрическое уравнение прямой на плоскости. Объясните геометрический смысл всех входящих в уравнение постоянных величин.
2. Запишите параметрическое уравнение прямой на плоскости в координатном виде.
3. Запишите каноническое уравнение прямой на плоскости в виде пропорции.

[1] Функция «знак числа» определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

4. Запишите каноническое уравнение прямой на плоскости с помощью определителя.
5. Укажите какой-либо направляющий вектор прямой, заданной уравнением $y = kx + b$.
6. Запишите уравнение прямой в отрезках и объясните геометрический смысл его коэффициентов.
7. Запишите векторное нормальное уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку, и объясните геометрический смысл его коэффициентов.
8. Запишите нормальное уравнение прямой, проходящей через заданную точку, в прямоугольных координатах (в планиметрическом случае).
9. Укажите какой-либо нормальный вектор прямой, заданной уравнением $y = kx + b$.
10. Запишите нормированное уравнение прямой на плоскости.
11. Запишите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой.
12. Запишите формулу для нахождения точки, являющейся проекцией данной точки на данную прямую.
13. Запишите формулу для нахождения точки, симметричной данной точке относительно данную прямой.
14. Сформулируйте определение пучка прямых на плоскости.

3. Примеры решения задач

Во всех задачах система координат предполагается прямоугольной.

Пример 10.1. Составьте уравнения прямых b и c, проходящих через точку $A(-2; 5)$ соответственно параллельно и перпендикулярно прямой a, заданной уравнением $3x + 2y = 8$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0, y_0) параллельно прямой $Ax + By = D$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

так как параллельные прямые имеют одинаковые (или, более общо, пропорциональные) нормальные векторы. Поэтому уравнение прямой b, параллельной прямой a, имеет вид

$$3(x + 2) + 2(y - 5) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x + 2y = 4.$$

Вектор нормали $\boldsymbol{n} = (3; 2)$ данной прямой a является направляющим вектором искомой прямой c, уравнение которой удобно записать в каноническом виде:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{2} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x+2 & y-5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - 3y = -19.$$

Пример 10.2. Известна вершина $A(3;-4)$ треугольника ABC и уравнения его высот[1]:

$$BH:\ 7x-2y=1, \qquad CP:\ 2x-7y=6.$$

Составьте уравнение стороны BC.

Решение (чертёж сделайте самостоятельно). Найдем координаты точки Q пересечения высот треугольника:

$$\begin{cases} 7x-2y=1, \\ 2x-7y=6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q\left(-\frac{1}{9},\ -\frac{8}{9}\right).$$

Вектор $\overrightarrow{AQ}=(-28/9,\ 28/9)$ перпендикулярен прямой BC, поэтому пропорциональный вектор $\boldsymbol{n}=(1;-1)$ можно взять в качестве вектора нормали стороны BC.

Найдём координаты точки B, являющейся пересечением высоты BH (её уравнение известно) и стороны AB (её уравнение требуется получить). Поскольку нормальный вектор $(2;-7)$ высоты CP является направляющим вектором стороны AB, можем записать каноническое уравнение прямой AB:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-7} \quad \Longleftrightarrow \quad 7x+2y=13.$$

Далее находим координаты точки B:

$$\begin{cases} 7x-2y=1, \\ 7x+2y=13 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(1;3).$$

Теперь можем составить уравнение стороны BC:

$$1\cdot(x-1)+(-1)\cdot(y-3)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x-y=-2.$$

Пример 10.3. Составьте уравнения биссектрис углов между прямыми $3x-4y=-7$ и $5x+12y=1$.

Решение. Точка $M(x,y)$ лежит на биссектрисе углов, образованных данными прямыми, тогда и только тогда, когда расстояния d_1 и d_2 от этой точки до данных прямых равны между собой, т.е.

$$\frac{|3x-4y+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5x+12y-1|}{\sqrt{5^2+12^2}}.$$

Снимая модули, получаем

$$\frac{3x-4y+7}{5}=\frac{5x+12y-1}{13} \quad \Longleftrightarrow \quad 7x-56y+48=0,$$
$$\frac{3x-4y+7}{5}=-\frac{5x+12y-1}{13} \quad \Longleftrightarrow \quad 32x+4y+43=0.$$

[1]Здесь и далее под уравнением высот (биссектрис, сторон и т. д.) будем понимать уравнения прямых, на которых лежат высоты (биссектрисы, стороны и т. д.) и опускать скобки в обозначениях прямых и отрезков, т.е. писать, например, AB как для прямой (AB), так и для отрезка $[AB]$.

Пример 10.4. Даны уравнения сторон треугольника:

$$BC:\ x+2y=1,\quad AC:\ 5x+4y=17,\quad AB:\ x-4y=-11.$$

Не определяя координат его вершин, составьте уравнения высот этого треугольника.

Решение. Найдём уравнение высоты CH, исходящей из вершины C. Прямая CH принадлежит пучку $\pi(C)$ с центром C, поэтому согласно теореме 10.2 её уравнение можно представить в виде

$$\alpha(x+2y-1)+\beta(5x+4y-17)=0$$

или после преобразования

$$x(\alpha+5\beta)+y(2\alpha+4\beta)=\alpha+17\beta.$$

Кроме того, эта прямая перпендикулярна стороне AB, т.е. нормальные векторы $\boldsymbol{n}_{CH}=(\alpha+5\beta;2\alpha+4\beta)$ и $\boldsymbol{n}_{AB}=(1;-4)$ ортогональны, так что их скалярное произведение равно нулю:

$$(\boldsymbol{n}_{CH},\boldsymbol{n}_{AB})=1\cdot(\alpha+5\beta)+(-4)\cdot(2\alpha+4\beta)=-7\alpha-11\beta=0.$$

Взяв в качестве решения этого уравнения $\alpha=-11$, $\beta=7$, получаем уравнение высоты CH: $4x+y=18$. Уравнения остальных высот треугольника находятся аналогично. Окончательный ответ: $4x+y=18$, $4x-5y=-22$, $2x-y=-1$.

Пример 10.5. Даны точка $A(1;2)$ и прямая a с уравнением $3x-y+9=0$. Найдите координаты точки P, являющейся проекцией точки A на прямую a, и точки S, симметричной точке A относительно прямой a, а также расстояние от точки A до прямой a.

Решение. Обозначим через $\boldsymbol{r}_1$ радиус-вектор точки A, через $\boldsymbol{r}_2$ — радиус-вектор точки P, через $\boldsymbol{r}_3$ — радиус-вектор точки S, через $\boldsymbol{n}$ — нормальный вектор прямой a, D — свободный член уравнения прямой; очевидно, $\boldsymbol{r}_1=(1;2)$, $\boldsymbol{n}=(3;-1)$, $D=-9$. По формулам теоремы 10.1 получаем:

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1-\frac{\overbrace{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})}^{=1}-D}{\underbrace{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}_{=10}}\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\frac{1-(-9)}{10}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1-2\frac{(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})-D}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix};$$

$$d(A,a)=\frac{|(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{n})-D|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1-(-9)|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}.$$

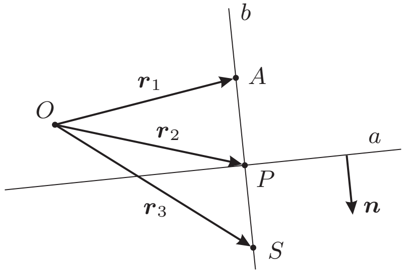


Рис. 10.4. К задаче 10.5

Лучше решить задачу без использования готовых формул (см. рис. 10.4). Проведём через точку A прямую b, перпендикулярную прямой a; её направляющий вектор совпадает с нормальным вектором прямой a, и поэтому уравнение прямой b имеет вид

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 3y = 7.$$

Точка P является пересечением прямых a и b:

$$\begin{cases} 3x - y = -9, \\ x + 3y = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P(-2; 3).$$

Расстояние от точки A до прямой a равно расстоянию $|AP|$:

$$|AP| = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}.$$

Далее находим вектор $\overrightarrow{AP}$:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и радиус-вектор точки S:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 10.6. Докажите, что уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, может быть записано в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Вычтем третью строку определителя из первой и второй:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & 0 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

и теперь раскроем по элементам последнего столбца:

$$= \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix}.$$

Получившееся уравнение есть не что иное, как каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

4. Задачи для самостоятельного решения

10.1. (a) Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;5)$ и $B(-3;7)$.

(b) Получите из параметрического уравнения прямой $\begin{cases} x = 3-2t, \\ y = 1+3t \end{cases}$ каноническое уравнение и общее уравнение.

(c) Получите из параметрического уравнения прямой $\begin{cases} x = 5, \\ y = 3-7t \end{cases}$ каноническое уравнение и общее уравнение.

(d) Получите из канонического уравнения прямой $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-4}{-5}$ параметрическое уравнение и общее уравнение.

(e) Получите из канонического уравнения прямой $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+2}{0}$ параметрическое уравнение и общее уравнение.

(f) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(13;-7)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}(5;2)$.

(g) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;2)$ параллельно прямой $\dfrac{x+8}{5} = \dfrac{y-9}{-11}$.

(h) Нарисуйте прямую, заданную уравнением $\dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{3} = 1$.

(i) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-7)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}(5;-2)$.

(j) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;-3)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+8}{3} = \dfrac{y-9}{-7}$.

10.2. Найдите расстояния от точек $A(2;1)$ и $B(5;-3)$ до прямой a, заданной уравнением $3x-4y=12$. Пересекает ли отрезок $[AB]$ прямую a?

10.3. Запишите уравнения следующих прямых в полярных координатах: (a) $y=1$; (b) $x=1$; (c) $x=-1$; (d) $x+y=1$.

10.4. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x+3y=-1$ и $2x+y=1$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y=-3$. Найдите координаты вершин параллелограмма, составьте уравнения остальных сторон и второй диагонали этого параллелограмма.

10.5. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x-2y=0$ и $x-2y=-15$ и уравнение одной из его диагоналей $7x+y=15$. Найдите координаты вершин прямоугольника, составьте уравнения остальных сторон и второй диагонали этого прямоугольника.

10.6. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;5)$ и равноудалённой от точек $P(-1;2)$ и $Q(5;4)$.

10.7. Даны коодинаты вершин треугольника $A(1;2)$, $B(9;3)$, $C(5;10)$. Найдите уравнения сторон треугольника (т.е. прямых, на которых лежат стороны), уравнения медиан, высот, серединных перпендикуляров к сторонам, координаты центроида (т.е. точки пересечения медиан), ортоцентра (точки пересечения высот), центра описанной окружности.

10.8. Найдите координаты точки P, являющейся ортогональной проекцией точки A на прямую a, и точки S, симметричной точке A относительно прямой a, а также расстояние d от точки A до прямой a, если (a) $A(-5;6)$, a: $2x-3y+2=0$; (b) $A(2;1)$, a: $3x-4y=12$. Решите задачу, не пользуясь формулами (10.1)–(10.3).

10.9. Из точки $A(-2;3)$ под углом φ к оси Ox ($\operatorname{tg}\varphi = 3$) направлен луч света. Дойдя до оси Ox, луч от неё отразился. Составьте уравнения прямых, на которых лежат падающий и отражённый лучи.

10.10. Луч света направлен по прямой $x-2y+5=0$. Дойдя до прямой $3x-2y+7=0$, луч от неё отразился. Составьте уравнение прямой, на которой лежит отражённый луч.

ГЛАВА 11

Прямые и плоскости в пространстве

1. Основные понятия и факты

А. Плоскости в пространстве. Основные типы уравнений плоскости в пространстве, отнесённых к декартовой системе координат (косоугольной или прямоугольной, причём случай прямоугольной системы координат всегда оговаривается):

(1) *векторное параметрическое уравнение плоскости*:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор опорной точки M_0 плоскости, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два неколлинеарных между собой направляющих вектора плоскости (т.е. два вектора, параллельных плоскости; см. рис. 11.1);

(2) *параметрические уравнения в координатах*

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_x + vb_x, \\ y = y_0 + ua_y + vb_y, \\ z = z_0 + ua_z + vb_z, \end{cases}$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты вектора $\boldsymbol{r}_0$, (a_x, a_y, a_z) и (b_x, b_y, b_z) — координаты направляющих векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

(3) *каноническое уравнение плоскости в пространстве*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

(смысл обозначений тот же, что и выше);

(4) *уравнение плоскости, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}(a_x, a_y, a_z)$*:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0;$$

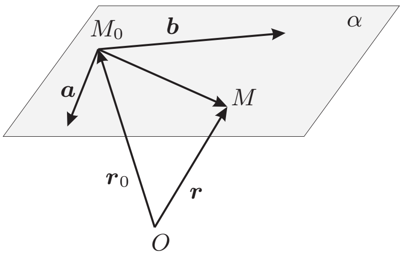


Рис. 11.1. Задание плоскости направляющими векторами

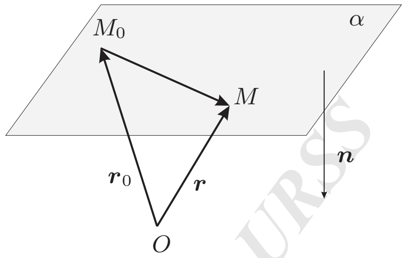


Рис. 11.2. Задание плоскости нормальным вектором

(5) *уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

(6) *общее уравнение плоскости, проходящей через заданную точку*:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

(7) *общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz = D;$$

(8) *уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно;

(9) *векторное нормальное уравнение плоскости, проходящей через заданную точку* $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ (см. рис. 11.2):

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0;$$

(10) *векторное нормальное уравнение плоскости*:

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D;$$

(11) *нормальное уравнение плоскости, проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где A, B, C — координаты нормального вектора плоскости (только в прямоугольной декартовой системе координат);

(12) *нормальное уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz = D,$$

где A, B, C — координаты нормального вектора плоскости (только в прямоугольной декартовой системе координат);

(13) *нормированное уравнение плоскости:*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

где p — расстояние от начала координат до прямой ($p \geqslant 0$), α, β, γ — углы, которые образует с осями координат вектор нормали $\boldsymbol{n}$.

11.1. Теорема. *Даны точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и плоскость α, заданная векторным нормальным уравнением $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$* (см. рис. 11.3).

1. *Радиус-вектор ортогональной проекции $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на плоскость α выражается формулой*

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}. \tag{11.1}$$

2. *Расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до плоскости α выражается формулой*

$$d(M_1, \alpha) = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{|\boldsymbol{n}|}. \tag{11.2}$$

3. *Радиус-вектор точки $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, симметричной точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно плоскости α, выражается формулой*

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}. \tag{11.3}$$

Формула (11.2) в координатной записи имеет вид

$$d(M_1, \alpha) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{11.4}$$

где (x_1, y_1, z_1) — координаты точки M_1, а плоскость α имеет уравнение $Ax + By + Cz = D$.

Отклонение точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ от плоскости α, заданной нормированным уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$, определяется как

$$d(M_1, \alpha) = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p;$$

модуль этой величины равен расстоянию $d(M_1, \alpha)$ от точки M_1 до плоскости α, а знак показывает, в каком из двух полупространств лежит точка M_1: если $\delta(M_1, \alpha) < 0$, то точка M_1 и начало координат O лежат в одном полупространстве, а если $\delta(M_1, \alpha) > 0$ — то в разных.

Пучком плоскостей в пространстве называется множество всех плоскостей, проходящих через некоторую прямую l, называемую осью пучка. Пучок с центром l будем обозначать $\pi(l)$.

11.2. Теорема. *Пусть $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$ — уравнения двух (непараллельных) плоскостей, пересекающихся по прямой l. Плоскость принадлежит пучку $\pi(l)$ тогда и только тогда, когда она задаётся уравнением*

$$\Big(\boldsymbol{r}, \alpha_1\boldsymbol{n}_1 + \alpha_2\boldsymbol{n}_2\Big) = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2, \tag{11.5}$$

где α_1 и α_2 — числа, не равные одновременно нулю. Это уравнение называется уравнением пучка плоскостей.

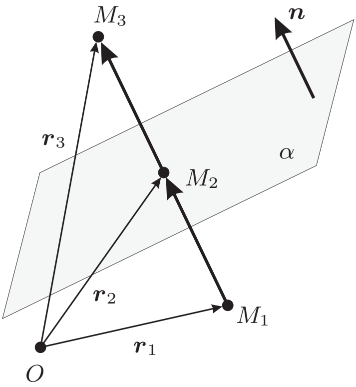


Рис. 11.3. К теореме 11.1

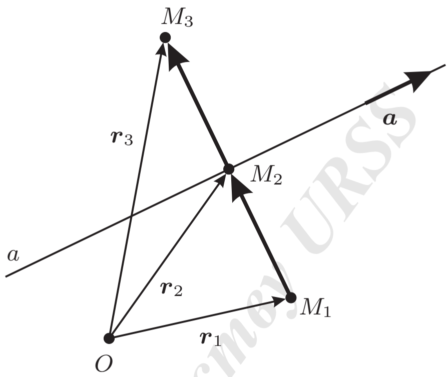


Рис. 11.4. К теореме 11.3

В. Прямые в пространстве. Основные типы уравнений прямой в пространстве:

(1) *векторное параметрическое уравнение*:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор опорной точки M_0 прямой, $\boldsymbol{a}$ — направляющий вектор прямой;

(2) *параметрические уравнения*:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_x, \\ y = y_0 + ta_y, \\ z = z_0 + ta_z, \end{cases}$$

где (x, y, z), (x_0, y_0, z_0), (a_x, a_y, a_z) — координаты векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{a}$ соответственно;

(3) *каноническое уравнение прямой*:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

(смысл обозначений тот же);

(4) *уравнение в форме Плюккера*

$$[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{a}$ — направляющий вектор прямой, а $\boldsymbol{b}$ — некоторый вектор, удовлетворяющий условию $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$ (или, эквивалентно, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$).

Кроме того, прямая может быть задана как *пересечение двух плоскостей.*

11.3. Теорема. *Даны точка* $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ *и прямая* a*, заданная векторным параметрическим уравнением* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ (см. рис. 11.4).

1. *Радиус-вектор ортогональной проекции $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на прямую a выражается формулой*

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}. \tag{11.6}$$

2. *Расстояние от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до прямой a выражается формулой*

$$d(M_1, a) = \frac{\big|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]\big|}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{11.7}$$

3. *Радиус-вектор точки $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, симметричной точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно прямой a, выражается формулой*

$$\boldsymbol{r}_3 = 2\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}. \tag{11.8}$$

2. Контрольные вопросы и задания

1. Запишите векторное параметрическое уравнение плоскости и объясните геометрический смысл всех входящих в уравнение постоянных величин.
2. Запишите параметрическое уравнение плоскости в координатном виде и объясните геометрический смысл всех входящих в уравнение постоянных величин.
3. Запишите каноническое уравнение плоскости.
4. Запишите уравнение плоскости в отрезках.
5. Запишите векторное нормальное уравнение плоскости.
6. Запишите нормальное уравнение плоскости в прямоугольных координатах.
7. Запишите нормированное уравнение плоскости.
8. Запишите формулу расстояния от точки до плоскости.
9. Запишите векторное параметрическое уравнение прямой в пространстве. Объясните геометрический смысл всех входящих в уравнение постоянных величин.
10. Запишите параметрическое уравнение прямой в пространстве в координатном виде.
11. Запишите каноническое уравнение прямой в пространстве.
12. Запишите уравнение прямой в пространстве в форме Плюккера. Укажите условие, при котором это уравнение имеет смысл.
13. Запишите формулу расстояния от точки до прямой в пространстве.
14. Сформулируйте определение пучка плоскостей.

3. Примеры решения задач

Во всех задачах система координат предполагается прямоугольной.

Пример 11.1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(-1; 5; 5)$, $M_2(-3; 1; 5)$, $M_3(-5; 4; -4)$.

Решение. Пусть $M(x, y, x)$ — произвольная точка искомой плоскости. Так как векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-5 & z-5 \\ -3+1 & 1-5 & 5-5 \\ -5+1 & 4-5 & -4-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y-5 & z-5 \\ -2 & -4 & 0 \\ -4 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение искомой плоскости:

$$18x - 9y - 7z + 98 = 0.$$

Пример 11.2. Найдите уравнение плоскости, проходящей через первую прямую параллельно второй:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}, \qquad \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

Решение. В качестве опорной точки искомой плоскости можно взять любую точку первой прямой, например, её опорную точку $M_0(3; 0; -1)$ (см. числители в первом уравнении). Направляющими векторами искомой плоскости могут служить направляющие векторы двух данных прямых, т.е. $\boldsymbol{a} = (3; 1; 3)$ и $\boldsymbol{b} = (0; 2; -1)$ (см. знаменатели). Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ компланарны, и этот факт может быть записан как равенство нулю определителя, составленного из координат указанных векторов:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 7x - 3y - 6z = 27.$$

Пример 11.3. Найдите расстояние d между параллельными плоскостями $2x - 3y + 6z = 4$ и $2x - 3y + 6z = 18$.

Решение. Данные плоскости действительно параллельны, так как их нормальные векторы совпадают: $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2 = (2; -3; 6)$. Расстояние между параллельными плоскостями можно найти как расстояние от произвольной точки первой плоскости (возьмём в качестве таковой $(2; 0; 0)$) до другой плоскости по формуле (11.2):

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{\bigl|(2\cdot 2 - 3\cdot 0 + 6\cdot 0) - 18\bigr|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = 2.$$

Пример 11.4. Даны плоскость π и три прямые l_1, l_2, l_3:

$$\pi : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad l_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 34 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$l_2 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad l_3 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 26 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Для каждой из прямых выясните, пересекается ли она с плоскостью, лежит в плоскости или не имеет с ней общих точек. В случае пересечения найдите координаты общей точки плоскости и прямой.

Решение. Преобразуем уравнение плоскости π к виду $Ax + By + Cz = D$. Опорной точкой плоскости является точка $M_0(6; 3; 3)$, а направляющими векторами — $\boldsymbol{a} = (4; 6; 1)$ и $\boldsymbol{b} = (3; 4; 4)$. Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ компланарны, так что определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-3 & z-6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20x - 13y - 2z = 69;$$

нормальный вектор плоскости есть $\boldsymbol{n} = (20; -13, -2)$.

Вычислим скалярное произведение вектора $\boldsymbol{n}$ с направляющим вектором прямой l_1:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_1) = \left(\begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 573.$$

Поскольку $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_1) \neq 0$, прямая l_1 пересекается с плоскостью π. Для нахождения их точки пересечения запишем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = 34 + 24s, \\ y = 2 - 7s, \\ z = 6 - s. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости $20x - 13y - 2z = 69$, находим значение параметра s, отвечающее точке пересечения:

$$20(34 + 24s) - 13(2 - 7s) - 2(6 - s) = 69 \quad \Rightarrow \quad s = -1.$$

Таким образом, координаты точки пересечения

$$\begin{cases} x = 34 + 24 \cdot (-1) = 10, \\ y = 2 - 7 \cdot (-1) = 9, \\ z = 6 - (-1) = 7. \end{cases}$$

Вычислим скалярное произведение вектора $\boldsymbol{n}$ с направляющим вектором прямой l_2:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_2) = \left(\begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}_2$ ортогональны; это означает, что прямая параллельна плоскости (в расширенном смысле, см. с. 127), т.е. либо лежит в этой плоскости, либо не имеет с ней общих точек. Проверим, лежит ли опорная точка $(9; 7; 10)$ прямой l_2 в плоскости π:

$$20 \cdot 9 - 13 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 69;$$

таким образом, прямая l_2 целиком содержится в плоскости π.

Для прямой l_3 анализ аналогичен:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_3) = \left(\begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

т.е. векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}_3$ ортогональны, и прямая параллельна плоскости (в расширенном смысле). Проверим, лежит ли опорная точка $(26; -10; 4)$ прямой l_3 в плоскости π:

$$20 \cdot 26 - 13 \cdot (-10) - 2 \cdot 4 = 642 \neq 69,$$

т.е. прямая l_3 не имеет общих точек с плоскостью π.

Пример 11.5. Найдите каноническое уравнение прямой, которая задана как пересечение двух плоскостей $y + 2z = 1$ и $x + y + z = 3$. В качестве опорной точки прямой возьмите точку, лежащую в плоскости Oxy.

Решение. Найдём опорную точку прямой, лежащую в плоскости Oxy, т.е. имеющую нулевую аппликату:

$$\begin{cases} y + 2z = 1, \\ x + y + z = 3, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

В качестве направляющего вектора возьмём векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каноническое уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Пример 11.6. Найдите необходимое и достаточное условие, при котором прямые в пространстве $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + s\boldsymbol{a}_2$: (а) скрещиваются; (б) пересекаются в единственной точке; (в) параллельны, но не совпадают; (г) совпадают.

Решение. Имеется четыре возможности взаимного расположения двух прямых в пространстве.

1. Прямые скрещиваются; тогда они лежат в параллельных плоскостях (см. рис. 11.5). Направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ прямых не коллинеарны, а любой вектор, соединяющий произвольно выбранные точки на

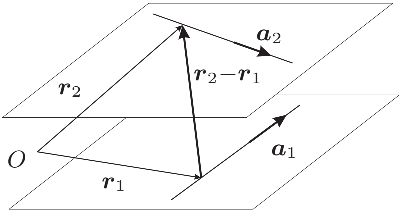


Рис. 11.5. Скрещивающиеся прямые

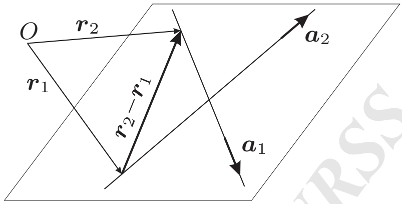


Рис. 11.6. Пересекающиеся прямые

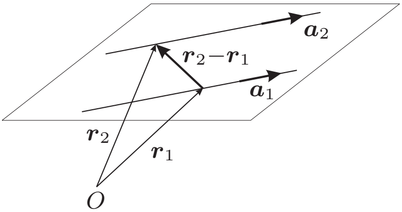


Рис. 11.7. Параллельные прямые

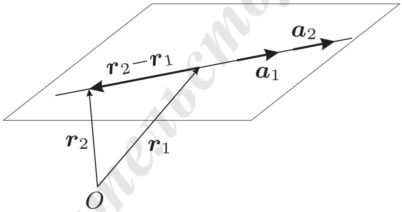


Рис. 11.8. Совпадающие прямые

этих прямых (например, вектор $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, соединяющий опорные точки), не компланарен упомянутым выше параллельным плоскостям. В этом случае

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \neq 0.$$

2. Прямые пересекаются; тогда они лежат в одной плоскости (см. рис. 11.6). Направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ прямых не коллинеарны, а любой вектор, соединяющий произвольно выбранные точки на этих прямых (например, вектор $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$), компланарен упомянутым выше параллельным плоскостям. В этом случае

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0.$$

3. Прямые параллельны, но не совпадают; тогда они лежат в одной плоскости (см. рис. 11.7). Направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ прямых коллинеарны, а любой вектор, соединяющий произвольно выбранные точки на этих прямых (например, вектор $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$), не коллинеарен векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. В этом случае

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}, \quad [\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] \neq \boldsymbol{0}.$$

4. Прямые совпадают; тогда они лежат в одной плоскости (см. рис. 11.8). Все три вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ коллинеарны. В этом случае

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}, \quad [\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{0}.$$

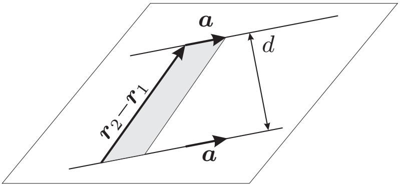


Рис. 11.9. К примеру 11.7

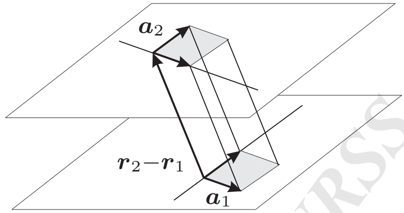


Рис. 11.10. К примеру 11.8

Пример 11.7. Найдите расстояние d между параллельными прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + s\boldsymbol{a}$.

Решение. Рассмотрим прямоугольник, сторонами которого являются векторы $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{a}$ (см. рис. 11.9). С одной стороны, по определению векторного произведения, его площадь равна $\big|[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big|$, а с другой — произведению длины основания $\boldsymbol{a}$ на высоту d, т.е. $|\boldsymbol{a}| \cdot d$, откуда

$$d = \frac{\big|[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\big|}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{11.9}$$

Пример 11.8. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + s\boldsymbol{a}_2$.

Решение. Рассмотрим параллелепипед, рёбрами которого являются векторы $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ (см. рис. 11.10). С одной стороны, согласно п. 2 теоремы 9.26 (см. с. 139), его объём равен модулю смешанного произведения этих векторов, т.е. $\big|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\big|$, а с другой — произведению площади основания $\big|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\big|$ на высоту d, откуда

$$d = \frac{\big|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)\big|}{\big|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\big|}. \tag{11.10}$$

Пример 11.9. Даны прямые l_1, l_2, l_3, l_4:

$$l_1:\ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_2:\ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1},$$
$$l_3:\ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_4:\ \frac{x+6}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Для каждой из шести возможных пар прямых выясните, являются они скрещивающимися, параллельными (совпадающими или нет) либо пересекающимися. Для пересекающихся прямых найдите координаты точки пересечения, уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые, и угол между ними. Для несовпадающих параллельных прямых найдите уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые, и расстояние между ними. Для скрещивающихся прямых найдите расстояние между ними, уравнения двух параллельных плоскостей, в которых лежат эти прямые, и каноническое уравнение их общего перпендикуляра (в качестве опорной точки возьмите точку пересечения этого общего перпендикуляра с одной из скрещивающихся прямых).

Решение.

1. Рассмотрим прямые l_1 и l_2:

$$l_1:\ \frac{x-3}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{1},\qquad l_2:\ \frac{x-4}{5}=\frac{y-5}{4}=\frac{z-5}{1}.$$

Очевидно, их направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1=(4;2;1)$ и $\boldsymbol{a}_2=(5;4;1)$ не коллинеарны, т.е. прямые не параллельны. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий опорные точки M_1 и M_2 данных прямых:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Выясним, компланарны ли векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, для чего вычислим их смешанное произведение:

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=\begin{vmatrix}1&2&0\\4&2&1\\5&4&1\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, эти три вектора компланарны, так что прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости и пересекаются. Найдём их точку пересечения. Для этого перепишем канонические уравнения прямых в параметрическом виде:

$$l_1:\ \frac{x-3}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{1}=t\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=3+4t,\\y=3+2t,\\z=5+t;\end{cases}$$

$$l_2:\ \frac{x-4}{5}=\frac{y-5}{4}=\frac{z-5}{1}=s\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=4+5s,\\y=5+4s,\\z=5+s.\end{cases}$$

Приравнивая выражения для одноимённых координат, получим переопределённую систему уравнений (которая, как нам заранее известно — ибо прямые пересекаются — имеет единственное решение)

$$\begin{cases}3+4t=4+5s,\\3+2t=5+4s,\\5+t=5+s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4t-5s=1,\\2t-4s=2,\\t-s=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-1,\\s=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,\\y=1,\\z=4.\end{cases}$$

Чтобы составить уравнение плоскости, в которой лежат прямые l_1 и l_2, найдём её нормальный вектор как векторное произведение направляющих векторов прямых l_1 и l_2:

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

В качестве опорной точки плоскости можно взять любую из опорных точек прямых l_1 или l_2 либо их точку пересечения (возьмём точку пересечения); в результате получаем

$$-2(x+1) + 1(y-1) + 6(z-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 6z + 27 = 0.$$

Наконец, найдём угол между прямыми:

$$\varphi = \arccos \frac{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}{|\boldsymbol{a}_1| \cdot |\boldsymbol{a}_1|} = \arccos \frac{29}{42}\sqrt{2}.$$

2. Рассмотрим прямые l_1 и l_3:

$$l_1: \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_3: \ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

Их направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1 = (4; 2; 1)$ и $\boldsymbol{a}_3 = (5; 4; 1)$ не коллинеарны, т.е. прямые не параллельны. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_3}$, соединяющий опорные точки M_1 и M_3 данных прямых:

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выясним, компланарны ли векторы $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$, для чего вычислим их смешанное произведение:

$$(\overrightarrow{M_1M_3}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0;$$

стало быть, векторы $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$ не компланарны, так что прямые l_1 и l_3 скрещиваются.

Составим уравнения параллельных плоскостей, в которых лежат эти прямые. Искомые плоскости имеют общий нормальный вектор

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

В качестве опорных точек этих плоскостей возьмём опорные точки соответствующих прямых. В результате получаем уравнение плоскости π_1, содержащей прямую l_1:

$$-2(x-3) + 1(y-3) + 6(z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 6z + 27 = 0,$$

и уравнение плоскости π_3, содержащей прямую l_3:

$$-2(x-0)+1(y-2)+6(z-5)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x-y-6z+32=0.$$

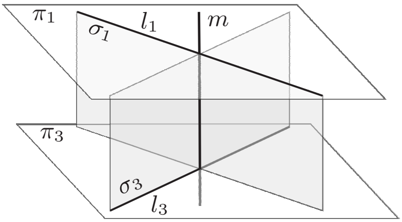


Рис. 11.11. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым

Общий перпендикуляр m к скрещивающимся прямым представляет собой пересечение двух плоскостей σ_1 и σ_3, каждая из которых содержит соответствующую прямую l_1 или l_3 и перпендикулярна к параллельным плоскостям π_1, π_3, содержащим данные скрещивающиеся прямые. Ясно, что направляющий вектор общего перпендикуляра совпадает с общим нормальным вектором плоскостей π_1 и π_3. Чтобы найти точки пересечения общего перпендикуляра m с самими скрещивающимися прямыми, составим уравнения плоскостей σ_1 и σ_3.

Плоскость σ_1 проходит через прямую l_1 перпендикулярно плоскости π_1; в качестве её опорной точки возьмём опорную точку $M_1(3;3;5)$ прямой l_1, а в качестве направляющих векторов — направляющий вектор $\boldsymbol{a}_1=(4;2;1)$ прямой l_1 и общий нормальный вектор $\boldsymbol{n}=(2;-1;-6)$ плоскостей π_1 и π_3:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad 11x-26y+8z+5=0.$$

Аналогично составляем уравнение плоскости σ_3: она проходит через прямую l_3 перпендикулярно плоскости π_3; в качестве её опорной точки возьмём опорную точку $M_3(0;2;5)$ прямой l_3, а в качестве направляющих векторов — направляющий вектор $\boldsymbol{a}_3=(5;4;1)$ прямой l_3 и общий нормальный вектор $\boldsymbol{n}=(2;-1;-6)$ плоскостей π_1 и π_3:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-5 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad 23x-32y+13z-1=0.$$

Точка пересечения общего перпендикуляра m с прямой l_1 представляет собой точку пересечения плоскостей π_1, σ_1, σ_3:

$$\begin{cases} 2x-y-6z+27=0, \\ 11x-26y+8z+5=0, \\ 23x-32y+13z-1=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=-25/41, \\ y=49/41, \\ z=168/41. \end{cases}$$

Аналогично, точка пересечения общего перпендикуляра с прямой l_3 представляет собой точку пересечения плоскостей π_3, σ_1, σ_3:

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 32 = 0, \\ 11x - 26y + 8z + 5 = 0, \\ 23x - 32y + 13z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -35/41, \\ y = 54/41, \\ z = 198/41. \end{cases}$$

Таким образом, каноническое уравнение общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым l_1 и l_3 можно записать в одной из следующих форм:

$$\frac{x + \frac{25}{41}}{-2} = \frac{y - \frac{49}{41}}{1} = \frac{z - \frac{168}{41}}{6} \quad \text{или} \quad \frac{x + \frac{35}{41}}{-2} = \frac{y - \frac{54}{41}}{1} = \frac{z - \frac{198}{41}}{6}.$$

В первом из этих уравнений в качестве опорной точки взята точка пересечения общего перпендикуляра с прямой l_1, а во втором — с l_3.

Расстояние между скрещивающимися прямыми найдём по формуле (11.10). Имеем:

$$(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \big|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3]\big| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{41}.$$

Таким образом,

$$d = \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

3. Рассмотрим прямые l_1 и l_4:

$$l_1: \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_4: \ \frac{x+6}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Поскольку направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1 = (4; 2; 1)$ и $\boldsymbol{a}_4 = (5; 4; 1)$ не коллинеарны, прямые l_1 и l_4 не параллельны. Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_4$ и

$$\overrightarrow{M_1M_4} = \boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

компланарны, что подтверждается вычислением определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ -9 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

прямые l_1 и l_4 лежат в одной плоскости и пересекаются в единственной точке. Как и выше, можно найти уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые, и их точку пересечения (далее будет показано, что прямые l_2 и l_4 совпадают, так что рассматриваемый случай фактически совпадает со случаем прямых l_1 и l_2, рассмотренным выше).

4. Рассмотрим прямые l_2 и l_3:

$$l_2: \ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_3: \ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

Направляющие векторы этих прямых $\boldsymbol{a}_2 = (5;4;1)$ и $\boldsymbol{a}_3 = (5;4;1)$ равны, так что прямые параллельны. Поскольку $\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2 = (-4;-3;0)$ не коллинеарны, прямые l_2 и l_3 параллельны, но не совпадают. Составим уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые; в качестве опорной точки возьмём опорную точку $M_2(4;5;5)$ прямой l_2, в качестве направляющих векторов — векторы $\boldsymbol{a}_2 = (5;4;1)$ и $\overrightarrow{M_2M_3} = (-4;-3;0)$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-5 \\ 5 & 4 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y + z + 3 = 0;$$

коэффициенты при x, y, z в этом уравнении суть координаты вектора нормали плоскости, равного $[\boldsymbol{a}_2, \overrightarrow{M_2M_3}]$ (этот факт понадобится чуть позже).

Расстояние d между параллельными прямыми l_2 и l_3 найдём по формуле (11.9):

$$d = \frac{\left|[\overrightarrow{M_2M_3}, \boldsymbol{a}_2]\right|}{|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}}{\sqrt{5^2+4^2+1^2}} = \sqrt{\frac{13}{21}}.$$

5. Рассмотрим прямые l_2 и l_4:

$$l_2: \ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_4: \ \frac{x+6}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Направляющие векторы этих прямых $\boldsymbol{a}_2(5;4;1)$ и $\boldsymbol{a}_4(5;4;1)$ совпадают, так что прямые параллельны. Поскольку $\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_4} = \boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_2 = (-10;-8;-2)$ коллинеарны, прямые l_2 и l_4 совпадают. Факт коллинеарности достаточно очевиден, поскольку векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_4}$ пропорциональны, но его можно установить, вычисляя векторное произведение этих векторов:

$$[\boldsymbol{a}_2, \overrightarrow{M_2M_4}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 4 & 1 \\ -10 & -8 & -2 \end{vmatrix} = bfo.$$

6. Наконец, рассмотрим прямые l_3 и l_4:

$$l_3: \ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_4: \ \frac{x+6}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Поскольку $l_2 = l_4$, задача тождественна рассмотрению прямых l_2 и l_3, которое было проведено выше.

Пример 11.10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей

$$\pi_1 : x - 2y + 3z + 5 = 0, \quad \pi_1 : 2x + y - z + 2 = 0$$

перпендикулярно плоскости $\pi : x - y + 4z = 4$.

Решение. Искомая плоскость принадлежит пучку плоскостей, осью которого является линия пересечения плоскостей π_1 и π_2, так что её уравнение имеет вид

$$\alpha(x - 2y + 3z + 5) + \beta(2x + y - z + 2) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x(\alpha + 2\beta) + y(-2\alpha + \beta) + z(3\alpha - \beta) + (5\alpha + 2\beta) = 0.$$

Условие перпендикулярности этой плоскости и плоскости π выражается как равенство нулю скалярного произведения их нормальных векторов:

$$1 \cdot (\alpha + 2\beta) + (-1) \cdot (-2\alpha + \beta) + 4 \cdot (3\alpha - \beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad 15\alpha - 3\beta = 0.$$

В качестве решения этого уравнения можно взять $\alpha = 1$, $\beta = 5$; подставляя эти значения в уравнение пучка плоскостей, получаем уравнение искомой плоскости: $11x + 3y - 2z + 15 = 0$.

4. Задачи для самостоятельного решения

11.1. Составьте уравнения следующих прямых и плоскостей:

(a) уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -3; 1)$ параллельно векторам $\boldsymbol{a} = (5; -7; 4)$ и $\boldsymbol{b} = (0; -1; 1)$;

(b) уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3; -5; 2)$ и $B(-1; 0; 4)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a} = (7; -3; 0)$;

(c) уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 3; -1)$, $B(-5; 0; 1)$ и $C(3; 6; -3)$;

(d) уравнения двух параллельных плоскостей, в которых лежат скрещивающиеся прямые $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{-7} = \dfrac{z-1}{3}$ и $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-1}{11} = \dfrac{z+4}{0}$;

(e) уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 3; -4)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = (1; 3; -2)$;

(f) уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2; 5; -7)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+4}{0} = \dfrac{z}{3}$.

11.2. Составьте уравнения следующих прямых и плоскостей:

(a) векторное параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ перпендикулярно плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$;

(b) каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz = D$;

(c) векторное нормальное уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ перпендикулярно прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$;

(d) уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x - x_0}{a_x} = \dfrac{y - y_0}{a_y} = \dfrac{z - z_0}{a_z}$;

(e) векторное нормальное уравнение плоскости, проходящей через прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ и точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, не лежащую на этой прямой;

(f) уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную каноническим уравнением $\dfrac{x - x_0}{a_x} = \dfrac{y - y_0}{a_y} = \dfrac{z - z_0}{a_z}$, и точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не лежащую на этой прямой;

(g) векторное нормальное уравнение плоскости, проходящей через прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ перпендикулярно плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$;

(h) уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную каноническим уравнением $\dfrac{x - x_0}{a_x} = \dfrac{y - y_0}{a_y} = \dfrac{z - z_0}{a_z}$, перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz = D$;

(i) векторное нормальное уравнение плоскости, проходящей через прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$ параллельно прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + s\boldsymbol{b}$ при условии, что прямые не параллельны (т.е. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \neq \boldsymbol{0}$);

(j) уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную каноническим уравнением $\dfrac{x - x_0}{a_x} = \dfrac{y - y_0}{a_y} = \dfrac{z - z_0}{a_z}$, параллельно прямой $\dfrac{x - x_1}{b_x} = \dfrac{y - y_1}{b_y} = \dfrac{z - z_1}{b_z}$ при условии, что прямые не параллельны.

11.3. Даны плоскость π и три прямые l_1, l_2, l_3. Для каждой из прямых выяснить, пересекается она с плоскостью, параллельна ей или лежит в плоскости. В случае пересечения найти координаты общей точки плоскости и прямой.

$$\pi: \ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad l_1: \ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$l_2: \ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad l_3: \ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -16 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -19 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

11.4. Прямая задана как пересечение двух плоскостей

$$2x + 5y - z - 7 = 0, \quad 5x - 7y + 3z + 5 = 0.$$

Запишите векторное параметрическое уравнение и каноническое уравнение этой прямой, взяв точку, лежащую в плоскости Oyz, в качестве опорной.

11.5. Найдите координаты проекции точки $A(6; 5; -5)$ на плоскость, заданную уравнением $x - 2y + z + 7 = 0$, параллельно прямой $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

11.6. Найдите координаты проекции точки $A(2; 0; -1)$ на прямую, заданную уравнением $\dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y + 3}{0} = \dfrac{z - 2}{1}$, параллельно плоскости $3x - y - 2z = 0$.

11.7. Найдите координаты точки P, представляющей собой ортогональную проекцию точки $A(-2; 0; 5)$ на плоскость π, заданную уравнением $5x + 3y - 6z = 30$, координаты точки S, симметричной точке A относительно плоскости π, и расстояние d от точки A до плоскости π. Решите задачу, не пользуясь формулами (11.1)–(11.3).

11.8. Найдите координаты точки P, представляющей собой ортогональную проекцию точки $(3; 5; -7)$ на прямую l, заданную каноническим уравнением $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{0}$, координаты точки S, симметричной точке A относительно прямой π, и расстояние d от точки A до прямой l. Решите задачу, не пользуясь формулами (11.6)–(11.8).

11.9. Составьте каноническое уравнение общего перпендикуляра к двум данным скрещивающимся прямым, взяв в качестве опорной точки точку пересечения этого перпендикуляра с одной из данных прямых. Найдите координаты обеих точек пересечения и расстояние между данными прямыми:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}, \qquad \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}.$$

11.10. Составьте уравнение прямой l, пересекающей две скрещивающиеся прямые $l_1 : \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-7}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$ и $l_2 : \dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y-16}{1} = \dfrac{z-4}{2}$ и проходящей через точку $A(-1; 1; 0)$, не лежащую ни на одной из этих прямых. Найдите координаты точек пересечения прямой l с прямыми l_1 и l_2.

11.11. Составьте уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $\pi_1 : 3x - y + 2z + 2 = 0$ и $\pi_1 : x + 2y - 5z - 4 = 0$ перпендикулярно плоскости $\pi : x - 2y - z = 0$.

ГЛАВА 12

Эллипс, гипербола, парабола

1. Основные понятия и факты

А. Эллипс.

12.1. Определение (фокальное определение эллипса)**.** *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами* эллипса) есть постоянная величина, которую обозначим $2a$; требуется чтобы эта постоянная была больше расстояния между фокусами, которое обозначим $2c$.

Для каждой точки M эллипса отрезки F_1M и F_2M, а также их длины называются фокальными радиусами точки M.

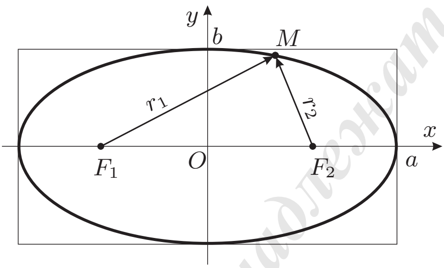


Рис. 12.1. Эллипс в канонической системе координат

Канонической системой координат для данного эллипса называется прямоугольная декартова система координат, ось абсцисс которой проходит через фокусы F_1 и F_2 (она называется *фокальной осью* эллипса), а началом является середина отрезка F_1F_2, соединяющего фокусы. Уравнение эллипса в канонической системе координат (*каноническое уравнение эллипса*) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{12.1}$$

где a — *большая полуось* эллипса, b — *малая полуось* эллипса, выражаемая через a и c формулой

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Эксцентриситетом эллипса называется величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1.$$

Эксцентриситет характеризует степень «вытянутости» эллипса.

Фокальные радиусы произвольной точки $M(x, y)$ эллипса линейно выражаются через абсциссу этой точки:

$$r_1 = |F_1M| = a + x\varepsilon, \quad r_2 = |F_2M| = a - x\varepsilon.$$

Две прямые, перпендикулярные фокальной оси эллипса и имеющие в канонической системе координат уравнения

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами* эллипса. Уравнения директрис можно записать в виде

$$x = -\frac{a^2}{c}, \quad x = \frac{a^2}{c}.$$

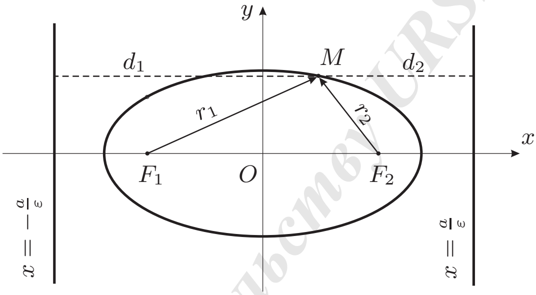


Рис. 12.2. Директрисы эллипса

12.2. Теорема (директориальное свойство эллипса). *Отношение расстояния r_1 (соответственно, r_2) от каждой точки эллипса до его левого (соответственно, правого) фокуса к расстоянию d_1 (соответственно d_2) от этой точки до левой (соответственно, правой) директрисы одинаково для всех точек эллипса и равно эксцентриситету*:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon < 1.$$

Обратно, множество всех точек плоскости, обладающих указанным свойством (т.е. таких, для которых отношение расстояния до фиксированной точки к расстоянию до фиксированной прямой одно и то же и меньше 1*), представляет собой эллипс.*

Основные термины, связанные с эллипсом:

(i) ось Ox — большая (фокальная) ось;
(ii) ось Oy — малая ось;
(iii) точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ — вершины эллипса;
(iv) точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы эллипса;
(v) точка $O(0, 0)$ — центр эллипса;
(vi) число a — большая полуось;
(vii) число b — малая полуось;
(viii) число $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(ix) число $2c = |F_1F_2|$ — фокусное расстояние;
(x) число $\varepsilon = c/a < 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(xi) прямые $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ — директрисы.

Обратите внимание, что *оси* эллипса — это прямые, а *полуоси* — это числа.

В. Гипербола.

12.3. Определение (фокальное определение гиперболы). *Гиперболой* называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек (называемых *фокусами* гиперболы) есть постоянная величина, которую обозначим $2a$; требуется, чтобы эта постоянная была меньше расстояния $2c$ между фокусами и отлична от нуля.

Для каждой точки M гиперболы отрезки F_1M и F_2M, а также их длины называются *фокальными радиусами* точки M.

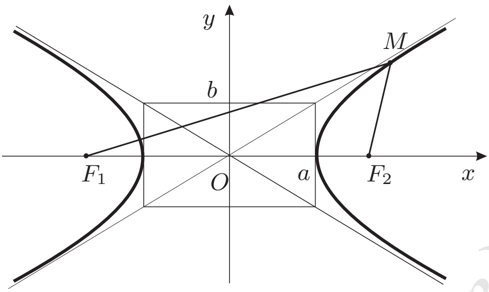


Рис. 12.3. Гипербола в канонической системе координат

Канонической системой координат для данной гиперболы называется прямоугольная декартова система координат, ось абсцисс которой проходит через фокусы F_1 и F_2 (она называется *фокальной осью* гиперболы), а началом является середина отрезка F_1F_2, соединяющего фокусы. Уравнение гиперболы в канонической системе координат (*каноническое уравнение гиперболы*)имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{12.2}$$

где a — *вещественная полуось* гиперболы, b — *мнимая полуось* гиперболы, выражаемая через a и c формулой

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Две прямые, имеющие в канонической системе координат уравнения

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

являются *наклонными асимптотами* гиперболы. Прямоугольник со сторонами, параллельными осям гиперболы, диагонали которого лежат на асимптотах, называется *основным прямоугольником* гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1.$$

Эксцентриситет характеризует степень «вытянутости» основного прямоугольника гиперболы и, следовательно, величину угла между её асимптотами.

Две прямые, перпендикулярные фокальной оси гиперболы и имеющие в канонической системе координат уравнения

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами* гиперболы. Уравнения директрис можно записать в виде

$$x = -\frac{a^2}{c}, \quad x = \frac{a^2}{c}.$$

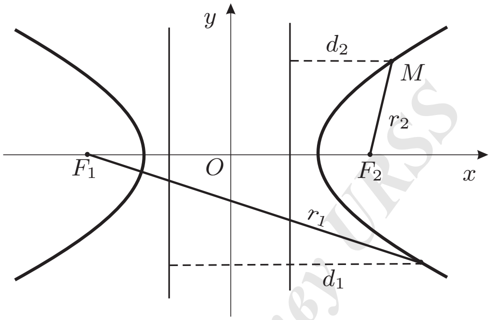


Рис. 12.4. Директрисы гиперболы

Фокальные радиусы произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы линейно выражаются через абсциссу этой точки:

$$r_1 = \begin{cases} x\varepsilon + a, & x > 0, \\ -x\varepsilon - a, & x < 0, \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} x\varepsilon - a, & x > 0, \\ -x\varepsilon + a, & x < 0. \end{cases}$$

12.4. Теорема (директориальное свойство гиперболы)**.** *Отношение расстояния* r_1 (*соответственно,* r_2) *от каждой точки гиперболы до её левого* (*соответственно, правого*) *фокуса к расстоянию* d_1 (*соответственно,* d_2) *от этой точки до левой* (*соответственно правой*) *директрисы одинаково для всех точек гиперболы и равно эксцентриситету*:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon > 1$$

Обратно, множество всех точек плоскости, обладающих указанным свойством (*т.е. таких, для которых отношение расстояния до фиксированной точки к расстоянию до фиксированной прямой одно и то же и больше* 1), *представляет собой гиперболу.*

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

также определяет гиперболу, называемую *сопряжённой* по отношению к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Взаимно сопряжённые гиперболы имеют общую каноническую систему координат, общий основной прямоугольник и общие асимптоты.

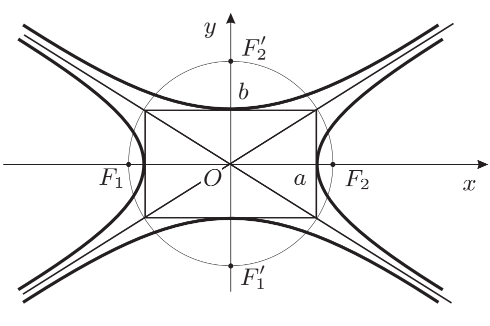


Рис. 12.5. Взаимно сопряжённые гиперболы

Основные термины, связанные с гиперболой:

(i) ось Ox — вещественная (фокальная) ось;
(ii) ось Oy — мнимая (сопряжённая) ось;
(iii) точки $(\pm a, 0)$ — вершины гиперболы;
(iv) точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — фокусы гиперболы;
(v) точка $O(0, 0)$ — центр гиперболы;
(vi) прямые $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$, $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$ — асимптоты гиперболы;
(vii) число a — вещественная полуось;
(viii) число b — мнимая полуось;
(ix) число $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — линейный эксцентриситет;
(x) число $2c = |F_1F_2|$ — фокусное расстояние;
(xi) число $\varepsilon = c/a > 1$ — (числовой) эксцентриситет;
(xii) прямые $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$, $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ — директрисы.

C. Парабола.

12.5. Определение (фокально-директориальное определение параболы)**.** *Параболой* называется множество точек, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки (называемой фокусом) равно расстоянию до фиксированной прямой (называемой директрисой).

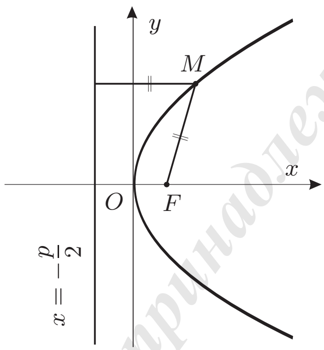


Рис. 12.6. Парабола в канонической системе координат

Каноническая система координат для данной параболы — это прямоугольная декартова система координат, ось абсцисс которой проходит через фокус F параболы перпендикулярно директрисе (она называется *фокальной осью* параболы), а началом является середина перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису. Уравнение параболы в канонической системе координат (*уравнение параболы*) имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{12.3}$$

Эксцентриситет параболы считается равным единице по определению.

Основные термины, связанные с параболой:

(i) ось Ox — (фокальная) ось параболы;
(ii) точка $F(p/2, 0)$ — фокус;
(iii) точка $O(0; 0)$ — вершина параболы;
(iv) прямая $x = -p/2$ — директриса;
(v) число p — (фокальный) параметр;
(vi) число $p/2 = |OF|$ — фокусное расстояние.

D. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. Оптические свойства. *Касательной к эллипсу* называется прямая, имеющая с эллипсом единственную общую точку. Уравнение касательной к эллипсу (12.1) имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \tag{12.4}$$

где (x_0, y_0) — координаты точки касания.

Касательной к гиперболе называется прямая, имеющая с гиперболой единственную общую точку и не параллельная асимптотам гиперболы. Уравнение касательной к гиперболе (12.2) имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \tag{12.5}$$

где (x_0, y_0) — координаты точки касания.

Касательная к параболе — это прямая, имеющая с параболой единственную общую точку и не параллельная оси параболы. Уравнение касательной к параболе (12.3) имеет вид

$$yy_0 = p(x + x_0), \tag{12.6}$$

где (x_0, y_0) — координаты точки касания.

12.6. Теорема (оптическое свойство эллипса)**.** *Фокальные радиусы произвольной точки M эллипса составляют равные углы с касательной к эллипсу, проведённой через точку M.*

Этот результат имеет простую физическую интерпретацию, объясняющую название теоремы: свет от точечного источника, помещённого в одном из фокусов эллипса, отражается эллипсом так, что отражённые лучи проходят через другой фокус.

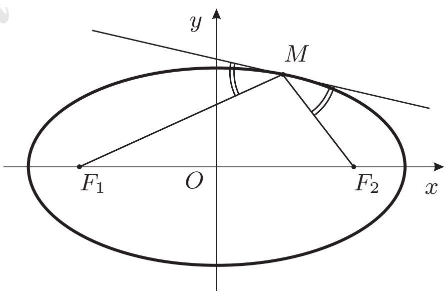


Рис. 12.7. Оптическое свойство эллипса

12.7. Теорема (оптическое свойство гиперболы)**.** *Фокальные радиусы произвольной точки M гиперболы составляют равные углы с касательной к гиперболе, проведённой через точку M.*

12.8. Теорема (оптическое свойство параболы)**.** *Фокальный радиус произвольной точки M параболы и ось параболы составляют равные углы с касательной к параболе, проведённой через точку M.*

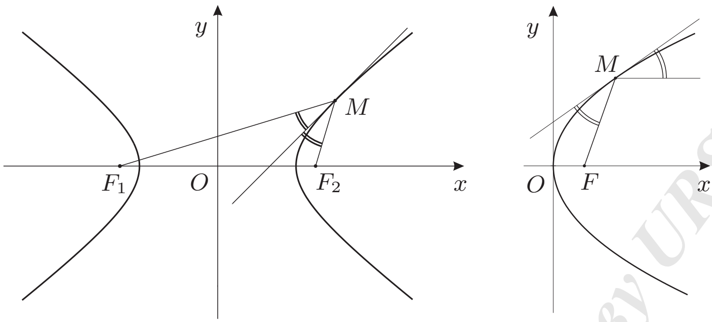


Рис. 12.8. Оптические свойства гиперболы и параболы

Е. Общие свойства эллипса, гиперболы и параболы. Парабола, эллипс и гипербола (вернее, одна её ветвь) задаются в полярных координатах одним и тем же уравнением

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}.$$

При этом полюс полярной системы координат находится в фокусе параболы, либо в левом фокусе эллипса, либо в правом фокусе гиперболы. Парабола получается при $\varepsilon = 1$, эллипс — при $0 < \varepsilon < 1$, окружность — при $\varepsilon = 0$, гипербола — при $\varepsilon > 1$. Число p, называемое *фокальным параметром*, имеет следующий геометрический смысл: это половина длины фокальной хорды, т.е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно фокальной оси.

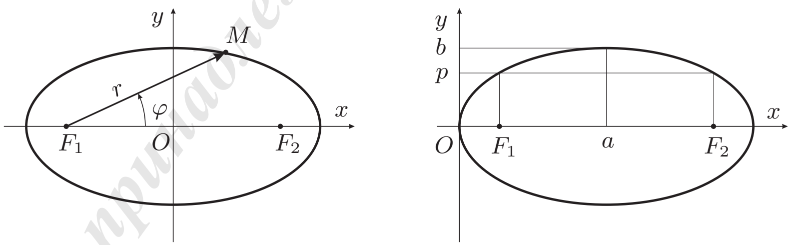


Рис. 12.9. Эллипс в полярной системе координат и в декартовой системе координат, отнесённой к левой вершине

Эллипс, гипербола и парабола имеют одно и то же уравнение в системе координат, начало которых совмещено с одной из вершин (для параболы — с её единственной вершиной, для эллипса — с левой вершиной, для гиперболы — с правой):

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2;$$

здесь ε — эксцентриситет линии.

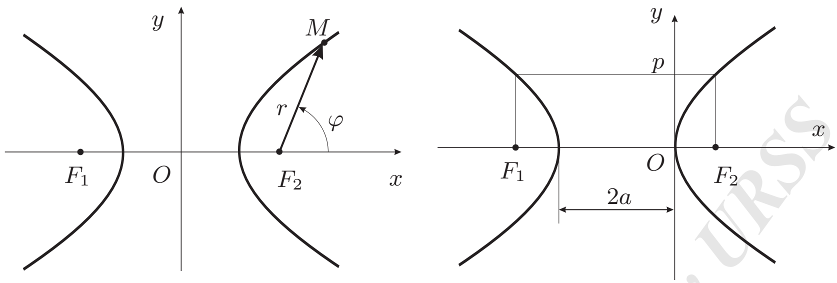


Рис. 12.10. Гипербола в полярной системе координат и в декартовой системе координат, отнесённой к правой вершине

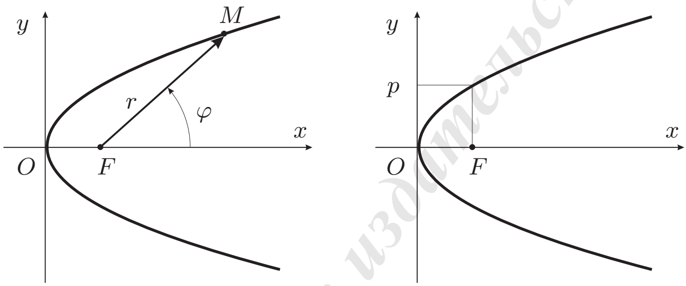


Рис. 12.11. Парабола в полярной системе координат и в декартовой системе координат, отнесённой к вершине

Эллипс, гипербола и парабола могут быть получены как плоские сечения круговой конической поверхности, образованной вращением прямой вокруг оси, пересекающейся с этой прямой (см. рис. 12.12). В зависимости от положения секущей плоскости в сечении получается эллипс, гипербола или парабола.

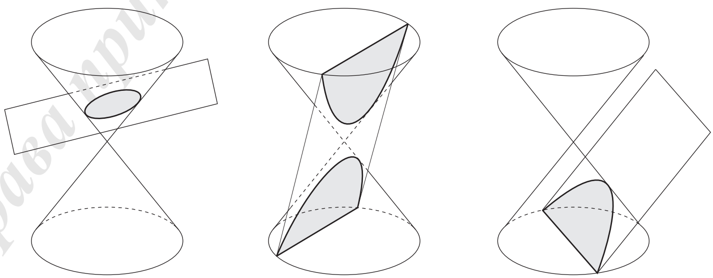


Рис. 12.12. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения

2. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте фокальное определение эллипса.
2. Какая система координат называется канонической для данного эллипса?
3. Выведите каноническое уравнение эллипса.
4. Выведите формулы, линейно выражающие фокальные радиусы произвольной точки эллипса через её абсциссу.
5. Сформулируйте и докажите директориальное свойство эллипса.
6. Что такое касательная к эллипсу?
7. Выведите уравнение касательной к эллипсу.
8. Сформулируйте и докажите оптическое свойство эллипса.
9. Сформулируйте фокальное определение гиперболы.
10. Какая система координат называется канонической для данной гиперболы?
11. Выведите каноническое уравнение гиперболы.
12. Выведите формулы, линейно выражающие фокальные радиусы произвольной точки гиперболы через её абсциссу.
13. Сформулируйте и докажите директориальное свойство гиперболы.
14. Что такое касательная к гиперболе?
15. Выведите уравнение касательной к гиперболе.
16. Сформулируйте и докажите оптическое свойство гиперболы.
17. Сформулируйте фокально-директориальное определение параболы.
18. Какая система координат называется канонической для данной параболы?
19. Выведите каноническое уравнение параболы.
20. Что такое касательная к параболе?
21. Выведите уравнение касательной к параболе.
22. Сформулируйте и докажите оптическое свойство параболы.
23. Запишите уравнение эллипса, гиперболы, параболы в полярной системе координат и сформулируйте условия, при которых это уравнение имеет место.
24. Запишите уравнение эллипса, гиперболы, параболы в декартовой системе координат, отнесённой к вершине.

3. Примеры решения задач

Пример 12.1. Докажите, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой касательной к нему есть величина постоянная, и найдите её.

Решение. Рассмотрим касательную к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, проведённую через точку (x_0, y_0), лежащую на этом эллипсе; её уравнение имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Расстояния от фокусов $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ до этой касательной равны соответственно

$$d_1 = \frac{\left|\dfrac{(-c)\cdot x_0}{a^2} + \dfrac{0\cdot y_0}{b^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}},$$

$$d_2 = \frac{\left|\dfrac{c\cdot x_0}{a^2} + \dfrac{0\cdot y_0}{b^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{a - \varepsilon x_0}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Найдём произведение этих величин:

$$d_1 d_2 = \frac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} \cdot \frac{a - \varepsilon x_0}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{a^2 - \varepsilon^2 x_0^2}{a^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}\right)} = \frac{a^2 - \varepsilon^2 x_0^2}{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{b^2}\left(1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}$$

$$= \frac{a^2 - \varepsilon^2 x_0^2}{\dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{x_0^2}{a^2}\left(\dfrac{a^2}{b^2} - 1\right)} = \frac{a^2 - \varepsilon^2 x_0^2}{\dfrac{a^2}{b^2} - \dfrac{x_0^2}{a^2}\dfrac{c^2}{b^2}} = \frac{a^2 - \varepsilon^2 x_0^2}{\dfrac{1}{b^2}\left(a^2 - \varepsilon^2 x_0^2\right)} = b^2.$$

Пример 12.2. Найдите эксцентриситет эллипса, если известно, что в эллипс можно вписать равносторонний треугольник, одна из вершин которого лежит на большой оси, а противолежащая этой вершине сторона проходит через фокус эллипса.

Решение. Пусть ABC — равносторонний треугольник, вписанный в эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b,$$

так что вершина A совпадает с левой вершиной эллипса $(-a; 0)$, а противолежащая ей сторона BC проходит через фокус F_1 или F_2 эллипса (какой именно, пока не известно, так что будем писать просто F). Ясно, что отрезок BC перпендикулярен фокальной оси эллипса. Имеем

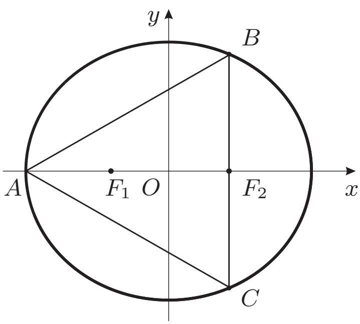


Рис. 12.13.

$$|BF| = p = \frac{b^2}{a} = \frac{(a+c)(a-c)}{a};$$

с другой стороны,

$$|BF| = \frac{1}{\sqrt{3}}|AF|.$$

Мы должны рассмотреть два случая в зависимости от того, через какой фокус — ближайший к вершине A или далёкий от неё — проходит сторона $[BC]$.

В первом случае имеем $|AF| = |AF_1| = a - c$, так что

$$|BF| = |BF_1| = \frac{(a+c)(a-c)}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(a-c),$$

$$1 + \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0,$$

что невозможно. Следовательно, сторона BC не может проходить через фокус, ближайший к вершине A.

Во втором случае $|AF| = |AF_2| = a + c$, так что

$$|BF| = |BF_2| = \frac{(a+c)(a-c)}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(a+c) \;\Rightarrow\; \varepsilon = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пример 12.3. Докажите, что касательные к эллипсу отсекают на двух касательных к нему, проведённых в концах большой оси, отрезки, произведение которых равно квадрату малой полуоси эллипса.

Решение. Рассмотрим эллипс, заданный каноническим уравнением (12.1), и проведём через точку (x_0, y_0), лежащую на этом эллипсе, касательную с уравнением (12.4). Касательные к эллипсу, проведённые в концах большой оси, имеют уравнения $x = -a$ и $x = a$. Найдём точки пересечения касательных:

$$\begin{cases} x = -a, \\ \dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(-a;\ \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right)\right),$$

$$\begin{cases} x = a, \\ \dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(a;\ \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right)\right).$$

Таким образом, длины отрезков, отсекаемых первой касательной на двух других, равны

$$\frac{b^2}{y_0}\left|1 + \frac{x_0}{a}\right|, \quad \frac{b^2}{y_0}\left|1 - \frac{x_0}{a}\right|.$$

Их произведение равно

$$\frac{b^4}{y_0^2}\left|1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right| = \frac{b^4}{y_0^2} \cdot \frac{y_0^2}{b^2} = b^2,$$

что и требовалось доказать.

Пример 12.4. Выведите параметрические уравнения эллипса.

Решение. Поскольку сумма квадратов выражений x/a и y/b равна единице, эти выражения представляют собой соответственно косинус и синус некоторого угла, который мы и возьмём в качестве параметра:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

В случае $a = b$ эллипс превращается в окружность, а параметр t имеет геометрический смысл угла между радиус-вектором соответствующей точки окружности и положительным направлением оси Ox.

В случае $a \neq b$ параметр t не равен углу φ между осью Ox и радиус-вектором точки эллипса. Действительно, для точек первой четверти тангенс указанного угла равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{b \sin t}{a \cos t} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} t.$$

Параметр t называется *эксцентрическим* параметром; его геометрический смысл ясен из рис. 12.14. Параметрические уравнения эллипса, в которых параметром является угол φ, обсуждаются в задаче 12.11 для самостоятельного решения.

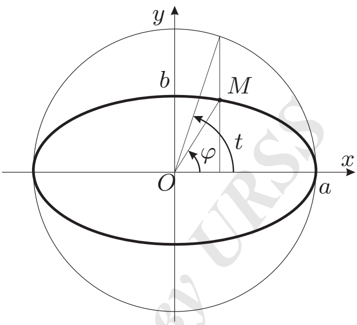


Рис. 12.14. Эксцентрический параметр эллипса

Пример 12.5.

Докажите, что софокусные (т.е. имеющие общие фокусы) эллипс и гипербола пересекаются под прямым углом (т.е. их касательные в точке пересечения перпендикулярны).

Решение. Пусть эллипс и гипербола с фокусами F_1 и F_2 пересекаются в точке M. Тогда, согласно оптическим свойствам эллипса и гиперболы, касательные к ним в этой точке являются биссектрисами внешнего и внутреннего углов F_1MF_2 соответственно, а потому перпендикулярны.

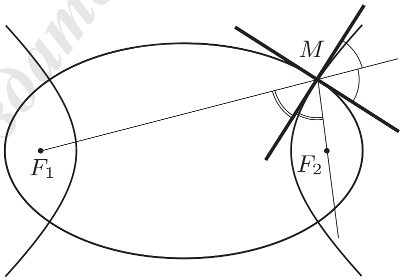


Рис. 12.15. Софокусные эллипс и гипербола

Пример 12.6. Выведите параметрические уравнения гиперболы.

Решение. Запишем каноническое уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \neq 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \neq 0.$$

Положим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = t;$$

тогда $t \neq 0$ и в силу уравнения гиперболы

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}.$$

Разрешая полученную систему двух линейных уравнений относительно x и y, получим
$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$
Мы доказали, что координаты любой точки гиперболы можно представить в указанном виде, где $t \neq 0$. Обратно, при любом $t \neq 0$ точка с найденными координатами лежит на гиперболе, в чём легко убедиться, поставляя полученные выражения в каноническое уравнение гиперболы.

Если точка $M(x, y)$ лежит на правой ветви гиперболы, то
$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \geqslant a \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2}\frac{t^2+1}{t} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad t > 0.$$

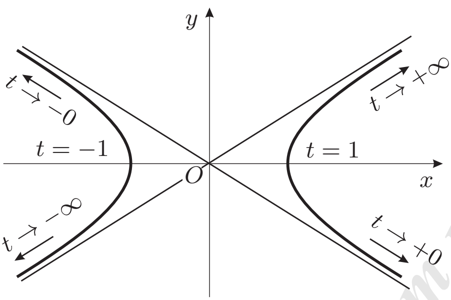


Рис. 12.16. Параметрическое задание гиперболы

Обратно, если $t > 0$, то $x \geqslant a$. При изменении t в промежутке $(0; 1]$ значение x убывает от $+\infty$ до a, а значение y возрастает от $-\infty$ до 0. При изменении t в промежутке $[1; +\infty)$ значение x возрастает от a до $+\infty$, а значение y возрастает от 0 до $+\infty$. При $t = 1$ получается правая вершина гиперболы. Значения $-\infty < t < 0$ отвечают левой ветви гиперболы: если $\infty < t \leqslant -1$, то x возрастает от $-\infty$ до $-a$, а y возрастает от $-\infty$ до 0; если же $-1 \leqslant t < 0$, то x убывает от $-a$ до $-\infty$, а y возрастает от 0 до $+\infty$.

Часто гиперболу (вернее, одну её ветвь) параметризуют с помощью гиперболических функций (см. с. 37). Положим $t = e^u$, где e — основание натурального логарифма; тогда, очевидно, $1/t = e^{-u}$. При изменении u на всей числовой оси, $-\infty < u < +\infty$, параметр t принимает значения в промежутке $(0; +\infty)$, отвечающем правой ветви гиперболы. Таким образом, при помощи гиперболических функций
$$\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$
правая ветвь гиперболы может быть задана соотношениями
$$x = a \operatorname{ch} u, \ y = b \operatorname{sh} u, \quad u \in (-\infty; +\infty),$$
похожими на параметрические уравнения эллипса (см. пример 12.4).

Пример 12.7. Докажите, что если оси двух парабол взаимно перпендикулярны, то четыре точки их пересечения лежат на одной окружности.

Решение. Если за оси прямоугольной системы координат принять оси данных парабол, то их уравнения в этой системе координат будут
$$y^2 = 2p(x + a), \quad x^2 = 2q(y + b), \quad a, b, p, q > 0.$$

Складывая эти уравнения, получим
$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy - 2ap - 2bq = 0.$$
Выделяя полные квадраты, приведём это уравнение к виду
$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = p^2 + q^2 + 2ap + 2bq;$$
это уравнение окружности с центром в точке (p, q). Если координаты некоторой точки A удовлетворяют уравнениям обеих парабол, то они удовлетворяют и полученному уравнению окружности, а это и означает, что точки пересечения парабол лежат на найденной окружности.

4. Задачи для самостоятельного решения

12.1. Составьте каноническое уравнение эллипса по следующим данным:

(a) полуоси равны 2 и 5;
(b) большая полуось равна 5, расстояние между фокусами равно 8;
(c) малая полуось равна 12, расстояние между фокусами равно 10;
(d) эксцентриситет равен 3/5, расстояние между фокусами равно 6;
(e) большая полуось равна 10, эксцентриситет равен 3/5;
(f) малая полуось равна 5, эксцентриситет равен 12/13;
(g) расстояние между директрисами равно 5, расстояние между фокусами равно 4;
(h) большая полуось равна 4, расстояние между директрисами равно 16;
(i) малая полуось равна 3, расстояние между директрисами равно 13;
(j) расстояние между директрисами равно 32, эксцентриситет равен 1/2.

12.2. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

12.3. Составьте каноническое уравнение гиперболы по следующим данным:

(a) полуоси равны 5 и 4;
(b) расстояние между её фокусами равно 10, мнимая полуось равна 4;
(c) расстояние между её фокусами равно 6, эксцентриситет равен 3/2;
(d) вещественная полуось равна 8, эксцентриситет равен 5/4;
(e) уравнения асимптот $4x \pm 3y = 0$, а расстояние между фокусами равно 20;
(f) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$, расстояние между фокусами равно 26;
(g) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$, мнимая полуось равна 3;
(h) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$, эксцентриситет равен 3/2;
(i) уравнения асимптот $3x \pm 4y = 0$, расстояние между директрисами равно $12\frac{4}{5}$.

12.4. (a) Найдите эксцентриситет равносторонней гиперболы (т.е. гиперболы, полуоси которой равны).
(b) Найдите соотношение, связывающее эксцентриситеты ε и ε' двух взаимно сопряжённых гипербол.

12.5. Для данной гиперболы найдите фокусы, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот, уравнения директрис: (a) $16x^2 - 9y^2 = 144$; (b) $16x^2 - 9y^2 = -144$.

12.6. Составьте уравнение параболы, вершина которой находится в начала координат, зная, что парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку (a) $A(1;3)$; (b) $A(-1;3)$.

12.7. (a) Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

(b) Найдите фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 20x$, если абсцисса точки M равна 7.

(c) Составьте уравнение параболы, если даны её фокус $F(7;2)$ и директриса $x - 5 = 0$.

12.8. Установите, что уравнение определяет параболу, и найдите координаты её вершины, величину параметра p и уравнение директрисы: (a) $y^2 = 4x - 8$; (b) $x^2 = 2 - y$.

12.9. (a) Составьте полярное уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в левом фокусе эллипса.

(b) Составьте полярное уравнение правой ветви гиперболы $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в правом фокусе гиперболы.

(c) Составьте полярное уравнение параболы $y^2 = 6x$, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в фокусе параболы.

12.10. Определите, какую линию определяет полярное уравнение, и запишите её каноническое уравнение: (a) $r = \dfrac{3}{2 - 2\cos\varphi}$; (b) $r = \dfrac{18}{4 - 5\cos\varphi}$; (c) $r = \dfrac{144}{13 - 5\cos\varphi}$.

12.11. Запишите параметрические уравнения эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, взяв в качестве параметра угол φ, образуемый осью Ox и радиус-вектором точки эллипса.

12.12. Найдите площадь четырёхугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

12.13. На эллипсе $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ дана точка $M(2; -5/3)$. Составьте уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки M.

12.14. Определите эксцентриситет эллипса, если:

(a) его малая ось видна из фокусов под углом 60°;
(b) отрезок между фокусами виден из вершин малой оси под прямым углом;
(c) расстояние между директрисами в три раза больше расстояния между фокусами;
(d) отрезок перпендикуляра, опущенного из центра эллипса на его директрису, делится вершиной эллипса пополам.

12.15. Составьте уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = 1/2$, фокус $F(3;0)$ и уравнение соответствующей директрисы $x + y = 1$.

12.16. Составьте уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{24} = 1$, параллельных прямой $4x - 2y + 23 = 0$, и найдите расстояние между ними.

12.17. Из точки $P(-16;9)$ проведены касательные к эллипсу $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. Найдите расстояние от точки P до хорды эллипса, соединяющей точки касания.

12.18. Прямая $x - y = 5$ касается эллипса, фокусы которого находятся в точках $(\pm 3;0)$. Составьте уравнение этого эллипса.

12.19. Из левого фокуса эллипса $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{20} = 1$ под тупым углом α к оси Ox направлен луч света; известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -2$. Дойдя до эллипса, луч от него отразился. Составьте уравнение прямой, на которой лежит отражённый луч.

12.20. Составьте уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, проходящих через точку $(10;4)$.

12.21. Определите эксцентриситет гиперболы, если отрезок между её вершинами виден из фокусов сопряжённой гиперболы под углом 60°.

12.22. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой совпадают с фокусами эллипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, а эксцентриситет равен 2.

12.23. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой совпадают с вершинами эллипса $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$, а директрисы проходят через фокусы этого эллипса.

12.24. Составьте уравнение гиперболы, если известны её эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}$, фокус $F(2;-3)$ и уравнение соответствующей директрисы $3x - y + 3 = 0$.

12.25. Составьте уравнения касательных к гиперболе $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$, проходящих через точку $(1;4)$.

12.26. Составьте уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = -1$, параллельных прямой $2x + 4y = 5$, и найдите расстояние между ними.

12.27. Составьте уравнения касательных к гиперболе $x^2 - y^2 = 16$, проведённых из точки $A(-1; -7)$.

12.28. Из точки $P(1; -5)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$. Найдите расстояние от точки P до хорды гиперболы, соединяющей точки касания.

12.29. Прямая $2x - y = 4$ касается гиперболы, фокусы которой расположены в точках $(\pm 3; 0)$. Составьте уравнение этой гиперболы.

12.30. Из правого фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ под углом α $(\pi < \alpha < 3\pi/2,\ \operatorname{tg}\alpha = 2)$ к оси Ox направлен луч света. Дойдя до гиперболы, луч от неё отразился. Составьте уравнение прямой, на которой лежит отражённый луч.

12.31. Составьте уравнение параболы, если даны её фокус $F(2; -1)$ и директриса $x - y = 1$.

12.32. Составьте уравнение касательной к параболе $y^2 = 8x$, параллельной прямой $2x + 2y = 3$.

12.33. Составьте уравнение касательной к параболе $x^2 = 16x$, перпендикулярной прямой $2x + 4y + 7 = 0$.

12.34. Составьте уравнение касательных к параболе $y^2 = 36x$, проведённых из точки $A(2; 9)$.

12.35. Из точки $P(-3; 12)$ проведены касательные к параболе $y^2 = 10x$. Найдите расстояние от точки P до хорды параболы, соединяющей точки касания.

12.36. Из фокуса параболы $y^2 = 12x$ под острым углом α к оси Ox направлен луч света; известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$. Дойдя до параболы, луч от неё отразился. Составьте уравнение прямой, на которой лежит отражённый луч.

ГЛАВА 13

Преобразования базисов и координат

1. Основные понятия и факты

А. Преобразование базисов и координат векторов. Предположим, что на плоскости заданы два базиса (не обязательно ортогональные):

$$\boldsymbol{E} = \big(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\big), \quad \boldsymbol{E}' = \big(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\big).$$

Будем называть базис $\boldsymbol{E}$ старым, а базис $\boldsymbol{E}'$ — новым.

Векторы нового базиса $\boldsymbol{E}'$ можно разложить по старому базису:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= c_1^1 \boldsymbol{e}_1 + c_1^2 \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 &= c_2^1 \boldsymbol{e}_1 + c_2^2 \boldsymbol{e}_2. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Составим матрицу, столбцы которой состоят из координат новых базисных векторов относительно старого базиса:

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{E}$ к базису $\boldsymbol{E}'$*.

Замечание. Обратите внимание, что координаты новых базисных векторов относительно старого базиса образуют *столбцы* матрицы перехода. Например, если выражения векторов нового базиса через векторы старого базиса имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 &= 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2, \end{aligned}$$

то матрица перехода имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матричная форма записи формул (13.1):

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}C. \tag{13.2}$$

Будем называть формулы (13.1) и (13.2) *формулами преобразования базиса.*

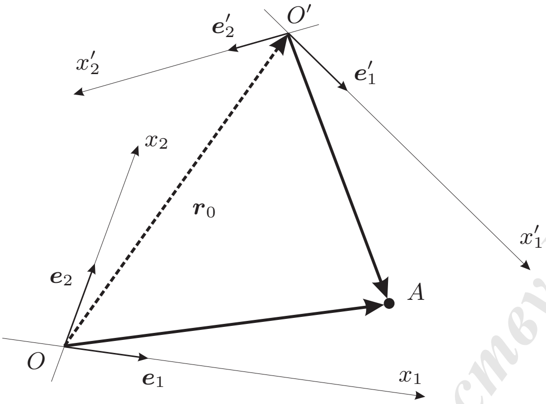


Рис. 13.1. Преобразование аффинной системы координат

Линейная независимость векторов базиса влечёт линейную независимость столбцов матрицы перехода C и, следовательно, её невырожденность и обратимость. Будем обозначать элементы обратной матрицы C^{-1} через $\tilde{c}_j^k$.

Формула обратного преобразования базиса имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}'C^{-1}. \tag{13.3}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x}$; столбцы его координат относительно базисов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$ обозначим через X и X':

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}.$$

Координаты X и X' вектора $\boldsymbol{x}$ в старом и новом базисе связаны соотношениями

$$X = CX', \tag{13.4}$$

$$X' = C^{-1}X. \tag{13.5}$$

B. Преобразование координат точек на плоскости. Пусть на плоскости заданы две аффинные системы координат: $O\boldsymbol{E}$ (старая) и $O'\boldsymbol{E}'$ (новая), где $\boldsymbol{E} = \big(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\big)$ и $\boldsymbol{E}' = \big(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\big)$ — старый и новый базисы, связанные формулами перехода (13.1) или (13.2). Пусть $\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{OO'}$ — радиус-вектор начала новой системы координат относительно старой и по старому базису:

$$\overrightarrow{OO'} = x_0^1\boldsymbol{e}_1 + x_0^2\boldsymbol{e}_2. \tag{13.6}$$

Введём столбцы координат

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}.$$

Связь столбцов координат X точки A в старой системе координат и X' в новой системе координат выражается формулой

$$X = X_0 + CX'. \tag{13.7}$$

Формула обратного преобразования:

$$X' = C^{-1}(X - X_0) = C^{-1}X - C^{-1}X_0. \tag{13.8}$$

Если положить здесь $X = O$, то получим координаты X'_0 начала O системы $O\boldsymbol{E}$ в системе $O'\boldsymbol{E}'$:

$$X'_0 = -C^{-1}X_0.$$

C. Однородные координаты. При решении задач, связанных с преобразованиями систем координат, удобно использовать так называемые *однородные координаты.* Введём матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right], \quad Z' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right], \quad P = \left[\begin{array}{c|c} C & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right],$$

указанные преобразования можно записать в виде

$$Z = PZ', \quad Z' = P^{-1}Z.$$

Обратная матрица

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} C^{-1} & -C^{-1}X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right]. \tag{13.9}$$

D. Преобразование ортогональных базисов и координат. Пусть $\boldsymbol{I} = \big(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\big)$ и $\boldsymbol{I}' = \big(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'\big)$ — ортонормированные базисы на плоскости (старый и новый), связь между которыми устанавливается обычными формулами

$$\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I}R, \quad \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}'R^{-1}.$$

Матрица перехода R от одного ортонормированного базиса к другому называется *ортогональной матрицей.* Любая ортогональная матрица R обладает свойствами:

$$R^TR = \mathbb{1}, \quad RR^T = \mathbb{1}, \quad R^T = R^{-1}, \quad \det R = \pm 1.$$

Ортогональная матрица с определителем 1 называется *собственной*, а с определителем -1 — *несобственной.*

Общий вид ортогональной матрицы порядка 2:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}; \tag{13.10}$$

в первом случае матрица собственная, во втором — несобственная.

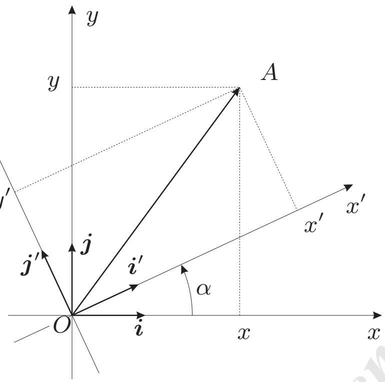


Рис. 13.2. Поворот прямоугольной декартовой системы координат

Е. Поворот прямоугольной системы координат на плоскости. Преобразуем ортонормированный базис $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ на плоскости с помощью собственной ортогональной матрицы R, определённой формулой (13.10). Формулы преобразований для векторов базиса и координаты имеют следующий вид:

$$\text{переход } O\boldsymbol{ij} \to O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\colon \quad \begin{cases} \boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I}R, \\ X' = R^{-1}X = R^T X, \end{cases} \tag{13.11}$$

$$\text{переход } O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}' \to O\boldsymbol{ij}\colon \quad \begin{cases} \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}'R^{-1} = \boldsymbol{I}'R^T, \\ X = RX', \end{cases} \tag{13.12}$$

где $X = (x, y)^T$, $X' = (x', y')^T$ — столбцы координат точки относительно систем координат $O\boldsymbol{ij}$ и $O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ соответственно. Такое преобразование есть не что иное, как поворот векторов базиса на угол α.

Преобразования векторов базиса и преобразование столбцов координат производятся взаимно обратными матрицами. Этот факт незаметен (более того, создаётся противоположное впечатление!), если формулы записать в координатном виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \sin\alpha\,\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{j}' = -\sin\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\alpha\,\boldsymbol{j}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \cos\alpha\,x + \sin\alpha\,y, \\ y' = -\sin\alpha\,x + \cos\alpha\,y \end{cases} \tag{13.13}$$

для перехода $O\boldsymbol{ij} \to O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ и

$$\begin{cases} \boldsymbol{i} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i}' - \sin\alpha\,\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{j} = \sin\alpha\,\boldsymbol{i}' + \cos\alpha\,\boldsymbol{j}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos\alpha\,x' - \sin\alpha\,y', \\ y = \sin\alpha\,x' + \cos\alpha\,y'. \end{cases} \tag{13.14}$$

для обратного перехода $O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}' \to Oxy$. Конечно, всё дело здесь в порядке матричных сомножителей и ортогональности матрицы перехода.

F. Ортогональные преобразования системы координат на плоскости. В случае, когда система координат $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ получена из системы $O\boldsymbol{ij}$ поворотом осей на угол α и переносом начала координат на вектор $\overrightarrow{OO'}$, столбец координат которого относительно системы $O\boldsymbol{ij}$ есть $\big(x_0, y_0\big)^T$, формулы преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x = \cos\alpha\, x' - \sin\alpha\, y' + x_0, \\ y = \sin\alpha\, x' + \cos\alpha\, y' + y_0, \end{cases} \tag{13.15}$$

и

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha\cdot(x - x_0) + \sin\alpha\cdot(y - y_0), \\ y' = -\sin\alpha\cdot(x - x_0) + \cos\alpha\cdot(y - y_0). \end{cases} \tag{13.16}$$

В матричных обозначениях

$$X = RX' + X_0, \tag{13.17}$$

$$X' = R^{-1}(X - X_0) = R^T(X - X_0), \tag{13.18}$$

где $X = \big(x, y\big)^T$ и $X' = \big(x', y'\big)$.

В однородных координатах

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \hline 1 \end{bmatrix}, \quad Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ \hline 1 \end{bmatrix},$$
$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right] \tag{13.19}$$

преобразования координат запишутся в виде

$$Z = PZ', \quad Z' = P^{-1}Z, \tag{13.20}$$

причём обратная матрица P^{-1} имеет вид

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0' \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0' \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{13.21}$$

(см. (13.9)), где

$$\begin{cases} x_0' = -x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha, \\ y_0' = x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad X_0' = -R^T X_0$$

— координаты точки O (начала системы координат $O\boldsymbol{ij}$) в системе координат $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$.

Поворот координатных осей прямоугольной декартовой системы и перенос её начала, а также преобразования координат точек и уравнений линий называют *ортогональными преобразованиями* системы координат.

G. Ортогональные преобразования уравнения прямой на плоскости. Рассмотрим общее уравнение прямой

$$Ax + By + d = 0$$

в прямоугольной декартовой системе координат $O\boldsymbol{ij}$. Коэффициенты A и B являются координатами вектора нормали $\boldsymbol{n}$ этой прямой.[1] В матричных обозначениях это уравнение имеет вид

$$N^T X + d = 0, \tag{13.22}$$

где $N = \big(A, B\big)^T$ — столбец координат вектора нормали $\boldsymbol{n}$ прямой. При переходе к новой системе координат $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ по формулам (13.17) уравнение принимает вид, совпадающий с (13.22):

$$N'^T X' + d' = 0.$$

Матричные коэффициенты уравнения прямой преобразуются по формулам

$$N' = R^{-1}N = R^T N, \quad d' = N^T X_0 + d.$$

Если записать уравнение прямой в однородных координатах

$$MZ = 0,$$

где

$$M = \begin{pmatrix} A & B & d \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

а преобразование координат осуществить по формулам (13.20), получим

$$M(PZ') = 0 \iff (MP)Z' = 0,$$

т.е. матричный коэффициент M уравнения прямой преобразуется по формуле

$$M' = MP.$$

H. Аффинные преобразования плоскости. Формула

$$X = X_0 + CX' \tag{13.7}$$

выражает связь между координатами X точки в старой системе координат и координатами X' этой же точки в новой системе координат. Однако эту же формулу можно рассматривать как отображение плоскости на себя (т.е. преобразование плоскости), которое каждой точке плоскости с координатами X' ставит в соответствие точку с координатами X. Эти две точки зрения на формулу (13.7) называются «пассивной» и «активной»: в одном случае мы описываем одну и ту же точку в разных системах координат, в другом — разные точки в одной и той же системе координат.

[1]Напомним, что это утверждение верно только для прямоугольной системы координат.

Пусть на плоскости зафиксирована некоторая аффинная система координат OE. *Аффинным преобразованием плоскости* называется преобразование, которой каждой точке плоскости с координатами $X = \big(x, y\big)$ ставит в соответствие точку плоскости с координатами $X' = \big(x', y'\big)$, вычисляемыми по формуле

$$X' = CX + X_0, \tag{13.23}$$

где C — невырожденная матрица. В однородных координатах эта формула имеет вид

$$Z' = PZ,$$

где

$$Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right], \quad Z' = \left(\begin{array}{c} x' \\ y' \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right], \quad P = \left[\begin{array}{c|c} C & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right].$$

13.1. Теорема. *Аффинные преобразования плоскости обладают следующими свойствами:*

(i) *при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные, пересекающиеся — в пересекающиеся;*

(ii) *если X_1, X_2, X_3 — три коллинеарные (т.е. лежащие на одной прямой) точки, причём $\overrightarrow{X_1X_3} = k\overrightarrow{X_1X_2}$, а X_1', X_2', X_3 — их образы при аффинном преобразовании, то $\overrightarrow{X_1'X_3'} = k\overrightarrow{X_1'X_2'}$.*

Основные типы аффинных преобразований:

1. *Параллельный перенос* на вектор X_0: $C = \mathbb{1}$, $X' = X + X_0$.
2. *Гомотетия*, или *равномерное растяжение* (*сжатие*) с центром в начале координат[1]: $X' = kX$, где $k \neq 0$. Матрицей гомотетии является матрица вида $k\mathbb{1}$ (такие матрицы называются скалярными).
3. *Растяжение* (*сжатие*) *вдоль оси абсцисс*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется растяжение (сжатие) вдоль любой другой оси (прямой). Комбинация двух растяжений (сжатий) вдоль обеих координатных осей задаётся формулами

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ly \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}.$$

4. *Сдвиг*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + py \\ y \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1]Конечно, можно рассматривать гомотетию с центром, отличным от начала координат.

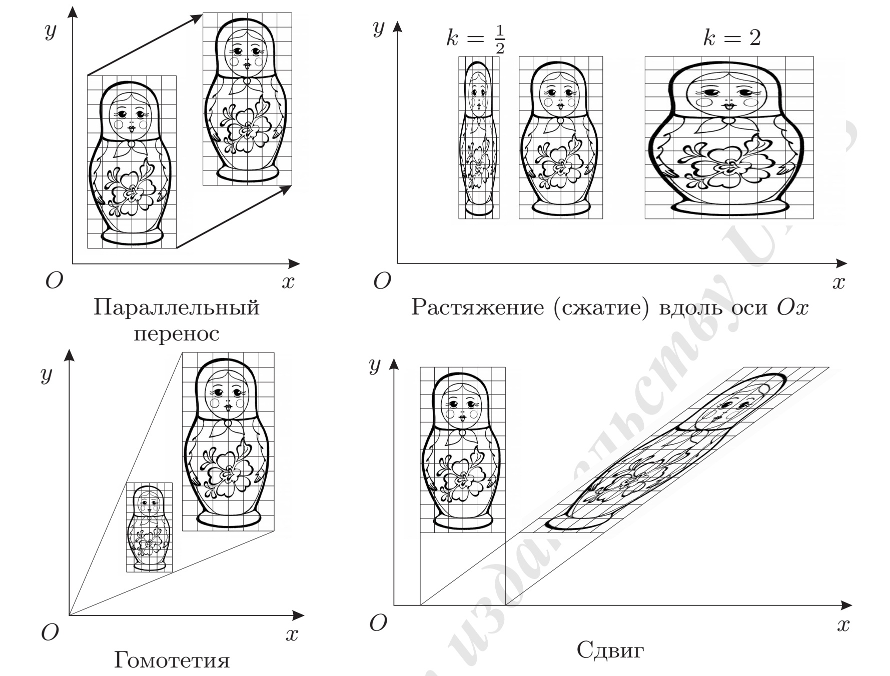


Рис. 13.3. Аффинные преобразования плоскости

Ортогональным преобразованием плоскости называется преобразование, которой каждой точке плоскости с координатами $X = \big(x, y\big)$ ставит в соответствие точку плоскости с координатами $X' = \big(x', y'\big)$, вычисляемыми по формулам

$$X' = RX + X_0, \tag{13.24}$$

где R — ортогональная матрица. Каждое ортогональное преобразование плоскости представляет собой композицию параллельного переноса и поворота.

2. Контрольные вопросы и задания

1. Запишите формулы связи векторов старого и нового базиса.
2. Что такое матрица перехода?
3. Что представляют собой столбцы матрицы перехода?
4. Запишите формулы связи координат вектора относительно старого и нового базиса.
5. Запишите формулы связи координат точки относительно старой и новой системы координат.
6. Сформулируйте определение ортогональной матрицы. Перечислите свойства ортогональных матриц.

7. Запишите общий вид ортогональной матрицы порядка 2.
8. Сформулируйте определение собственной и несобственной ортогональных матриц. Каков их геометрический смысл?
9. Запишите формулы преобразования координат вектора при переходе от одного ортонормированного базиса к другому.
10. Запишите формулы преобразования координат точки при повороте ортогональной декартовой системы координат.
11. Что такое ортогональное преобразование системы координат?
12. Запишите формулы преобразования координат точки при ортогональном преобразовании системы координат.
13. Как преобразуется уравнение прямой на плоскости при ортогональное преобразование системы координат? Запишите формулы преобразования.
14. Сформулируйте определение аффинного преобразования плоскости.
15. Перечислите свойства аффинных преобразований плоскости.
16. Перечислите основные типы аффинных преобразований плоскости.
17. Сформулируйте определение ортогонального преобразования плоскости.

3. Примеры решения задач

Пример 13.1. На плоскости даны два базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$, связанные соотношениями $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$. Найдите разложение вектора $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$ по базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ и разложение вектора $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_2$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

Решение. Запишем матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ и матрицу обратного перехода:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку мы будем пользоваться матричной техникой, все координаты нужно записывать в виде столбцов. Используя формулы преобразования координат

$$X' = C^{-1}X, \quad X = CX',$$

получаем

$$X'_{\boldsymbol{a}} = C^{-1}X_{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$X_{\boldsymbol{b}} = CX'_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{a} = -11\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2.$$

Пример 13.2. Составьте уравнение гиперболы в системе координат, осями которой являются асимптоты гиперболы.

Решение. Предположим, что гипербола задана каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

тогда уравнения её асимптот имеют вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Очевидно, единичные направляющие векторы этих прямых имеют координаты $(a/c, -b/c)$ и $(a/c, b/c)$ соответственно; их мы и примем за базисные векторы новой системы координат.

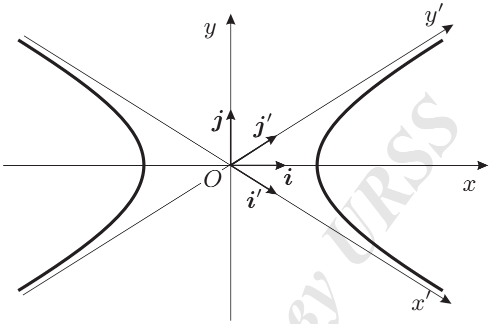


Рис. 13.4.

Тогда матрица перехода от исходного ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ (т.е. базиса канонической системы координат) к новому (не ортонормированному) базису $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ есть

$$C = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix},$$

так что формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{c}(x' + y'), \\ y = \dfrac{b}{c}(-x' + y'). \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в каноническое уравнение гиперболы, после несложных преобразований получим искомое уравнение

$$x'y' = \frac{c^2}{4}.$$

Пример 13.3. На плоскости даны две системы координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты $(1; 2)$, а базисные векторы второй системы имеют в базисе первой системы координаты $(3; 5)$ и $(4; 7)$ соответственно.

(1) Найдите координаты точки в первой системе, если известны её координаты x_1', x_2' во второй системе координат.

(2) Найдите координаты точки во второй системе, если известны её координаты x_1, x_2 в первой системе координат.

(3) Найдите координаты точки O во второй системе и координаты векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ в базисе второй системы координат.

Решение. Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$ и обратная матрицы суть

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad |C| = 1, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку мы будем пользоваться матричной техникой, все координаты нужно записывать в виде столбцов. Столбец координат $X = (x^1, x^2)^T$ точки в первой системе выражается через столбец её координат $X' = (x'^1, x'^2)^T$ во второй системе и вектор сдвига начала координат $X_0 = (1; 2)^T$ по формуле

$$X = X_0 + CX' \iff \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \iff$$
$$\iff \begin{cases} x^1 = 1 + 3x'^1 + 4x'^2, \\ x^2 = 2 + 5x'^1 + 7x'^2. \end{cases}$$

Столбец координат $X' = (x'^1, x'^2)^T$ точки во второй (новой) системе выражается через столбец её координат $X = (x^1, x^2)^T$ в первой (старой) системе и вектор сдвига начала координат $X_0 = (1; 2)^T$ по формуле $X' = C^{-1}(X - X_0)$:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] =$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

так что

$$\begin{cases} x'_1 = 1 + 7x'_1 - 4x'_2, \\ x'_2 = -1 - 5x'_1 + 3x'_2. \end{cases}$$

Столбец координат X'_O точки O во второй системе координат выражается формулой $X'_O = -C^{-1}X_0$ и равен $(1; -1)^T$, а векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ выражаются через векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ с помощью обратной матрицы перехода:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}'C^{-1} \iff \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = 7\boldsymbol{e}'_1 - 5\boldsymbol{e}'_2, \\ \boldsymbol{e}_2 = -4\boldsymbol{e}'_1 + 3\boldsymbol{e}'_2. \end{cases}$$

Пример 13.4. На плоскости даны две ортогональные системы координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и $O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты $(2; 3)$, а базисные векторы второй системы получены из базисных векторов первой поворотом против часовой стрелки на угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Прямая задана в первой системе координат уравнением $3x+2y = 6$. Найдите уравнение этой прямой во второй системе координат.

Решение. Найдем синус и косинус угла поворота системы координат:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{9}{25}, \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{16}{25};$$

поскольку $0 < \alpha < \pi/2$, имеем $\cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha = 4/5$, и матрица перехода от ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к ортонормированному базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$, а также матрица обратного перехода равны

$$C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = C^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(напомним, что матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортогональна, т.е. $C^{-1} = C^T$).

Формулы преобразования координат имеют вид

$$X = CX' + X_0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение прямой $3x+2y = 6$ представим в виде $AX = 6$, где $A = (3; 2)$ — строка коэффициентов уравнения. В системе координат $O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$ уравнение будет иметь вид

$$AX = 6 \iff A\Big(CX' + X_0\Big) = 6 \iff (AC)X' + AX_0 = 6.$$

Проведём необходимые вычисления:

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$AX_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 12,$$

так что уравнение примет вид

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 12 = 6 \iff x' - 6y' + 30 = 0.$$

Пример 13.5. В произвольной аффинной системе координат $\boldsymbol{OE}$ на плоскости даны уравнения пересекающихся прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и точка $E(x_0, y_0)$, не лежащая ни на одной из этих прямых. Принимая эти прямые соответственно за ось ординат и ось абсцисс новой системы координат и считая, что в новой системе координаты точки E равны $(1; 1)$, найдите выражения новых координат (x', y') произвольной точки через её старые координаты.

Решение. Формулы, выражающие новые координаты через старые, имеют вид

$$x' = c_1^1x + c_1^2y + x_1, \quad y' = c_2^1x + c_2^2y + y_1,$$

где (x_1, y_1) — неизвестные координаты вектора параллельного переноса начала координат. Поэтому равенство $x' = 0$ выполняется, если

$$c_1^1x + c_1^2y + x_1 = 0.$$

С другой стороны, прямая $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ должна быть осью $O'y'$, т.е. для её точек $x' = 0$. Следовательно, уравнения

$$c_1^1x + c_1^2y + x_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

задают одну и ту же прямую, что возможно лишь в случае, когда

$$c_1^1 x + c_1^2 y + x_1 = k_1\Big(A_1 x + B_1 y + C_1\Big).$$

Аналогично получаем

$$c_2^1 x + c_2^2 y + y_1 = k_2\Big(A_2 x + B_2 y + C_2\Big).$$

Отсюда следует, что искомые формулы преобразования координат имеют вид

$$x' = k_1\Big(A_1 x + B_1 y + C_1\Big), \quad y' = k_2\Big(A_2 x + B_2 y + C_2\Big).$$

Если точка E имеет в старой системе координаты $(x_0; y_0)$, а в новой — координаты $(1; 1)$, то

$$k_1 = \frac{1}{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1}, \quad k_2 = \frac{1}{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2}.$$

Окончательный вид формул преобразования координат:

$$x' = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1}, \quad y' = \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2}. \tag{13.25}$$

Пример 13.6. Напишите формулы преобразования гомотетии плоскости с коэффициентом k и центром в точке $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ в произвольной аффинной системе координат.

Решение. Образом точки $M(\boldsymbol{r})$ при преобразовании гомотетии с центром M_0 и коэффициентом k является такая точка $M'(\boldsymbol{r}')$, что $\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M}$, т.е.

$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0 = k\big(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\big) \iff \boldsymbol{r}' = k\boldsymbol{r} + (1-k)\boldsymbol{r}_0.$$

Пример 13.7. Найдите аффинное преобразование, которое переводит точки $A_1(1;3)$, $A_2(2;1)$, $A_3(3;3)$ соответственно в точки $A_1'(0;3)$, $A_2'(3;2)$, $A_3'(2;5)$.

Решение. Столбцы однородных координат X_1, X_2, X_3, точек A_1, A_2, A_3 связаны со столбцами однородных координат X_1', X_2', X_3', точек A_1', A_2', A_3' формулами $X_j' = PX_j$, $j = 1, 2, 3$. Объединяя эти три равенства для столбцов в одно равенство

$$X' = PX, \quad X' = \big[X_1', X_2', X_3'\big], \quad X = \big[X_1, X_2, X_3\big].$$

Таким образом,

$$P = X'X^{-1}.$$

Для вычисления указанного произведения поступим следующим образом:

$$P = X'X^{-1} = \Big((X'X^{-1})^T\Big)^T = \Big((X^T)^{-1}X'^T\Big)^T.$$

Сначала найдём $(X^T)^{-1}X'^T$ при помощи алгоритма, описанного в гл. 5 (см. с. 100):

$$\big[X^T \mid X'^T\big] \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эл. преобр.}} \big[\mathbb{1} \mid (X^T)^{-1}X'^T\big].$$

Имеем:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

так что

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -6 & -2 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -4 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

поэтому

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, формулы искомого аффинного преобразования имеют вид

$$x' = x - y + 2, \quad y' = x + y - 1.$$

4. Задачи для самостоятельного решения

13.1. На плоскости заданы два базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$, связанные соотношениями

$$\boldsymbol{e}'_1 = 4\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = 5\boldsymbol{e}_1 + 9\boldsymbol{e}_2.$$

Даны векторы

$$\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{e}'_1 - 2\boldsymbol{e}'_2.$$

Найдите разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ и разложение вектора $\boldsymbol{b}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

13.2. На плоскости даны две системы координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и $O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$. Начало O' второй системы имеет в первой системе координаты $(4, -2)$; базисные векторы обеих систем связаны соотношениями

$$\boldsymbol{e}'_1 = 5\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -8\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2.$$

(1) Найдите координаты точки в первой системе, если известны её координаты x'^1, x'^2 во второй системе координат.
(2) Найдите координаты точки во второй системе, если известны её координаты x^1, x^2 в первой системе координат.
(3) Найдите координаты точки O во второй системе и координаты векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ в базисе второй системы координат.

(4) Уравнение прямой в первой системе имеет вид $4x - 3y = 1$. Найдите уравнение этой прямой во второй системе.

13.3. На плоскости даны две ортогональные системы координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и $O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$. Начало O' второй системы имеет в первой системе координаты $(-3, 5)$; базисные векторы второй системы получены из базисных векторов первой поворотом на угол $135°$.

(1) Найдите координаты точки в первой системе, если известны её координаты x'^1, x'^2 во второй системе координат.
(2) Найдите координаты точки во второй системе, если известны её координаты x^1, x^2 в первой системе координат.
(3) Найдите координаты точки O во второй системе и координаты векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ в базисе второй системы координат.
(4) Уравнение прямой l в первой системе имеет вид $x-y+8=0$. Найдите уравнение этой прямой во второй системе.
(5) Уравнение прямой m во второй системе имеет вид $2x' - y' = 0$. Найдите уравнение этой прямой в первой системе.

13.4. На плоскости дан вектор $\boldsymbol{a}$, координаты которого относительно некоторой прямоугольной системы координат суть (x, y). Докажите, что координаты (x', y') вектора $\boldsymbol{a}'$, полученного из $\boldsymbol{a}$ поворотом на угол φ в положительном направлении, выражаются по формулам

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

13.5. Найдите аффинное преобразование, которое переводит точки $A_1(2; -3)$, $A_2(3; 0)$, $A_3(1; 4)$ соответственно в точки $A'_1(-2; -3)$, $A'_2(3; 4)$, $A'_3(3; 10)$.

13.6. Найдите аффинное преобразование, которое переводит точки $A_1(4; 1)$, $A_2(-1; 3)$, $A_3(2; -1)$ соответственно в точки $A'_1(3; 12)$, $A'_2(-8; 12)$, $A'_3(7; -2)$.

ГЛАВА 14

Квадрики: канонизация и инварианты

1. Основные понятия и факты

А. Уравнение квадрики. Рассмотрим уравнение второй степени от двух переменных

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0; \tag{14.1}$$

многочлен в левой части этого уравнения обозначим $F(x, y)$. Пусть на плоскости Oxy задана некоторая прямоугольная декартова система координат. Линия, точки которой (точнее, координаты точек) и только они являются решениями уравнения (14.1), называется *квадрикой*. При преобразовании системы координат уравнение квадрики изменяется. Поставим задачу найти такую систему координат, в которой уравнение квадрики имеет по возможности наиболее простой вид.

Введём матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{12} = a_{21}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (14.1) можно записать в виде

$$X^T AX + 2BX + c = 0. \tag{14.2}$$

Введём также матрицы

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array}\right] \quad Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right];$$

тогда уравнение квадрики можно записать в виде

$$Z^T DZ = 0. \tag{14.3}$$

В. Ортогональные преобразования уравнения квадрики. Ортогональные инварианты уравнения. Осуществим преобразование прямоугольной декартовой системы координат по формулам (13.20) (см. с. 201)

$$Z = PZ', \quad Z' = P^{-1}Z,$$

где

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right],$$

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x'_0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y'_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(см. формулы (13.19) и (13.21), с. 201). При таком преобразовании координат уравнение квадрики $Z^T DZ = 0$ (см. (14.3)) принимает вид

$$Z'^T D' Z' = 0,$$

где

$$D' = P^T DP = \left[\begin{array}{c|c} R^T AR & R^T(AX_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T A + B)R & X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c \end{array}\right], \tag{14.4}$$

т.е. при преобразовании координат матричные коэффициенты уравнения квадрики (14.2) преобразуются по формулам

$$A' = R^T AR, \quad B' = (X_0^T A + B)R, \quad c' = X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c. \tag{14.5}$$

Обратите внимание, что матрица A изменяется только при повороте, а свободный член c уравнения — только при переносе начала координат. Матрица B, содержащая коэффициенты линейных слагаемых уравнения квадрики, меняется и при повороте, и при переносе.

14.1. Теорема. *При ортогональных преобразованиях системы координат величины*

$$S = \operatorname{tr} A, \quad \delta = \det A, \quad \Delta = \det D$$

не изменяются. Эти величины называют ортогональными инвариантами уравнения квадрики.

C. Упрощение уравнения квадрики: уничтожение слагаемого $2a_{12}xy$ при помощи поворота.

14.2. Теорема. *Для уничтожения слагаемого $2a_{12}xy$ в уравнении квадрики (14.1) нужно перейти к новой системе координат, оси которой повёрнуты относительно осей исходной системы. Столбцы координат R_1, R_2 ортов $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ новой системы координат являются нормированными*[1] *решениями однородных систем линейных уравнений*

$$(A - \lambda_k \mathbb{1})R_k = 0, \quad k = 1, 2,$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения[2]

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0 \iff \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0. \tag{14.6}$$

[1] Т.е. имеющими единичную длину.

[2] Это уравнение всегда имеет вещественные корни (см. пример 6.4, с. 88).

Угол α поворота координатных осей определяется соотношением

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{14.7}$$

14.3. Определение. Корни λ_1 и λ_2 уравнения $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$ называются *собственными значениями* матрицы A, а ненулевые столбцы R_1, R_2, являющиеся решениями однородных систем $(A - \lambda_k\mathbb{1})R_k = 0$, $k = 1, 2,$ — *собственными векторами*, принадлежащими собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно.

D. Упрощение уравнения квадрики: уничтожение линейных слагаемых $2b_1x + 2b_2y$ при помощи переноса начала координат. Для уничтожения линейных слагаемых нужно выбрать вектор переноса X_0, удовлетворяющий системе уравнений

$$AX_0 = -B^T. \tag{14.8}$$

Однако полученное уравнение не всегда разрешимо, так что уничтожение линейных слагаемых в уравнении квадрики возможно не во всех случаях.

Случай $\delta = \det A \neq 0$: центральные квадрики. Если $\det A \neq 0$, то уравнение $AX_0 = -B^T$ имеет единственное решение $X_0 = -A^{-1}B^T$, и матрица преобразования координат определяется однозначно:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} R & -A^{-1}B^T \\ \hline O & 1 \end{array}\right],$$

где R — матрица поворота координатных осей (см. теорему 14.2). После такого преобразования координат в уравнении квадрики исчезают слагаемые вида $2a_{12}xy$ и $2b_1x + 2b_2y$, т.е. оно приводится к «полуканоническому» виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0, \tag{14.9}$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения (14.6), а c' — свободный член преобразованного уравнения, определяемый по формуле (14.5), в которой X_0 — решение уравнения (14.8). Матрица D' коэффициентов уравнения квадрики в полуканонической системе координат имеет вид

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array}\right). \tag{14.10}$$

Коэффициент c' можно найти при помощи любого из следующих трёх выражений:

$$c' = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c = BX_0 + c = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{14.11}$$

Начало канонической системы координат $O'x'y'$ является центром симметрии линии, определяемой уравнением (14.9), а координатные оси $O'x'$ и $O'y'$ — её осями симметрии. Действительно, если точка с координатами (x', y') является решением уравнения (14.9), то решениями являются также и точки $(-x', y')$, $(x', -y')$, $(-x', -y')$. По этой причине квадрики данного типа называют *центральными* (даже в случае, когда уравнение квадрики не имеет ни одного вещественного решения).

С помощью алгебраических преобразований полученное полуканоническое уравнение можно привести к каноническому виду.

Случай $\delta = \det A = 0$: нецентральные квадрики. Условие $\det A = 0$ эквивалентно тому, что один из корней характеристического уравнения (14.6) равен нулю; будем считать, что $\lambda_1 = 0$; в этом случае $\lambda_2 = S = \operatorname{tr} A$, а матрица D' коэффициентов уравнения квадрики после поворота осей координат имеет вид

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1' \\ 0 & S & b_2' \\ \hline b_1' & b_2' & c \end{array}\right), \quad \Delta = \det D' = -b_1'^2 S. \tag{14.12}$$

Если $\det A = 0$, то система уравнений (14.8) может либо оказаться несовместной, либо иметь бесконечно много решений.

Невырожденный параболический тип: $\Delta \neq 0$. Согласно теореме Кронекера—Капелли система (14.8) несовместна, если ранг матрицы A меньше ранга матрицы $\left[A \mid -B^T\right]$. В этом случае после поворота координатных осей уравнение квадрики примет вид

$$Sy'^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + c' = 0,$$

где $b_1' \neq 0$, и его можно привести к каноническому уравнению параболы, выделяя полные квадраты.

Величина фокального параметра параболы в каноническом уравнении также может быть выражена через инварианты:

$$p = \left|\frac{b_1'}{S}\right| = \left|\frac{\sqrt{-\Delta/S}}{S}\right| = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}.$$

Вырожденный параболический тип: $\Delta = 0$. В случае, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы $\left[A \mid -B^T\right]$, система (14.8) имеет бесконечно много решений. Выбрав любое из них, получаем следующую матрицу коэффициентов уравнения квадрики в преобразованной системе координат

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array}\right), \tag{14.13}$$

т.е. само уравнение принимает полуканонический вид

$$Sy'^2 + c' = 0. \tag{14.14}$$

14.4. Теорема. *При помощи ортогональных преобразований координат (т.е. поворота осей координат и переноса начала координат) уравнение квадрики* (14.1) *может быть приведено к одному из девяти канонических типов, перечисленных в таблице на с.* 216.

Классификация квадрик на плоскости

<table>
<tr><th></th><th>Невырожденные линии: $\Delta \neq 0$</th><th>Вырожденные линии: $\Delta = 0$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Эллиптический тип: $\delta > 0$</td><td>$S\delta < 0$: эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
$a = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$</td><td rowspan="2">Пара мнимых пересекающихся прямых
$a^2x^2 + b^2y^2 = 0$
$a = \sqrt{|\lambda_1|}$, $b = \sqrt{|\lambda_2|}$</td></tr>
<tr><td>$S\delta > 0$: мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$
$a = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$</td></tr>
<tr><td>Гиперболический тип: $\delta < 0$</td><td>Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
$a = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$</td><td>Пара вещественных пересекающихся прямых
$a^2x^2 - b^2y^2 = 0$
$a = \sqrt{|\lambda_1|}$, $b = \sqrt{|\lambda_2|}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Параболический тип $\delta = 0$</td><td rowspan="3">Парабола $y^2 = 2px$
$p = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{S^3}}$</td><td>$K < 0$: пара веществ. паралл. прямых $y^2 = a^2$, $a = \sqrt{-\dfrac{K}{S^2}}$</td></tr>
<tr><td>$K > 0$: пара мнимых паралл. прямых $y^2 = -a^2$, $a = \sqrt{\dfrac{K}{S^2}}$</td></tr>
<tr><td>$K = 0$: пара совпад. прямых $y^2 = 0$</td></tr>
</table>

Е. Полуинвариант K. Тип и каноническое уравнение квадрики может быть получено с помощью инвариантов во всех случаях, кроме вырожденного параболического случая, когда $\delta = \Delta = 0$. Вырожденные параболические квадрики можно различать (и составлять их канонические уравнения) при помощи дополнительной величины

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix},$$

которая в указанном случае, т.е. при $\delta = \Delta = 0$, также является ортогональным инвариантом уравнения квадрики.

Полуканоническое уравнение (14.14), которое получается в вырожденном параболическом случае, приводится к каноническому виду следующим образом:

$$y'^2 + \frac{K}{S^2} = 0 \iff \begin{cases} y'^2 = a^2, & \text{где } a^2 = -\dfrac{K}{S^2}, \text{ если } K < 0, \\ y'^2 = -a^2, & \text{где } a^2 = \dfrac{K}{S^2}, \text{ если } K > 0, \\ y'^2 = 0, & \text{если } K = 0. \end{cases}$$

2. Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение квадрики. Запишите уравнение квадрики в матричной форме.
2. Запишите формулы преобразования коэффициентов уравнения квадрики при параллельном переносе начала координат.
3. Запишите формулы преобразования коэффициентов уравнения квадрики при повороте координатных осей.
4. Сформулируйте определение ортогонального инварианта уравнения квадрики.
5. Перечислите ортогональные инварианты уравнения квадрики.
6. Опишите алгоритм упрощения уравнения квадрики.
7. Сформулируйте определение центральной квадрики. Перечислите типы центральных квадрик и для каждого типа укажите знаки инвариантов.
8. Для каждого типа центральных квадрик запишите «полуканоническое» уравнение и выражение его коэффициентов через инварианты.
9. Сформулируйте определение нецентральной квадрики. Перечислите типы нецентральных квадрик и для каждого типа укажите знаки инвариантов.
10. Для каждого типа нецентральных квадрик запишите «полуканоническое» уравнение и выражение его коэффициентов через инварианты.

3. Примеры решения задач

Пример 14.1. Приведите уравнение квадрики

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + 32x - 56y + 80 = 0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения данной квадрики:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 16 & -28 \end{pmatrix}, \quad c = 80, \quad D = \left(\begin{array}{rr|r} 5 & -2 & 16 \\ -2 & 8 & -28 \\ \hline 16 & -28 & 80 \end{array}\right).$$

Найдём ортогональные инварианты уравнения:

$$S = \operatorname{tr} A = 13, \quad \delta = \det A = 36 > 0, \quad \Delta = \det D = -1296.$$

Так как $\delta > 0$, квадрика является эллиптической, и её уравнение может быть преобразовано к полуканоническому виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0,$$

а поскольку $S\Delta < 0$ — это эллипс.

Коэффициенты λ_1 и λ_2 являются собственными значениями (корнями характеристического многочлена) матрицы A:

$$f_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 4, \\ \lambda_2 = 9. \end{array} \right.$$

Свободный член c' полуканонического уравнения найдем по формуле (14.11):

$$c' = \frac{\Delta}{\delta} = -129636 = -36.$$

Итак, получаем полуканоническое уравнение

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

и далее каноническое

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Определяемый этим уравнением эллипс имеет полуоси $a = 3$, $b = 2$, линейный эксцентриситет $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$, эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}/3$, фокусы $F_1(-\sqrt{5}; 0)$ и $F_2(\sqrt{5}; 0)$ (в канонической системе координат $O'x'y'$) и директрисы $\sqrt{5}x' + 9 = 0$ (левая директриса, соответствующая фокусу F_1) и $\sqrt{5}x' - 9 = 0$ (правая директриса, соответствующая фокусу F_2).

Базисные векторы $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ канонической системы координат являются собственными векторами матрицы A; для нахождения их координат (столбцов R_1, R_2) требуется решить однородные системы $(A - \lambda_k \mathbb{1})R_k = 0$, $k = 1, 2$:

$$\lambda_1 = 4: \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 9: \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при нормировке решений линейных систем знаки нормирующих множителей c_1 и c_2 выбирались так, чтобы базис $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ получился правым. Матрица поворота имеет вид

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Угол α поворота координатный осей определяется условиями

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

т.е. равен $\operatorname{arctg}(1/2) \approx 26{,}6^\circ$. Этот же результат может быть получен и по формуле (14.7):

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{5-8}{-4} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; 2\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 26{,}6^\circ.$$

Для нахождения координат X_0 вектора переноса $\boldsymbol{r}_0$ начала координат в системе Oxy решим неоднородную систему $AX_0 = -B^T$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 16 \\ -28 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итак, преобразование координат, приводящее уравнение квадрики к полуканоническому виду, есть

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (14.15)$$

Обозначим матрицу этого преобразования через P:

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right];$$

для удобства запишем также

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 3\sqrt{5} \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{5} \end{array}\right)$$

Обратная матрица вычисляется по формуле (13.21) (см. с. 201):

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right].$$

Поскольку

$$-R^T X_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix},$$

получаем

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{8}{\sqrt{5}} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{5} \end{array}\right).$$

Обратное преобразование координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{5} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14.16}$$

Каноническая система координат $O'x'y'$ рассматриваемой квадрики получается из исходной системы координат Oxy сдвигом координатных осей на вектор $\boldsymbol{r}_0 = (-2; 3)^T$ и поворотом на угол $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 26{,}6^\circ$.

Отметим, что свободный член c' полуканонического уравнения может быть вычислен также по второй из формул (14.11):

$$c' = BX_0 + c = \begin{pmatrix} 16 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 80 = -36,$$

а матрица D' коэффициентов преобразованного уравнения — по формуле (14.4):

$$D' = P^T D P = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -36 \end{array}\right).$$

Найдём координаты фокусов эллипса в системе координат Oxy по формулам (14.15):

$$F_1: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F_2: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $F_1(-4;2)$, $F_2(0;4)$ в системе координат Oxy.

Для нахождения уравнений директрис в системе Oxy нужно подставить в их канонические уравнения[1] $\sqrt{5}x' \pm 9 = 0$ выражения для x' и y' через x и y из преобразования (14.16), т.е. $Z' = P^{-1}Z$:

$$\sqrt{5}x' + 9 = 0 \iff \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 2x + y + 10 = 0,$$

$$\sqrt{5}x' - 9 = 0 \iff \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 2x + y - 8 = 0.$$

Аналогичным образом находим уравнения канонических осей координат:

ось Ox' $(y' = 0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{5}\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{8}{5}\right) = 0 \quad \iff x - 2y + 8 = 0,$$

[1] Здесь термин «каноническое уравнение» означает «уравнение относительно канонической системы координат».

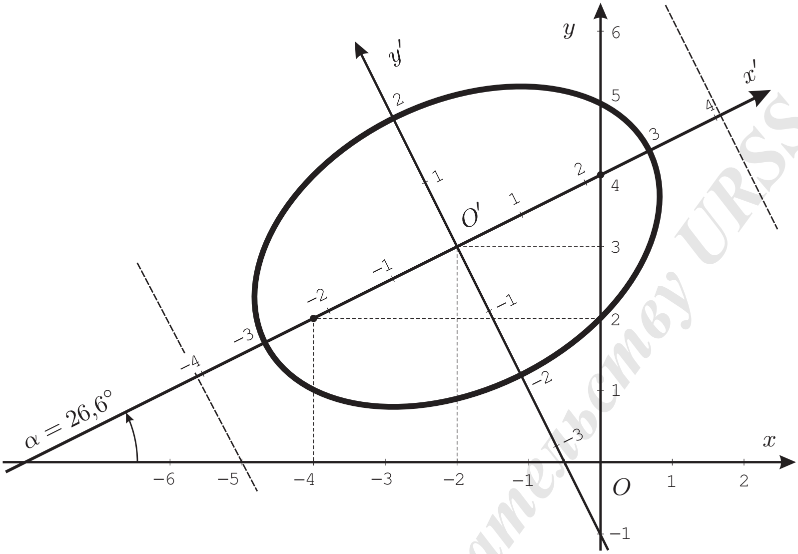


Рис. 14.1. К примеру 14.1

ось Oy' $(x' = 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{5}\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \; 2x + y + 1 = 0.$$

Пример 14.2. Приведите уравнение квадрики

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 22x + 14y + 29 = 0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Запишем матрицы коэффициентов данной квадрики:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 & 7 \end{pmatrix}, \quad c = 29, \quad D = \left(\begin{array}{rr|r} 5 & -1 & -11 \\ -1 & 5 & 7 \\ \hline -11 & 7 & 29 \end{array}\right).$$

Поскольку $\det A = 24 > 0$, квадрика имеет эллиптический тип; её полуканоническое уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0.$$

Коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического многочлена матрицы A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 24 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 4, \\ \lambda_2 = 6. \end{array}\right.$$

Для отыскания столбцов координат R_1, R_2 базисных векторов $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ канонической системы координат требуется решить однородные системы $(A - \lambda_k \mathbb{1})R_k = O$:

$$\lambda_1 = 4: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 6: \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица поворота

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

очевидно, эта матрица описывает поворот на угол $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$.

Чтобы найти столбец координат X_0 вектора переноса начала, нужно решить неоднородную систему $AX_0 = -B^T$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица полного преобразования, канонизирующего данную квадрику, имеет вид

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Найдем свободный член полуканонического уравнения:

$$c' = BX_0 + c = \begin{pmatrix} -11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 29 = 0.$$

Таким образом, данная квадрика имеет полуканоническое уравнение

$$4x'^2 + 6y'^2 = 0$$

и представляет собой пару мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке, координаты которой в канонической системе координат $(0; 0)$, а в исходной системе координат — $(2; -1)$.

Так как координаты вектора $\overrightarrow{O'O}$ в системе координат $O'x'y'$ равны

$$X_0' = -R^T X_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

имеем

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 1), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x + y + 3), \end{cases}$$

так что исходное уравнение можно представить в виде

$$2\,(x+y-1)^2+3\,(-x+y+3)^2=0.$$

Пример 14.3. Приведите уравнение квадрики

$$13x^2+30xy-27y^2+18x+198y+117=0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Матрицы коэффициентов данной квадрики

$$A=\begin{pmatrix}13 & 15\\ 15 & -27\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}9 & 99\end{pmatrix},\quad c=117,\quad D=\left(\begin{array}{rr|r}13 & 15 & 9\\ 15 & -27 & 99\\ \hline 9 & 99 & 117\end{array}\right).$$

Найдём ортогональные инварианты уравнения:

$$S=\operatorname{tr}A=-14,\quad \delta=\det A=-576,\quad \Delta=\det D=-165888.$$

Поскольку $\delta<0$, квадрика имеет гиперболический тип, а поскольку $\Delta\neq 0$ — это гипербола. Полуканоническое уравнение гиперболы

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+c'=0$$

можно получить с помощью инвариантов: коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2-S\lambda+\delta=0 \iff \lambda^2+14\lambda-576=0 \iff \left[\begin{array}{l}\lambda_1=-32,\\ \lambda_2=18,\end{array}\right.$$

а свободный член c' вычисляется по формуле (14.11)

$$c'=\frac{\Delta}{\delta}=\frac{-165888}{-576}=288,$$

так что получаем полуканоническое уравнение

$$-32x'^2+18y'^2+288=0$$

и далее каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{16}=1$$

гиперболы с полуосями $a=3$ и $b=4$, линейным эксцентриситетом $\sqrt{a^2+b^2}=5$, эксцентриситетом $\varepsilon=5/3$, фокусами $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$ (координаты фокусов указаны в канонической системе координат $O'x'y'$), директрисами $x'=\pm 9/5$ и асимптотами

$$\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{16}=0 \iff \left[\begin{array}{l}4x'-3y'=0,\\ 4x'+3y'=0.\end{array}\right.$$

Найдём ортогональное преобразование, канонизирующее уравнение квадрики.

Сначала определим поворот, уничтожающий слагаемое $30xy$ в уравнении квадрики. Для этого найдём собственные векторы матрицы A:

$$\lambda_1 = -32: \quad \begin{pmatrix} 45 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 18: \quad \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 15 & -45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

нормировочные коэффициенты выбраны так, чтобы матрица

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

имела определитель $\det R = +1$, т.е. описывала поворот. Угол поворота координатных осей равен

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-3) \approx -1{,}249 = -71{,}6^\circ.$$

Для определения вектора переноса начала координат решим неоднородную систему уравнений $AX_0 = -B^T$:

$$\begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 15 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -99 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что свободный член c' полуканонического уравнения может быть вычислен также по второй из формул (14.11):

$$c' = BX_0 + c = \begin{pmatrix} 9 & 99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 117 = 288,$$

что, разумеется совпадает с результатом, полученным ранее при помощи инвариантов.

Матрица ортогонального преобразования, канонизирующего данную квадрику, имеет вид

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} & -3 \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3\sqrt{10} \\ -3 & 1 & 2\sqrt{10} \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{10} \end{array}\right),$$

т.е. преобразование осуществляется по формулам

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') - 3, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y') + 2. \end{cases} \tag{14.17}$$

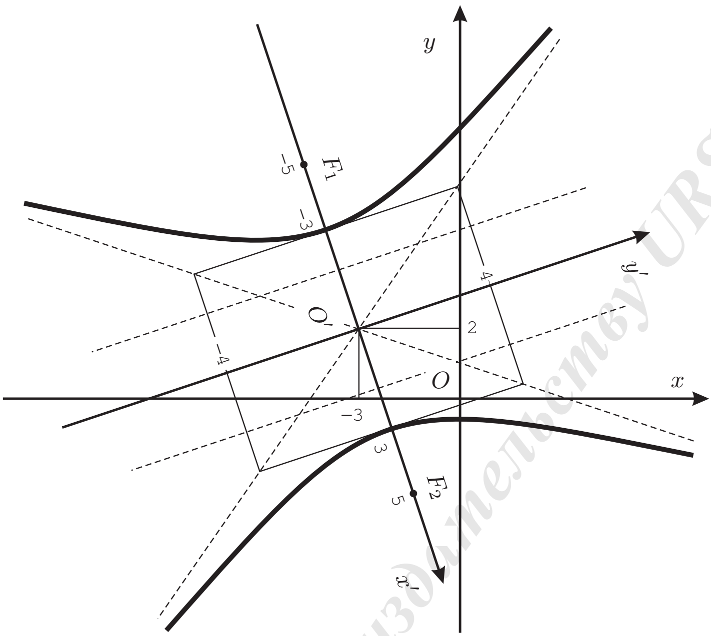


Рис. 14.2. К примеру 14.3

Чтобы найти обратное преобразование P^{-1} (оно потребуется для нахождения уравнений асимптот и директрис), воспользуемся формулой (13.21) (см. с. 201):

$$X_0' = -R^T X_0 = -\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 7 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{10} \end{array}\right), \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14.18}$$

Найдём координаты фокусов гиперболы в исходной системе координат Oxy:

$$F_1: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{10} - 3 \\ \frac{3}{2}\sqrt{10} + 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F_2: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{10} - 3 \\ 2 - \frac{3}{2}\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix};$$

итак, $F_1\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{10}-3,\ 2+\dfrac{3}{2}\sqrt{10}\right)$, $F_2\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{10}-3,\ 2-\dfrac{3}{2}\sqrt{10}\right)$ в исходной системе координат Oxy.

Найдём уравнения канонических осей координат. Уравнения этих осей в канонической системе координат суть $y'=0$ и $x'=0$; чтобы получить их уравнения в исходной системе координат, воспользуемся формулами преобразования (14.18):

$$O'x'\ (y'=0):\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}(3x+y+7)=0,\ 3x+y+7=0;$$

$$O'y'\ (x'=0):\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}(x-3y+9)=0,\ x-3y+9=0.$$

Аналогично преобразуем уравнения асимптот:

$$4x'+3y'=0:\quad \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0,\qquad 13x-9y+57=0,$$

$$4x'-3y'=0:\quad \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0,\qquad x+3y-3=0,$$

и уравнения директрис:

$$5x'+9=0:\quad \begin{pmatrix}5\\0\\9\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0,\qquad x-3y+\frac{9}{5}\sqrt{10}+9=0,$$

$$5x'-9=0:\quad \begin{pmatrix}5\\0\\-9\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0,\qquad x-3y-\frac{9}{5}\sqrt{10}+9=0.$$

Пример 14.4. Приведите уравнение квадрики

$$27x^2-48xy+13y^2-72x+114y-27=0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения данной квадрики:

$$A=\begin{pmatrix}27&-24\\-24&13\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-36&57\end{pmatrix},\ c=-27,\ D=\left(\begin{array}{cc|c}27&-24&-36\\-24&13&57\\\hline -36&57&-27\end{array}\right)$$

и вычислим его ортогональные инварианты:

$$S = \operatorname{tr} A = 40, \quad \delta = \det A = -225, \quad \Delta = 0.$$

Квадрика имеет вырожденный ($\Delta = 0$) гиперболический ($\delta < 0$) тип, т.е. представляет собой пару пересекающихся прямых.

Найдём собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0 \iff \lambda^2 - 40\lambda - 225 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &\lambda_1 = -5, \\ &\lambda_2 = 45, \end{aligned}\right.$$

$$\lambda_1 = 45: \quad \begin{pmatrix} -18 & -24 \\ -24 & -32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -5: \quad \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Как обычно, выбор нормировочных констант осуществляется так, чтобы матрица $R = [R_1 \ R_2]$ имела определитель $+1$, т.е. соответствовала бы повороту системы координат; в нашем случае матрица поворота

$$R = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

описывает вращение на угол $\alpha = -\operatorname{arctg}(3/4) \approx -36{,}9^\circ$.

Вектор сдвига начала координат определяется из уравнения $AX_0 = -B^T$:

$$X_0 = -A^{-1}B^T = -\begin{pmatrix} 27 & -24 \\ -24 & 13 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -36 \\ 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итак, полуканоническое уравнение рассматриваемой квадрики имеет вид

$$45x'^2 - 5y'^2 = 0 \iff 9x'^2 - y'^2 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &3x' - y' = 0, \\ &3x' + y' = 0. \end{aligned}\right.$$

Матрица P ортогонального преобразования, канонизирующего уравнение, и обратная к ней[1] P^{-1} равны

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 4 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{24}{5} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

[1]Матрица P^{-1} вычисляется по формуле (13.21) (см. с. 201).

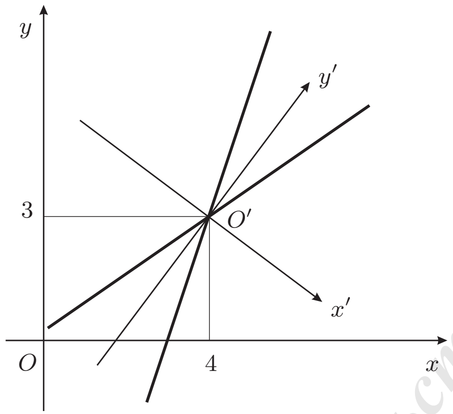


Рис. 14.3. К примеру 14.4

Уравнения прямых, образующих рассматриваемую квадрику, в системе координат Oxy:

$$3x' - y' = 0: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{9}{5}x - \frac{13}{5}y + \frac{3}{5} = 0, \quad 9x - 13y = -3,$$

$$3x' + y' = 0: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 3x - y - 9 = 0, \qquad 3x - y = 9.$$

Уравнения осей канонической системы координат:

$$Ox' \ (y' = 0): \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{24}{5} = 0, \quad 3x + 4y = 24,$$

$$Oy' \ (x' = 0): \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{7}{5} = 0, \quad 4x - 3y = 7.$$

Пример 14.5. Приведите уравнение квадрики

$$x^2 - 2xy + y^2 + 16x + 8y - 92 = 0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения данной квадрики:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = -92, \quad D = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & 4 \\ \hline 8 & 4 & -92 \end{array}\right)$$

и вычислим ортогональные инварианты:

$$S = \operatorname{tr} A = 2, \quad \delta = \det A = 0, \quad \Delta = \det D = -144.$$

Так как $\delta = 0$, квадрика имеет параболический тип; поскольку $\Delta \neq 0$ — это парабола с каноническим уравнением $y''^2 = 2px''$. Фокальный параметр можно определить с помощью инвариантов:

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}} = \sqrt{-\frac{-144}{2^3}} = 3\sqrt{2}.$$

Итак, каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y''^2 = 6\sqrt{2}x'',$$

её фокус имеет в канонической системе $O''x''y''$ координаты $F(3/\sqrt{2}; 0)$, а директриса — уравнение $x'' = -3/\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}x'' + 3 = 0$.

Займёмся поиском ортогонального преобразования, канонизирующего рассматриваемое уравнение. Собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = S = 2$; найдём собственные векторы:

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

нормировочные коэффициенты выбраны так, чтобы новый базис $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ получился правым, т.е. чтобы матрица поворота

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имела определитель $+1$.

Матрицы коэффициентов уравнения квадрики после поворота координатных осей примут вид

$$B' = BR = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

и

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 6\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -2\sqrt{2} \\ \hline 6\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -92 \end{array}\right);$$

стало быть, полуканоническое уравнение квадрики имеет вид

$$2y'^2 + 12\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y' - 92 = 0$$

Коэффициент при x' имеет тот же знак, что и коэффициент при y', так что алгебраическими преобразованиями полученное уравнение не удастся свести к каноническому уравнению параболы ${y''}^2 = 2py''$, где $p > 0$. Для того, чтобы знаки коэффициентов при x' и y' стали противоположными, требуется изменить направления осей Ox' и Oy' на противоположные, что достигается изменением знака матрицы поворота R или, что то же самое, дополнительным поворотом на $180°$. Итак, матрицу поворота возьмём в виде

$$R = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

эта матрица описывает поворот на угол $\alpha = 135°$. Матрицы коэффициентов уравнения квадрики примут вид

$$B' = BR = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

и

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -6\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2\sqrt{2} \\ \hline -6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -92 \end{array}\right),$$

а полуканоническое уравнение квадрики — вид

$$2y'^2 - 12\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' - 92 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y'^2 - 6\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' - 46 = 0.$$

Перегруппировывая слагаемые, получим

$$y'^2 + 2\sqrt{2}y' = 6\sqrt{2}x' + 46$$

или, выделяя полный квадрат,

$$\left(y' + \sqrt{2}\right)^2 = 6\sqrt{2}\left(x' + 4\sqrt{2}\right).$$

Введя переменные

$$\begin{cases} y'' = y' + \sqrt{2}, \\ x'' = x' + 4\sqrt{2} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x'' - 4\sqrt{2}, \\ y'' = y' - \sqrt{2}, \end{cases}$$

получим уже известное нам каноническое уравнение $y''^2 = 6\sqrt{2}x''$ параболы с фокальным параметром $p = 3\sqrt{2}$.

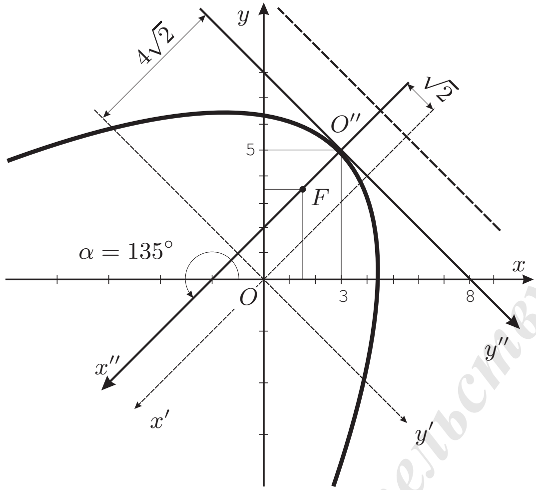


Рис. 14.4. К примеру 14.5

Начало O'' канонической системы координат $O''x''y''$ относительно системы $Ox'y'$ имеет координаты

$$X_0' = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Найдём его координаты в системе Oxy:

$$X_0 = RX_0' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, полное ортогональное преобразование, канонизирующее уравнение данной квадрики, и обратное преобразование имеют матрицы

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 4\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Координаты фокуса в системе Oxy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $F(3/2; 7/2)$. Уравнение директрисы:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 11 - y - x = 0,$$

т.е. $x + y = 11$.

Уравнения осей канонической системы координат:

$$\text{ось } Ox\ (y=0):\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1\right) = 0,$$

$$\text{ось } Oy\ (x=0):\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 4\right) = 0,$$

т.е. оси канонической системы координат имеют уравнения $x - y + 2 = 0$ (ось Ox) и $x + y - 8 = 0$ (ось Oy).

Пример 14.6. Приведите уравнение квадрики

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 36x - 54y + 72 = 0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения данной квадрики:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -18 & -27 \end{pmatrix}, \quad c = 72, \quad D = \left(\begin{array}{rr|r} 4 & 6 & -18 \\ 6 & 9 & -27 \\ \hline -18 & -27 & 72 \end{array}\right).$$

Вычислим ортогональные инварианты уравнения:

$$S = \operatorname{tr} A = 13, \quad \delta = \det A = 0, \quad \Delta = \det D = 0.$$

Таким образом, это вырожденная параболическая квадрика, и для определения её типа требуется ещё вычислить полуинвариант K:

$$K = \begin{vmatrix} 4 & -18 \\ -18 & 72 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -27 \\ -27 & 72 \end{vmatrix} = -117.$$

Полуканоническое уравнение $Sy'^2 + K/S = 0$, т.е.

$$13y'^2 - 9 = 0,$$

которому соответствует матрица коэффициентов

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -9 \end{array}\right),$$

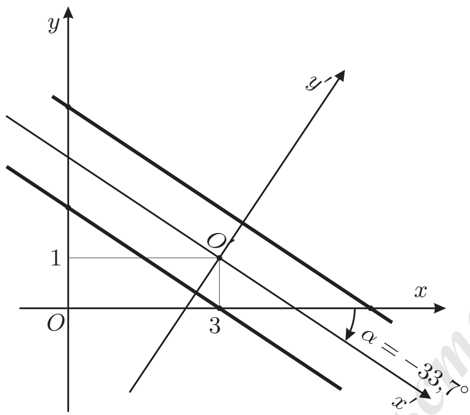


Рис. 14.5. К примеру 14.6

распадается в пару уравнений параллельных прямых

$$\sqrt{13}y' - 3 = 0, \quad \sqrt{13}y' + 3 = 0.$$

Определим ортогональное преобразование, канонизирующее уравнение рассматриваемой квадрики. Собственные значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 13$ матрицы A, являющиеся корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - 13\lambda = 0$, были найдены ранее; найдём собственные векторы матрицы A:

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 13: \quad \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица поворота

$$R = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

описывает вращение на угол $\alpha = -\operatorname{arctg}(2/3) \approx -33{,}7^\circ$.

Для определения вектора сдвига нужно решить неоднородную систему $AX_0 = -B^T$, которая в рассматриваемом случае имеет бесконечно много решений. Воспользуемся методом Гаусса—Жордана:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 18 \\ 6 & 9 & 27 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

общее решение системы описывается формулой

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где a — произвольная константа. Матрица P канонизирующего ортогонального преобразования и обратная к ней P^{-1} имеют вид

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \dfrac{3}{\sqrt{13}} & \dfrac{2}{\sqrt{13}} & \dfrac{1}{2}(9-3a) \\ -\dfrac{2}{\sqrt{13}} & \dfrac{3}{\sqrt{13}} & a \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{13}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & \dfrac{1}{2}(13a-27) \\ 2 & 3 & -9 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{13} \end{array}\right).$$

Найдём уравнения прямых линий, составляющих рассматриваемую квадрику, в системе координат Oxy:

$$\sqrt{13}y' - 3 = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{13} \\ -3 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + 3y - 12 = 0, \quad 2x + 3y = 12,$$

$$\sqrt{13}y' + 3 = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + 3y - 6 = 0, \quad 2x + 3y = 6;$$

таким образом, уравнение данной квадрики может быть представлено в виде

$$(2x + 3y - 6)(2x + 3y - 12) = 0.$$

Уравнения осей канонической системы координат:

$$\text{ось } Ox' \ (y' = 0): \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x + 3y - 9) = 0,$$

$$2x + 3y = 9,$$

$$\text{ось } Oy' \ (x' = 0): \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \left(3x - 2y + \frac{1}{2}(13a - 27)\right) = 0,$$

$$3x - 2y = \frac{1}{2}(27 - 13a),$$

где a — произвольная постоянная.

4. Задачи для самостоятельного решения

Приведите уравнение квадрики к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

14.1. $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 22x - 20y + 17 = 0.$

14.2. $41x^2 - 24xy + 9y^2 - 106x + 42y + 29 = 0.$

14.3. $x^2 - 16xy - 11y^2 - 26x - 92y - 71 = 0.$

14.4. $4x^2 - 20xy - 11y^2 + 44x + 106y - 59 = 0.$

14.5. $7x^2 + 50xy + 7y^2 - 158x + 94y - 425 = 0.$

14.6. $13x^2 + 32xy + 37y^2 - 6x - 42y + 18 = 0.$

14.7. $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 12x + 42y + 153 = 0.$

14.8. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 16x - 262y + 529 = 0.$

14.9. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 30x + 210y + 375 = 0.$

14.10. $4x^2 - 4xy + y^2 + 28x - 14y + 29 = 0.$

14.11. $4x^2 - 4xy + y^2 + 28x - 14y + 29 = 0.$

14.12. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 48x + 64y + 89 = 0.$

ГЛАВА 15

Поверхности второго порядка

1. Основные понятия и факты

А. Канонические уравнения. Поверхность второго порядка — это квадрика в трёхмерном пространстве, т.е. множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$X^T AX + 2BX + c = 0, \tag{15.1}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1, & b_2, & b_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично тому, как это было сделано для линий второго порядка (см. гл. 12), каждое уравнение вида (15.1) можно привести к одному из семнадцати канонических типов, перечисленных ниже (некоторые из них изображены на рис. 15.1).

I. **Эллиптический тип.**

I.1. Эллипсоид (см. рис. 15.1(a)):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

I.2. Мнимый эллипсоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Это уравнение не имеет ни одного вещественного решения.

I.3. Мнимый конус:

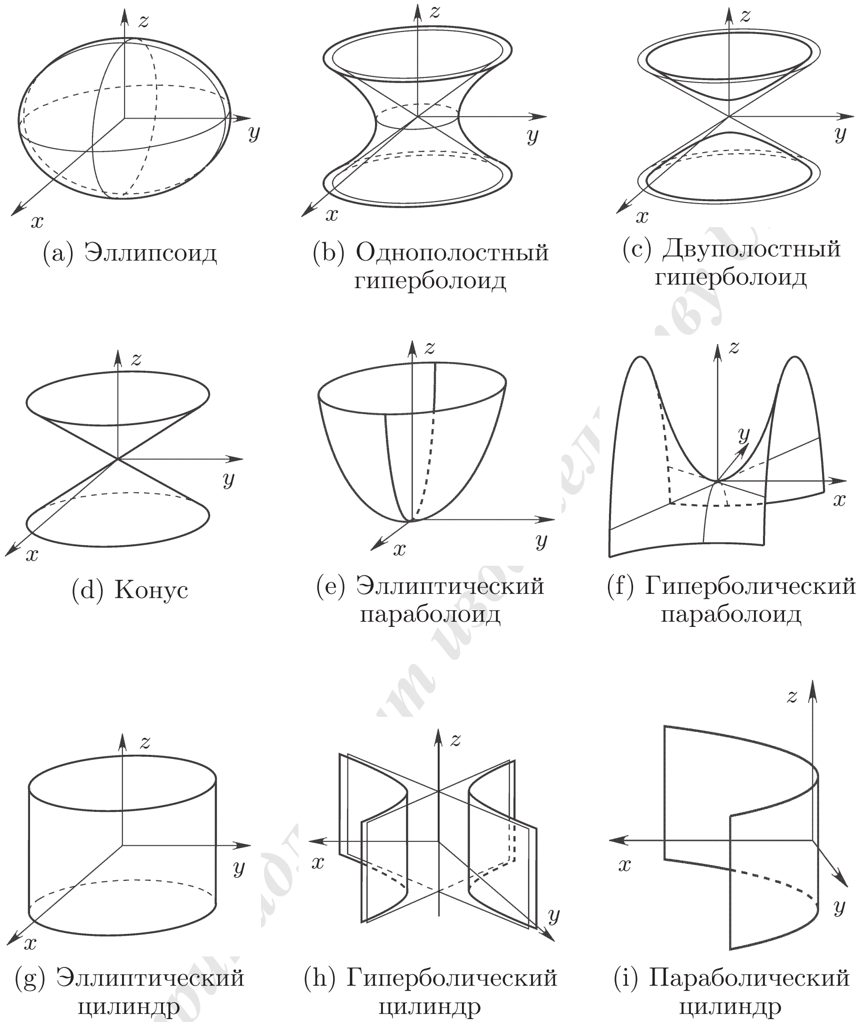
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Поверхность состоит из единственной вещественной точки $O(0,0,0)$.

II. **Гиперболический тип.**

II.1. Однополостный гиперболоид (см. рис. 15.1(b)):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$



(a) Эллипсоид

(b) Однополостный гиперболоид

(c) Двуполостный гиперболоид

(d) Конус

(e) Эллиптический параболоид

(f) Гиперболический параболоид

(g) Эллиптический цилиндр

(h) Гиперболический цилиндр

(i) Параболический цилиндр

Рис. 15.1. Основные типы поверхностей второго порядка

II.2. Двуполостный гиперболоид (см. рис. 15.1(c)):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

II.3. Конус (см. рис. 15.1(d)):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

III. **Параболический тип.**

III.1. Эллиптический параболоид (см. рис. 15.1(e)):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a > 0,\ b > 0.$$

III.2. Гиперболический параболоид (см. рис. 15.1(f)):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a > 0,\ b > 0.$$

III.3. Эллиптический цилиндр (см. рис. 15.1(g)):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Направляющей цилиндра является эллипс, образующие параллельны оси Oz.

III.4. Мнимый эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Это уравнение не имеет ни одного вещественного решения.

III.5. Пара мнимых пересекающихся плоскостей:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a > 0,\ b > 0.$$

где $a > 0$, $b > 0$. Вещественные точки этой поверхности заполняют прямую (ось Oz).

III.6. Гиперболический цилиндр: (см. рис. 15.1(h)):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Направляющей является гипербола, образующие параллельны оси Oz.

III.7. Пара пересекающихся плоскостей:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Линией пересечения плоскостей является ось Oz.

III.8. Параболический цилиндр: (см. рис. 15.1(i)):

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Направляющей является парабола, образующие параллельны оси Oz.

III.9. Пара параллельных плоскостей

$$y^2 = a^2, \quad a > 0.$$

Плоскости параллельны плоскости Oxz.

III.10. Пара мнимых параллельных плоскостей:

$$y^2 = -a^2, \quad a > 0.$$

Это уравнение не имеет ни одного вещественного решения.

III.11. Пара совпадающих плоскостей:

$$y^2 = 0.$$

В. Некоторые специальные типы алгебраических поверхностей. Алгебраическое[1] уравнение $F(x, y) = 0$, не содержащее переменной z, определяет на плоскости Oxy некоторую линию, а в пространстве $Oxyz$ — *цилиндрическую поверхность*, прямолинейные образующие которой параллельны оси Oz; они имеют параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = t, \end{cases} \qquad \text{где } F(x_0, y_0) = 0.$$

Можно также считать, что эти прямолинейные образующие являются пересечением плоскостей $x = x_0$ и $y = y_0$.

Уравнение вида $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ определяет *поверхность вращения*,, сечение которой плоскостью Oxz — линия $F(|x|, z) = 0$ в этой плоскости — симметрично относительно оси Oz. Каждая из двух симметричных частей этой линии, называемая *главным меридианом* поверхности, при вращении вокруг оси Oz образует рассматриваемую поверхность.

Пусть две поверхности определяются алгебраическими уравнениями $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ соответственно. Тогда их пересечение определяется системой уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

С. Линейчатые поверхности. Поверхность называется *l-кратно линейчатой* поверхностью, если через каждую её точку проходит ровно l различных прямых, называемых прямолинейными образующими.

Все цилиндры являются 1-линейчатыми поверхностями. Конус также является 1-линейчатой поверхностью: все прямолинейные образующие которой проходят через одну точку — вершину конуса.

15.1. Теорема. *Однополостный гиперболоид является дважды линейчатой поверхностью, т.е. через каждую его точку проходит две различные прямые, целиком лежащие на нём. Эти прямые образуют два однопараметрических семейства*[2]*. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида обладают следующими свойствами*:

(1) *через каждую точку гиперболоида проходит одна и только одна образующая каждого семейства*;

(2) *любые две образующие, принадлежащие к одному семейству, скрещиваются*;

[1] Уравнение $F(x, y, \dots) = 0$ называется *алгебраическим*, если функция $F(x, y, \dots)$ представляет собой многочлен.

[2] Говорят, что множество линий образует *однопараметрическое семейство*, если каждую из этих линий можно задать уравнением вида $F(x, y; c) = 0$ при некотором значении параметра c.

(3) *любые две образующие, принадлежащие к разным семействам, лежат в одной плоскости.*

Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида можно найти следующим образом. Запишем уравнение гиперболоида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на гиперболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \beta\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \alpha\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}\right) = \delta\left(1 + \dfrac{y_0}{b}\right), \\ \delta\left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}\right) = \gamma\left(1 - \dfrac{y_0}{b}\right) \end{cases} \tag{15.2}$$

относительно неизвестных (α, β) для первой системы и (γ, δ) для второй. Легко доказать, что каждая из систем имеет нетривиальные решения; обозначим какие-либо решения через (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0) соответственно. Рассмотрим теперь системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \beta_0\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \beta_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \alpha_0\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \delta_0\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \delta_0\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \gamma_0\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{15.3}$$

относительно неизвестных (x, y, z). Точка (x_0, y_0, z_0) является решением каждой из этих систем, и при этом каждая из систем определяет прямую, проходящую через указанную точку. Поскольку при перемножении уравнений каждой из систем получается уравнение гиперболоида, любое решение (x, y, z) каждой из систем представляет точку, лежащую на гиперболоиде. Таким образом, обе прямых, представляемых данными системами, целиком лежат на гиперболоиде.

15.2. Теорема. *Гиперболический параболоид является дважды линейчатой поверхностью, т.е. через каждую его точку проходит две различные прямые, целиком лежащие на нём. Эти прямые образуют два однопараметрических семейства. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида обладают следующими свойствами*:

(1) *через каждую точку гиперболоида проходит одна и только одна образующая каждого семейства*;

(2) *любые две образующие, принадлежащие к одному семейству, скрещиваются*;

(3) *любые две образующие, принадлежащие к разным семействам, пересекаются*;

(4) *все образующие одного семейства параллельны одной плоскости.*

Прямолинейные образующие гиперболического параболоида можно найти следующим образом. Запишем уравнение параболоида в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z. \tag{15.4}$$

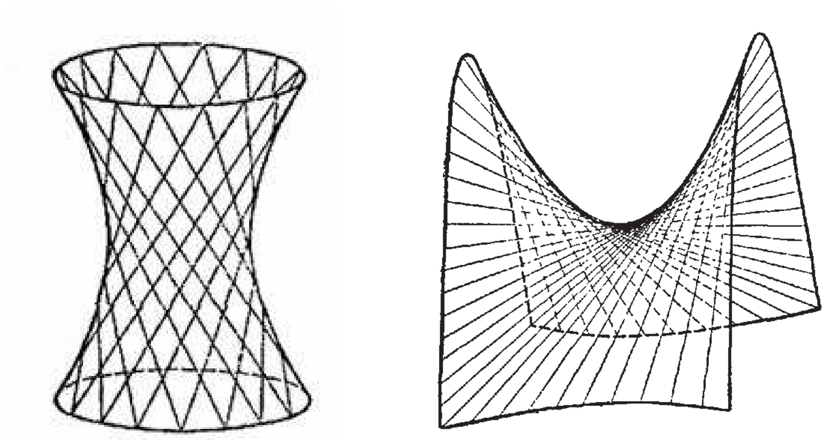


Рис. 15.2. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида

Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит на параболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ):

$$\begin{cases} \alpha \left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b} \right) = \beta, \\ \beta \left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b} \right) = 2\alpha z_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma \left(\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b} \right) = \delta, \\ \delta \left(\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b} \right) = 2\gamma z_0. \end{cases} \tag{15.5}$$

Пусть (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0) — решения этих систем. Рассмотрим теперь системы

$$\begin{cases} \alpha_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} \right) = \beta_0, \\ \beta_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \right) = 2\alpha z, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \right) = \delta_0, \\ \delta_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} \right) = 2\gamma_0 z; \end{cases} \tag{15.6}$$

каждая из них определяет прямую, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) параболоида. Перемножая уравнения каждой из систем, обнаруживаем, что любое решение системы является также и решением уравнения (15.4), т.е. прямая целиком лежит на параболоиде.

2. Контрольные вопросы и задания

1. Запишите канонические уравнения поверхностей второго порядка и изобразите их на чертеже.
2. Что такое цилиндрическая поверхность? Каким уравнением задаётся цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz? оси Ox?
3. Каким уравнением задаётся поверхность вращения?
4. Что такое линейчатая поверхность? Приведите примеры.

5. Сформулируйте теорему о свойствах прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.
6. Как найти уравнения прямолинейных образующих, проходящих через заданную точку однополостного гиперболоида?
7. Сформулируйте теорему о свойствах прямолинейных образующих гиперболического параболоида.
8. Как найти уравнения прямолинейных образующих, проходящих через заданную точку гиперболического параболоида?

3. Примеры решения задач

Пример 15.1. Рассматриваются сечения поверхности $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ плоскостями (a) $z=0$, (b) $z=2\sqrt{5}$, (c) $y=0$, (d) $y=\sqrt{3}$, (e) $y=2$, (f) $y=\sqrt{5}$, (g) $y=2\sqrt{2}$. Запишите уравнения проекций эти сечений на координатные плоскости. Изобразите сечения.

Решение. Данная поверхность представляет собой однополостный гиперболоид с осью Oz.

(a) Чтобы получить уравнение проекции сечения плоскостью $z=0$ на плоскость Oxy, нужно исключить z из системы уравнений, состоящей из уравнения поверхности и уравнения секущей плоскости. Получаем

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;$$

это уравнение эллипса с полуосями 3 и 2 (см. рис. 15.3(a)).

(b) Сечение плоскостью $z=2\sqrt{5}$:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1+\frac{(2\sqrt{5})^2}{16} \iff \frac{x^2}{81/4}+\frac{y^2}{9}=1;$$

это эллипс с полуосями $9/2$ и 3.

(c) Сечение плоскостью $y=0$:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1;$$

это гипербола с полуосями 3 и 4 (см. рис. 15.3(b)).

(d) Сечение плоскостью $y=\sqrt{3}$:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1-\frac{(\sqrt{3})^2}{4} \iff \frac{x^2}{9/4}-\frac{z^2}{4}=1;$$

это гипербола с полуосями $3/2$ и 2.

(e) Сечение плоскостью $y=2$:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0;$$

это пара пересекающихся прямых.

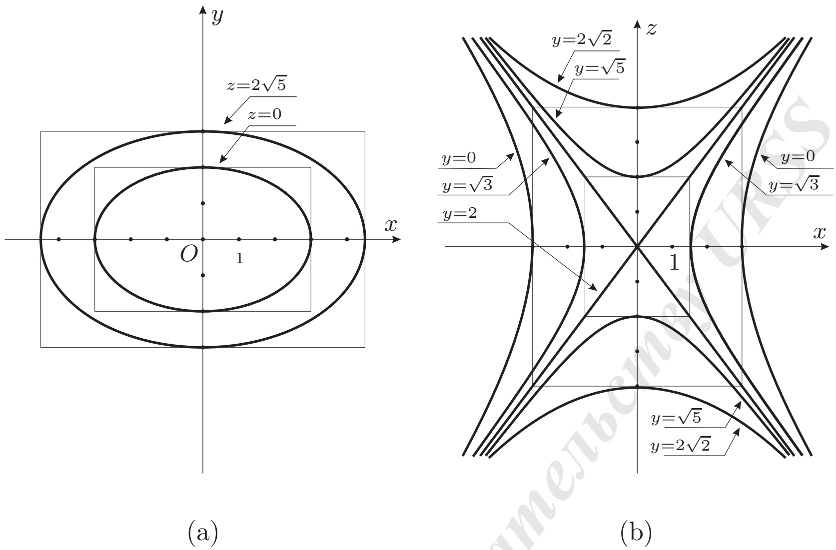


Рис. 15.3. К задаче 15.1

(f) Сечение плоскостью $y = \sqrt{5}$:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{(\sqrt{5})^2}{4} \iff \frac{x^2}{9/4} - \frac{z^2}{4} = -1;$$

это гипербола с полуосями $3/2$ и 2, сопряжённая гиперболе из п. (d).

(g) Сечение плоскостью $y = 2\sqrt{2}$:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 - \frac{(2\sqrt{2})^2}{4} \iff \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = -1;$$

это гипербола с полуосями 3 и 4, сопряжённая гиперболе из п. (c).

Пример 15.2. Найдите центр сечения однополостного гиперболоида $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$ плоскостью $x - y + 3z = 1$.

Решение. Найдём уравнение проекции сечения на плоскость Oxy, исключив z из данных уравнений: $3z = 1 - x + y$, так что

$$x^2 + 4y^2 - (1 - x + y)^2 = 36 \iff 2xy + 3y^2 + 2x - 2y - 37 = 0$$
$$\iff X^T AX + 2BX + c = 0,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1, & -1 \end{pmatrix}, \quad c = -37.$$

Координаты X_0 центра этой квадрики определяются из системы уравнений $AX_0 = -B^T$ (см. (14.8), с. 214). Имеем

$$X_0 = -A^{-1}B^T = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как искомая точка лежит на плоскости $x - y + 3z = 1$, находим

$$z_0 = \frac{1}{3}(1 - x_0 + y_0) = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $(4; -1; -4/3)$.

Пример 15.3. Найдите уравнение множества центров сечений эллипсоида $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 30$ плоскостями, параллельными плоскости $x + y + z = 1$.

Решение. План решения: составим уравнения проекции сечения данного эллипсоида плоскостью $x + y + z = h$ на плоскость Oxy, далее найдём центр (x_h, y_h) полученной линии второго порядка и затем уже центр (x_h, y_h, z_h) сечения.

Чтобы получить уравнение проекции сечения на плоскость Oxy, исключим z из системы

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 30, \\ x + y + z = h. \end{cases}$$

Имеем

$$2x^2 + 3y^2 + 5(h - x - y)^2 = 30$$
$$\iff 7x^2 + 10xy + 8y^2 - 10hx - 10hy + 5h^2 - 30 = 0$$
$$\iff X^T AX + 2BX + c = 0,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5h, & -5h \end{pmatrix}, \quad c = 5h^2 - 30.$$

Координаты X_h центра этой квадрики определяются из системы уравнений $AX_h = -B^T$ (см. (14.8), с. 214). Имеем

$$X_h = -A^{-1}B^T = -\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5h \\ -5h \end{pmatrix} = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 15h \\ 10h \end{pmatrix}.$$

Аппликату центра сечения находим, используя уравнение секущей плоскости:

$$z_h = h - x_h - y_h = h - \frac{15}{31}h - \frac{10}{31}h = \frac{6}{31}h.$$

Вводя для краткости обозначение $h = 31t$, получаем координаты центра сечения эллипсоида плоскостью $x + y + z = h$:

$$x_h = 15t, \quad y_h = 10t, \quad z_h = 6t.$$

Эти уравнения являются параметрическими уравнениями прямой, содержащей искомое множество центров сечений, которое, однако, состоит не из всех точек найденной прямой, а лишь из тех, которые лежат внутри эллипсоида. Определим точки пересечения прямой и эллипсоида:

$$2(15t)^2 + 3(10t)^2 + 5(6t)^2 = 30 \iff 930t^2 - 30 = 0 \iff t_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{31}}.$$

Ответ: множеством центров сечений эллипсоида $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 30$ плоскостями, параллельными $x + y + z = 1$, является отрезок $\bigl(x, y, z\bigr)^T = \bigl(15t, 10t, 6t\bigr)^T$, $-1/\sqrt{31} \leqslant t \leqslant 1/\sqrt{31}$.

Пример 15.4. Определите, какая линия является сечением однополостного гиперболоида $9x^2 + 9y^2 - z^2 = 1$ плоскостью $x + y + z = 1$.

Решение. Найдём уравнение проекции сечения на плоскость Oxy, исключив z из данных уравнений: $z = 1 - x - y$, так что

$$9x^2 + 9y^2 - (1 - x - y)^2 = 1 \iff 8x^2 - 2xy + 8y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$$
$$\iff X^T AX + 2BX + c = 0,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix}, c = -2.$$

Инварианты этой квадрики равны

$$S = 16, \quad \delta = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 63, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -144;$$

это эллипс (см. таблицу на с. 216). Найдём его каноническое уравнение; для этого вычислим корни уравнения $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & -1 \\ -1 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16\lambda + 63 = 0 \iff \lambda_1 = 7, \ \lambda_2 = 9.$$

Уравнение эллипса имеет вид

$$7x'^2 + 9y'^2 + \frac{-144}{63} = 0 \iff \frac{x'^2}{16/49} + \frac{y'^2}{16/63} = 1;$$

его полуоси равны $a = 4/7$, $b = 4/(3\sqrt{7})$. Обозначим направляющие векторы осей этого эллипса через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно. Координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ находим как решения однородных систем $(A - \lambda_k\mathbb{1})X_k = 0$, $k = 1, 2$:

$$\lambda_1 = 7: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_2 = 9: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемое сечение гиперболоида также представляет собой эллипс, лежащий в плоскости $x + y + z = 1$; обозначим через $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$

направляющие векторы его осей (см. рис. 15.4). Полуоси A и B этого эллипса связаны с полуосями a и b эллипса, найденного выше, соотношениями $A = a/\cos\alpha$ и $B = b/\cos\beta$, где α — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{A}$, а β — угол между векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{B}$.

Вектор $\boldsymbol{A} = \big(A_x; A_y; A_z\big)^T$ компланарен плоскости $x+y+z=1$, т.е. ортогонален её нормальному вектору $\boldsymbol{n} = \big(1;1;1\big)^T$, так что

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{n}) = A_x + A_y + A_z = 0.$$

Вектор $\boldsymbol{a} = \big(1;1\big)^T$ является ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{A}$ на плоскость Oxy, так что координаты вектора $\boldsymbol{A}$ равны

$$A_x = a_x = 1, \quad A_y = a_y = 1,$$
$$A_z = -A_x - A_y = -2.$$

Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a} = \big(1;1;0\big)^T$ и $\boldsymbol{A} = \big(1;1;-2\big)^T$ равен

$$\cos\alpha = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{A}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

поэтому

$$A = \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{4}{7}\sqrt{3}.$$

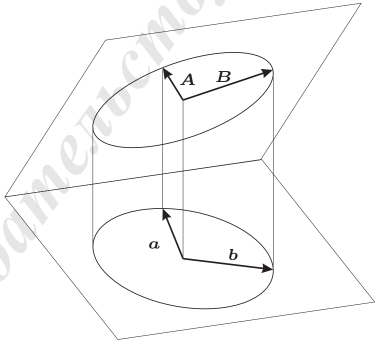


Рис. 15.4. К примеру 15.4

Аналогично, вектор $\boldsymbol{B} = \big(B_x; B_y; B_z\big)^T$ компланарен плоскости $x+y+z=1$, так что

$$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{n}) = B_x + B_y + B_z = 0.$$

Вектор $\boldsymbol{b} = \big(-1;1\big)^T$ является ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{A}$ на плоскость Oxy, так что координаты вектора $\boldsymbol{A}$ равны

$$B_x = b_x = -1, \quad B_y = b_y = 1, \quad B_z = -B_x - B_y = 0.$$

Таким образом, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}$ и поэтому

$$B = b = \frac{4}{3\sqrt{7}}.$$

Ответ: искомым сечением является эллипс с полуосями $\dfrac{4}{7}\sqrt{3}$ и $\dfrac{4}{3\sqrt{7}}$.

Пример 15.5. Составьте уравнение плоскости, пересекающей эллипсоид $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 16$ по эллипсу, центр которого находится в точке $(2;-1;1)$.

Решение. Обозначив через $\boldsymbol{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)^T$ и $\boldsymbol{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)^T$ направляющие векторы искомой плоскости, запишем её уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2 - a_x u - b_x v, \\ y = -1 - a_y u - b_y v, \\ z = 1 - a_z u - b_z v. \end{cases}$$

Подставив эти уравнения в уравнение эллипсоида, получим уравнение сечения во «внутренних координатах» u, v секущей плоскости:

$$\left(2 - a_x u - b_x v\right)^2 + 2\left(-1 - a_y u - b_y v\right)^2 + 4\left(1 - a_z u - b_z v\right)^2 = 16$$

или

$$4 - 4\left(a_x u + b_x v\right) + \left(a_x u + b_x v\right)^2 + 2 + 4\left(a_y u + b_y v\right) + \\ + 2\left(a_y u + b_y v\right)^2 + 4 - 8\left(a_z u + b_z v\right) + 4\left(a_z u + b_z v\right)^2 = 16.$$

Так как по условию центр этого эллипса лежит в точке, соответствующей $u_0 = v_0 = 0$, то в этом уравнении отсутствуют члены, линейные по u и v. Приравнивая коэффициенты при этих членах нулю, получаем условия на координаты направляющих векторов плоскости:

$$\begin{cases} a_x - a_y + 2a_z = 0, \\ b_x - b_y + 2b_z = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что в качестве нормального вектора искомой плоскости можно принять вектор $\boldsymbol{n} = \left(1; -1; 2\right)^T$. Поэтому уравнение плоскости имеет вид

$$(x - 2) - (y + 1) + 2(z - 1) = 0 \iff x - y + 2z - 5 = 0.$$

Пример 15.6. Составьте параметрические уравнения двух пар прямолинейных образующих гиперболического параболоида $4x^2 - y^2 = 7z$, проведённых через точки $A(-2; 3; 1)$ и $B(1; -2; 0)$. Для пересекающихся образующих найдите их точки пересечения, для скрещивающихся — расстояние между ними.

Решение. 1. Найдём уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку $A(-2; 3; 1)$. Рассмотрим две однородных системы (15.5) относительно неизвестных α и β:

$$\begin{cases} \alpha(2x_0 - y_0) = \beta, \\ \beta(2x_0 + y_0) = 7\alpha z_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma(2x_0 + y_0) = \delta, \\ \delta(2x_0 - y_0) = 7\gamma z_0, \end{cases}$$

где $x_0 = -2$, $y_0 = 3$, $z_0 = 1$, т.е.

$$\begin{cases} -7\alpha = \beta, \\ -\beta = 7\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\gamma = \delta, \\ -7\delta = 7\gamma \end{cases}$$

частные решения которых $\alpha = 1$, $\beta = -7$; $\gamma = 1$, $\delta = -1$. Используя эти значения, составляем уравнения прямолинейных образующих (15.6):

$$\begin{cases} 2x - y = -7, \\ -7(2x + y) = 7z, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = -1, \\ -(2x - y) = 7z. \end{cases}$$

Чтобы записать уравнения этих прямых в параметрическом виде, найдём их направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ как векторные произведения нормалей плоскостей, пересечением которых являются эти прямые:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Итак, параметрические уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку $A(-2; 3; 1)$, имеют вид

$$l_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad l_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Точно таким же образом находим параметрические уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку $B(1; -2; 0)$:

$$l_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $A(-2; 3; 1)$, а прямые l_3 и l_4 пересекаются в точке $B(1; -2; 0)$.

Выясним взаимное расположение прямых l_1 и l_3, пользуясь результатом примера 11.6 (см. с. 169). Найдём смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB} = \big(3; -5; -1\big)^T$, $\boldsymbol{a}_1 = \big(-1; -2; 4\big)^T$ и $\boldsymbol{a}_3 = \big(1; -2; 0\big)^T$:

$$\left(\overrightarrow{AB},\ \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_3\right) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

таким образом, прямые l_1 и l_3 пересекаются. Чтобы найти их точку пересечения, решим переопределённую[1] систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = -\dfrac{1}{4}, \\ u = -\dfrac{7}{4}. \end{cases}$$

Точка C пересечения прямых l_1 и l_3 имеет координаты

$$C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{7}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 \\ 7/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1]Это означает, что количество уравнений в системе больше количества неизвестных; такая система, вообще говоря, несовместна, но в нашем случае мы уже убедились в существовании решения, т.е. точки пересечения прямых.

Поскольку прямые l_1 и l_3 пересекаются, согласно теореме 15.2 (см. с. 241) получаем, что прямые l_1 и l_4, а также прямые l_2 и l_3 скрещиваются. В этом нетрудно также убедиться, вычисляя смешанные произведения $\left(\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4\right)$ и $\left(\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\right)$, которые потребуются в дальнейшем для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми: для l_1 и l_4 имеем

$$\left(\overrightarrow{AB},\ \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_4\right) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 7 & 14 & 16 \end{vmatrix} = -484.$$

для l_2 и l_3

$$\left(\overrightarrow{AB},\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\right) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 7 & -14 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Теперь нетрудно найти расстояния между этими скрещивающимися прямыми. Поскольку

$$\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4\right] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -2 & 4 \\ 7 & 14 & 16 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -88 \\ 44 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left|\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4\right]\right| = 44\sqrt{5},$$

получаем

$$d(l_1, l_4) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4\right]\right|}{\left|\left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4\right]\right|} = \frac{484}{44\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Аналогично находим

$$d(l_2, l_3) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Наконец, точку пересечения прямых l_2 и l_4 находим, решая переопределённую систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s = \dfrac{11}{28}, \\ v = -\dfrac{1}{28}, \end{cases}$$

так что точка D пересечения прямых l_2 и l_4 имеет координаты $D\left(\dfrac{3}{4};\ -\dfrac{5}{2};\ -\dfrac{4}{7}\right)$.

4. Задачи для самостоятельного решения

15.1. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных значениях λ.

(a) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
(b) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$,
(c) $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$;
(d) $x^2+\lambda(y^2+z^2) = 1$;
(e) $x^2+\lambda(y^2+z^2) = \lambda$;
(f) $\lambda x^2 + y^2 = z$;
(g) $\lambda(x^2 + y^2) = z$;
(h) $x^2 + y^2 = \lambda z$;
(i) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z$;
(j) $x^2 + y^2 = \lambda$;
(k) $x^2 - y^2 = \lambda$;
(l) $\lambda x^2 + y^2 = \lambda$.

15.2. Напишите уравнение сферы:
(a) с центром в точке $C(1, -2, 1)$ и радиусом $\sqrt{5}$;
(b) с центром в точке $C(3, -1, -2)$ и радиусом 2.

15.3. Найдите координаты центра и радиус сферы:
(a) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 10 = 0$;
(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 4z - 3 = 0$;

15.4. Составьте уравнение поверхности, получаемой вращением параболы $z^2 = 4x$: (a) вокруг оси Oz; (b) вокруг оси Ox. Как называется эта поверхность? Сделайте чертёж.

15.5. Составьте уравнение поверхности, получаемой вращением гиперболы $x^2 - y^2 = 4$: (a) вокруг оси Ox; (b) вокруг оси Oy. Как называется эта поверхность? Сделайте чертёж.

15.6. Составьте уравнение тора, получаемого вращением окружности $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ вокруг оси Oy.

15.7. Составьте уравнение поверхностей, получаемых вращением гиперболы $xy = 1$ вокруг её асимптот.

15.8. 1. Составьте параметрические уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, проходящих через данную точку, и общее уравнение плоскости, содержащей обе эти прямые:
(1) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 16$, $A(-2; -1; 3)$;
(2) $49x^2 + y^2 - 25z^2 = 25$, $A(1; -1; -1)$.

15.9. Найдите сечение однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - 4z^2 = 25$ плоскостью $4x - 3y - 10z = 0$. Объясните полученный результат.

15.10. Найдите сечение однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - 4z^2 = 25$ плоскостью $4x - 3y - 10z = 0$. Объясните полученный результат.

15.11. Составьте параметрические уравнения прямолинейных образующих гиперболического параболоида, проходящих через данную точку, и общее уравнение плоскости, содержащей обе эти прямые:
(1) $16x^2 - 9y^2 = 5z$, $A(1; 2; -4)$;
(2) $4x^2 - y^2 = 2z$, $A(2; -2; 6)$.

15.12. Найдите сечение гиперболического параболоида $x^2 - 9y^2 = 4z$ плоскостью $2x + 9y - z + 5 = 0$. Объясните полученный результат.

Ответы, указания и решения

1.1. Выражения (a), (b), (c) — высказывания, но их истинностные значения можно определить только при дополнительных условиях (например, азот не всегда является газом). (d), (f) не являются высказываниями, поскольку не обладают истинностными значениями. (e) является не высказыванием, а предикатом. (g), (h) — ложное и истинное высказывания соответственно.

1.2. Нет. Предположения об истинности или ложности данного предложения приводят к противоречию.

1.3. Введём обозначения: A =«сегодняшний день солнечный», B =«сегодняшний день тёплый». Тогда (a) и (b) записываются как $A \wedge B$ и $A \wedge \neg B$. При обозначениях C =«данный четырёхугольник — квадрат», D =«данный четырёхугольник — ромб» высказывание (c) записывается в виде $C \vee D$. При обозначениях E =«это необходимо», F =«это желательно» высказывание (f) можно записать в виде $\neg E \wedge \neg F = \neg(E \vee F)$.

1.4. (a) $A \wedge B$; (b) $A \wedge \neg B$; (c) $\neg A \wedge \neg B$; (d) $\neg(A \wedge B)$.

1.5. $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$.

1.6. Импликации (a), (c), (d), (e) истинны, (b) ложна. Импликация (f) истинна в любой день, кроме понедельника.

1.7. (a) $A \Rightarrow \neg B$; (b) $A \Rightarrow B$; (c) $A \Rightarrow A$; (d) $\neg(B \Rightarrow A)$.

1.8. Если A =«данный треугольник — равносторонний», B =«углы данного треугольника равны», то истинное высказывание (a) записывается в виде $A \Rightarrow B$, а истинное высказывание (b) — в виде $B \Rightarrow A$. Если C =«число x делится на три», D =«число x делится на 6», то ложное высказывание (c) записывается в виде $C \Rightarrow D$, а истинное высказывание (d) — в виде $D \Rightarrow C$.

1.9. (a) Введём обозначения A_k = «$x_k = 0$», где $k = 1, \ldots, N$, N — число сомножителей, B = «$\prod\limits_{k=1}^{N} x_k = 0$». Тогда истинное высказывание (a) записывается в виде $B \iff (A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_N)$ или $B \iff \bigvee\limits_{k=1}^{N} A_k$.

(b) Введём обозначения C_k = «число x_k делится на 3», где $k = 1, \ldots, N$, N — число слагаемых, D = «$\sum\limits_{k=1}^{N} x_k$ делится на 3». Тогда ложное высказывание (b) записывается в виде $(C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_N) \iff D$ или $\bigwedge\limits_{k=1}^{N} C_k \iff D$. Высказывание $\bigwedge\limits_{k=1}^{N} C_k \Rightarrow D$ истинно.

(c) Введём обозначения E =«данный четырёхугольник является квадратом», F =«все углы данного четырехугольника прямые». Тогда ложное высказывание (c) записывается в виде $E \iff F$. Высказывание $E \Rightarrow F$ истинно.

1.10. (a) «Для того, чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы его общий член стремился к нулю». (b) «Для того, чтобы общий член ряда стремился к нулю, достаточно, чтобы ряд сходился». (c) «Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд не сходится». (d) «Для того, чтобы общий член ряда не стремился к нулю, необходимо, чтобы ряд не сходился». (e) «Для того, чтобы ряд не сходился, достаточно, чтобы его общий член не стремился к нулю».

1.12.

$\neg\neg A = A$

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
0	1	0
1	0	1

$A \vee \neg A = 1$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
0	1	1
1	0	1

$A \wedge \neg A = 0$

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
0	1	0
1	0	0

1.13. Для $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Для $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

1.14. Для $\neg(A \Rightarrow B) = (A \wedge \neg B)$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Для $(A \vee B) = (\neg A \Rightarrow B)$:

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow B$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1

2.1. (a) $\cap = \{0\}$, $\cup = [-1; 1]$; (b) $\cap = \{0\}$, $\cup = (-1; 1)$; (c) $\cap = \{0\}$, $\cup = [0; 1)$; (d) $\cap = \varnothing$, $\cup = (0; 1)$.

2.2. (a) $\cap = \varnothing$, $\cup = \Omega$; (b) $\cap$ — круг с тем же центром, что Ω, и вдвое меньшего радиуса, $\cup = \Omega$.

2.3. (a) неверно; (b) верно.

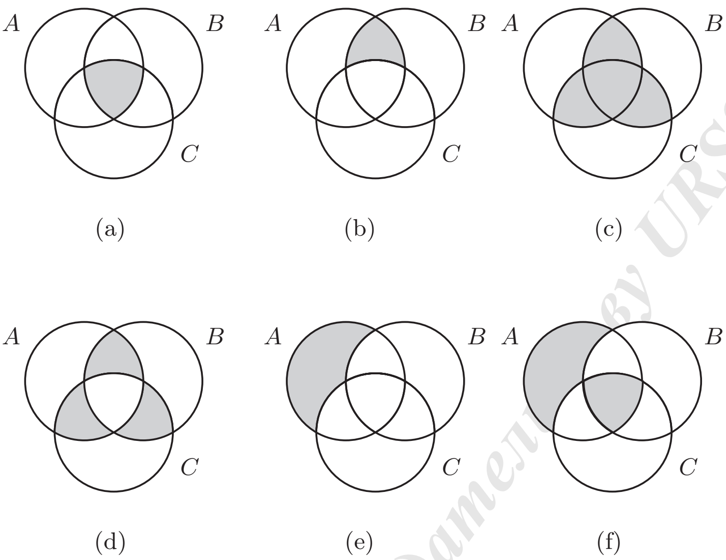


Рис. I. К задаче 2.5

2.4. 4.
2.5. См. рис. I.
2.6. (a) $(A \cup B) \setminus C$; (b) $\big((A \cup B) \triangle C\big) \cup (A \cap B \cap C)$;
(c) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$.
2.7. Поскольку $\sin \circ \arcsin \colon [-1;1] \to [-1;1]$, $x \mapsto \sin(\arcsin x) \equiv x$ является тождественной функцией на $[-1;1]$, функция sin является левой обратной для arcsin, а функция arcsin является правой обратной для sin. Однако sin не является правой обратной для arcsin, а arcsin является левой обратной для sin, поскольку композиция $\arcsin \circ \sin : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ не является тождественным отображением на $\mathbb{R}$. Легко видеть, что эта композиция является тождественным отображением на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; поэтому взаимно обратными функциями будут

$$F\colon \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1],\ x \mapsto \sin x, \qquad g\colon [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\ x \mapsto \arcsin x.$$

2.8. Для каждого $a \in A$ классом эквивалентности $[a]$ является множество всех студентов, обучающихся в той же группе, что и a. Элементами фактор-множества $A/\sim$ являются студенческие группы.
3.1. (a) $11 + 13i$; (b) $17 - i$; (c) $18 - 13i$; (d) $17 + 7i$; (e) $-4 - 7i$; (f) $7 - i$; (g) $11 - 3i$; (h) $8 + 2i$.
3.2. (a) 6; (b) $6 - 6i$; (c) $6 + i$; (d) $-1 + 5i$; (e) 0; (f) 10.
3.3. (a) $\exp i\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; (b) $2\cos\frac{\alpha}{2}\exp\frac{i\alpha}{2}$; (c) $\exp i\alpha$; (d) $\exp i(\alpha - \beta)$; (e) $\sqrt{2(1 - \sin\alpha)}\exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right]$; (f) $\exp 2i\alpha$.
3.4. (a) $\pm(3 - i)$; (b) $\pm(5 - 2i)$; (c) $\pm(3 + 2i)$; (d) $\pm(1 - 2i)$; (e) $\pm(1 - 3i)$; (f) $\pm(5 + i)$; (g) $\pm(3 + 5i)$; (h) $\pm(1 - i)$.
3.5. (a) $2 + 2i$, $2 - 2i$; (b) $3 + i$, $3 - i$; (c) $1 + i$, $2 - 3i$; (d) i, $1 + i$.

3.6. (a) $\pm\sqrt{3}-i,\ 2i$; (b) $1\pm i\sqrt{3},\ -2$; (c) $\pm\sqrt{3}+i,\ -2i$. (d) $2-3i$, $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}-1\right)+i\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)$.
3.7. (a) $\pm(\sqrt{3}+i),\ \pm(1-i\sqrt{3})$; (b) $\pm(\sqrt{3}-i),\ \pm(1+i\sqrt{3})$.
3.8. (a) $2^{n/2}\cos\frac{\pi n}{4}$; (b) $2^{n/2}\sin\frac{\pi n}{4}$.
4.1.

(a) $Q(x)=2x^3-x^2+3x+1,\ R(x)=x+1$;
(b) $Q(x)=x^3-4x^2+2x+3,\ R(x)=3x$;
(c) $Q(x)=3x^3-x^2-x+1,\ R(x)=1$;
(d) $Q(x)=x^3-2x-3,\ R(x)=x$.

4.2.

(a)

	1	−5	7	1	−4
2	1	−3	1	3	2

, $Q(x)=x^3-3x^2+x+3$, $R=2$;

(b)

	2	3	0	5	3
−2	2	−1	2	1	1

, $Q(x)=2x^3-x^2+2x+1$, $R=1$;

(c)

	1	4	6	7	−9
−3	1	1	3	−2	−3

, $Q(x)=x^3+x^2+3x-2$, $R=-3$;

(d)

	3	−15	−1	6	0
5	3	0	−1	1	5

, $Q(x)=3x^3-x+1$, $R=5$.

4.3.

(a)

	1	−3	2	−1	1	2	
1	1	−2	0	−1	0	2	$\Rightarrow P(1)=2$,
2	1	−1	0	−1	−1	0	$\Rightarrow P(2)=0$,
3	1	0	2	5	16	50	$\Rightarrow P(3)=50$;

(b)

	2	−3	1	0	1	−2	
1	2	−1	0	0	1	−1	$\Rightarrow P(1)=-1$,
2	2	1	3	6	13	24	$\Rightarrow P(2)=24$,
3	2	3	10	30	91	271	$\Rightarrow P(3)=271$;

4.4.

(a) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$;
(b) $(x-1)^2(x+1)(x-2)^2$;
(c) $(x+1)^3(x-3)^2$;
(d) $(x-2)^2(x+1)^3$;
(e) $(x+1)(x+2)(x-3)^3$;
(f) $(x+1)^2(x+2)(x^2+2)$;
(g) $(x-2)^2(x+3)(x^2+x+1)$;
(h) $(x-1)^3(x^2+2x+2)$.

4.5. (a) $1/2,\ 1/3, \pm i$; (b) $\pm 1/2,\ -1/3$; (c) $-3/2,\ -2/3,\ \pm 2i$; (d) $1/2,\ 3/2,\ -1\pm i$.
4.6. (a) $2\pm i,\ 2\pm\sqrt{3}$; (b) $-1\pm i,\ -3\pm 2i$; (c) $-1\pm 2i$ (оба корня кратности 2); (d) простой корень 1, корни $-1\pm i$ кратности 2.

5.1. (a) $\begin{pmatrix} 25 & -16 & 13 \\ 9 & -5 & 10 \\ 140 & -87 & 91 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 34 & -91 \\ -19 & 77 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 34 & -19 \\ -91 & 77 \end{pmatrix}$.

5.2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $n = 2$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $n = 3$, O при $n \geqslant 4$.

5.3. (a) $\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

5.4. $\begin{pmatrix} 16 & 3 & 9 \\ -4 & 4 & 11 \\ -4 & 6 & -20 \end{pmatrix}$.

5.5. (a) O; (b) O; (c) $\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$.

5.6.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (e) $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

5.7. (a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$; (c) $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 21 & -5 \\ -16 & 4 \end{pmatrix}$.

5.8.

(a) $\{AB\}_2 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

(b) $\{BA\}_3 = 3\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

(c) $\{AB\}^2 = -2\big(4, 3, 2, 3\big) - \big(-2, -2, -1, -3\big) - 3\big(3, 4, 1, 2\big)$;

(d) $\{BA\}^3 = 3\big(1, 2, 3\big) + 4\big(-2, -1, -3\big) + \big(3, -2, 1\big) + 2\big(1, -3, 2\big)$.

5.10. Указание: Сначала проверьте равенство для случая, когда $f(x) = x^k$.
5.11. $A^{-1} = -(A + \mathbb{1})$. Указание: из данного уравнения вытекает, что $A(A + \mathbb{1}) = -\mathbb{1}$.
5.12. Указание: умножьте приведённое выражение на $(\mathbb{1} - A)$.
5.13. $\lambda = B^T A$.
5.15. Произведение кососимметричных матриц A и B является кососимметричной матрицей тогда и только тогда, когда $AB + BA = O$.
6.1. (a) 1; (b) 0; (c) -1; (d) $4ab$; (e) 0; (f) 0; (g) $2b^3$; (h) 1.

6.2.

(a) $\dfrac{1}{23}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $-\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; (c) $\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; (d) $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

6.3. (a) $\left(\dfrac{37}{23}; \dfrac{29}{23}\right)$; (b) $\left(\dfrac{19}{7}; \dfrac{11}{14}\right)$; (c) $\left(\dfrac{7}{5}; -\dfrac{1}{5}\right)$; (d) $\left(\dfrac{5}{7}; \dfrac{5}{7}\right)$.

6.4. (a) При $p \neq 2$, $p \neq 3$ решение единственно: $\left(\dfrac{6}{3-p}; \dfrac{5}{p-3}\right)$. При $p = 2$ решений бесконечно много: $(c; 1-c)$, где c — произвольное число. При $p = 3$ решений нет.

(b) При $p \neq 2$, $p \neq 6$ решение единственно: $\left(\dfrac{p-5}{p-2}; \dfrac{1}{p-2}\right)$. При $p = 2$ решений нет. При $p = 6$ решений бесконечно много: $(2-5c; 3c)$, где c — произвольное число.

6.6. (a) 0; (b) -18; (c) -42; (d) $a^3 - 3ab^2 + 2b^3$; (e) $-c(a^2+b^2)$; (f) $a^2+b^2+c^2+1$; (g) $a^3+b^3+c^3-3abc$; (h) 0; (i) $6x^2+2$.

6.7. (a) $(a-b)(b-c)(c-a)$; (b) $(a-b)(b-c)(c-a)$; (c) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$; (d) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$; (e) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$; (f) 0.

6.8.

(a) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -13 & 1 & -11 \\ 11 & 1 & 7 \\ -7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$; (b) $\dfrac{1}{119}\begin{pmatrix} 19 & 2 & 24 \\ 2 & 19 & -10 \\ 24 & -10 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} -4 & 22 & -17 \\ 4 & -5 & 0 \\ 5 & -19 & 17 \end{pmatrix}$;

(d) $\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 179 & 68 & 13 \\ 68 & 26 & 5 \\ 13 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

6.9. (a) $(2; 1; -1)$; (b) $(1; 2; 3)$; (c) $(-2; 0; 3)$; (d) $(-1; -1; -1)$; (e) $(3; 2; 1)$; (f) $(-1; 2; 1)$.

6.10. (a) 160 [разложите по второй строке]; (b) 349 [получите ещё один нуль в третьей строке, после чего разложите по третьей строке]; (c) 141; (d) -40; (e) 0; (f) 0.

7.1.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\left\{\begin{array}{l} \text{базисные столбцы } A_1,\ A_2, \\ A_3 = 2A_1 - A_2, \\ A_4 = 3A_1 - A_2; \end{array}\right.$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\left\{\begin{array}{l} \text{базисные столбцы } A_1,\ A_2,\ A_4, \\ A_3 = 3A_1 - 2A_2, \\ A_5 = 3A_1 - 4A_2 + A_4; \end{array}\right.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.2. (a) $(2;1;-1)^T$; (b) $(1;2;3)^T$; (c) $(-2;0;3)^T$; (d) $(-1;-1;-1)^T$; (e) $(3;2;1)^T$; (f) $(-1;2;1)^T$.

7.3. (a) $(1/2,0,0,0)$; (b) $(-23,20,-10,-15)^T$.

7.4.

$$\text{(a) } \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -13 & 1 & -11 \\ 11 & 1 & 7 \\ -7 & 1 & -5 \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } \frac{1}{119}\begin{pmatrix} 19 & 2 & 24 \\ 2 & 19 & -10 \\ 24 & -10 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c) } \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -4 & 22 & -17 \\ 4 & -5 & 0 \\ 5 & -19 & 17 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d) } \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(e) } \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(f) } \begin{pmatrix} 179 & 68 & 13 \\ 68 & 26 & 5 \\ 13 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.5.

$$\text{(a) } X = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 9 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 8 & -8 & -7 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{(b) } X = \begin{pmatrix} 51 & 108 & 42 \\ -16 & -32 & -13 \\ -28 & -60 & -23 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -21 & 50 & 62 \\ -10 & 23 & 29 \\ 2 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

7.6. $$\text{(a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -11 \\ -3 & 10 & -16 & 35 \\ 5 & -16 & 27 & -59 \\ -7 & 22 & -38 & 84 \end{pmatrix}; \text{ (b) } \begin{pmatrix} 112 & -19 & 27 & -11 \\ -22 & 4 & -5 & 2 \\ 19 & -3 & 5 & -2 \\ -7 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.1. ФСР: (a) $\big(-1,1\big)^T$; (b) $\big(-1,1,0\big)^T$, $\big(-1,0,1\big)^T$; (c) $\big(-1,-1,1\big)^T$; (d) $\big(-1,-1,1,0\big)^T$, $\big(-1,-1,0,1\big)^T$; (e) $\big(1,0,-1,-1\big)^T$, $\big(0,1,-1,1\big)^T$.

8.2. ФСР сопутствующей однородной системы см. в ответе к задаче 8.1; базисное решение неоднородной системы: (a) $\big(1,0\big)^T$; (b) $\big(1,0,0\big)^T$; (c) $\big(1,2,0\big)^T$; (d) $\big(1,2,0,0\big)^T$; (e) $\big(0,0,1,2\big)^T$.

8.3. Нормальное фундаментальное семейство решений системы:
(a) $\big(-2,1,1,0\big)^T$, $\big(-1,-2,0,1\big)^T$; (b) $\big(-3,2,1,0,0\big)^T$, $\big(-3,4,0,-1,1\big)^T$;

$$\text{(c) } \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ (d) } \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.4. Общее решение системы:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 3\\ -4\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -3\\ 2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ -2\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + c^1\begin{pmatrix} 1\\ -3\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + c^2\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ -2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + c^3\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 0\\ -3\\ 0\\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -2\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + c^1\begin{pmatrix} -3\\ 2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + c^2\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 0\\ -2\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + c^3\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 0\\ -2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.5. (a) $\begin{cases} x^1 + x^2 = 0,\\ -2x^1 + x^3 = 0,\\ -3x^1 + x^4 = 0; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -4x^1 + 6x^2 + 5x^3 = 0,\\ -7x^1 + 8x^2 + 5x^4 = 0; \end{cases}$
(c) $13x^1 - 4x^2 + 38x^3 - 31x^4 = 0.$

8.6. (a) $\begin{cases} x^1 - 2x^2 = 0,\\ x^2 - x^3 = 0,\\ x^4 = 0,\\ x^2 + x^5 = 0; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^1 - 3x^2 + x^3 = 0,\\ x^1 - 2x^2 + x^4 = 0,\\ -3x^1 + 7x^2 + x^5 = 0; \end{cases}$
(c) $\begin{cases} 4x^1 - 9x^2 + x^3 + 3x^4 = 0,\\ -10x^1 + 21x^2 - 7x^4 + x^5 = 0; \end{cases}$ (d) $2x^1 - 3x^2 - 2x^3 + x^4 - x^5 = 0.$

9.1. $\overrightarrow{BC} = (1;1)$, $\overrightarrow{CD} = (0;1)$, $\overrightarrow{DE} = (-1;0)$, $\overrightarrow{EF} = (-1;-1)$, $\overrightarrow{BD} = (1;2)$, $\overrightarrow{CF} = (-2;0)$, $\overrightarrow{CE} = (-1;1)$.

9.2. $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y} = -2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

9.3. $\boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3$.

9.4. $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3)/3$.

9.5. $\left(\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|},\ \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}\right)^T.$

9.6. Указание: пусть $ABCD$ — данный тетраэдр. В косоугольной системе координат с началом A и базисными векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ найдите сначала координаты середин рёбер, а затем середин отрезков, соединяющих середины скрещивающихся рёбер.

9.7. $\left(\dfrac{19a}{21}, \dfrac{19b}{21}\right)$.
9.8. $\left(\dfrac{5a}{11}, \dfrac{a}{2}, \dfrac{6a}{11}\right)$.
9.9. (a) 3; (b) $-3\sqrt{3}$; (c) 0; (d) -6
9.10. (a) $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = (3; -2; 5)$; (b) $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = -\sqrt{38}$.
9.11. (a) 0; (b) 15; (c) 9; (d) -18.
9.12. (a) $(44; -25; 13)$; (b) $(-7; -5; 3)$; (c) $(-7; -7; -7)$; (d) $(11; 8; 10)$.
9.13. $\boldsymbol{c} = -16\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$.
9.14. (a) $2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$; (b) $-[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + 2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] - [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$.
9.15. (a) $(-41; 29; 5)$; (b) $(-25; 1; -15)$.
9.16. (a) -233, левая; (b) -12, левая; (c) 0, компланарны; (d) 9, правая.
9.18. $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.
9.19. $\arccos(1/6)$.
9.20. $\boldsymbol{x} = \dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = \dfrac{[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$.
10.1.

(a) $2x + 5y = 29$;
(b) $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-1}{3}$;
(c) $\dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y-3}{-7}$;
(d) $\begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = 4 - 5t; \end{cases}$
(e) $\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -2; \end{cases}$
(f) $2x - 5y = 61$;
(g) $11x + 5y = -34$;
(i) $5x - 2y = 29$;
(j) $3x - 7y = 24$.

10.2. $d(A, a) = 2$, $\delta(A, a) = -2$, $d(B, a) = \delta(B, a) = 3$. Отрезок $[AB]$ пересекает прямую a.
10.3. (a) $r = 1/\sin\varphi$, $0 < \varphi < \pi$; (b) $r = 1/\cos\varphi$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$; (c) $r = -1/\cos\varphi$, $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$; (d) $r = 1/(\cos\varphi + \sin\varphi)$.
10.4. Вершины $(1; -3)$, $(-2; 5)$, $(5; -9)$, $(8; -17)$. Уравнения сторон $8x + 3y = 13$, $2x + y = -1$, уравнение диагонали $11x + 5y = 3$.
10.5. Вершины $(2; 1)$, $(4; 2)$, $(-1; 7)$, $(1; 8)$. Уравнения сторон $2x + y = 5$, $2x + y = 10$, уравнение диагонали $x + y = 6$.
10.6. $x = 2$, $x = 3y = -13$. [Указание: условию задачи удовлетворяют две прямые, одна из которых проходит через точку M и середину отрезка PQ, а другая проходит через точку M параллельно отрезку PQ.]
10.7. Стороны: AC: $4x - 2y = 0$, AB: $x - 8y + 15 = 0$, BC: $7x + 4y - 75 = 0$. Медианы, проведённые к сторонам AC: $x + 2y - 15 = 0$, AB: $x - 5 = 0$, BC: $3x - 4y + 5 = 0$. Высоты, проведённые к сторонам AC: $x + 2y - 15 = 0$, AB: $8x + y - 50 = 0$, BC: $4x - 7y + 10 = 0$. Серединные перпендикуляры сторон AC: $x + 2y - 15 = 0$, AB: $16x + 2y - 85 = 0$, BC: $8x - 14y + 35 = 0$. Ортоцентр $(17/3, 14/3)$. Центроид $(5, 5)$. Центр описанной окружности $(14/3, 31/6)$.
10.8. (a) $P(-1; 0)$, $S(3; -6)$, $d = 2\sqrt{13}$; (b) $P(16/5; -3/5)$, $S(22/5; -11/5)$.
10.9. $3x - y + 9 = 0$, $3x + y + 9 = 0$.
10.10. $29x - 2y + 33 = 0$.
11.1. (a) $3x + 5y + 5z = -4$; (b) $6x + 14y - 23z + 98 = 0$; (c) $2y + 3z = 3$; (d) $33x - 15y - 57z = 117$, $33x - 15y - 57z = 114$; (e) $x + 3y - 2z = 19$; (f) $5x + 3z = -31$.
11.2. (a) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{n}$; (b) $(x - x_0)/A = (y - y_0)/B = (z - z_0)/C$; (c) $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}) = 0$; (d) $a_x(x - x_1) + a_y(y - y_1) + a_z(z - z_1) = 0$;

(e) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$; (f) $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0$; (g) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0$;
(h) $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$; (i) $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$; (j) $\begin{vmatrix} x-x_0 & a_x & b_x \\ y-y_0 & a_y & b_y \\ z-z_0 & a_z & b_z \end{vmatrix} = 0.$

11.3. Прямая l_1 параллельна плоскости π; прямая l_2 лежит в плоскости π; прямая l_3 пересекается с плоскостью π в точке $(3, 4, 6)$.

11.4. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -39 \end{pmatrix}$, $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y-2}{-11} = \dfrac{z-3}{-39}$.

11.5. $(2; 3; -3)$.

11.6. $(5; -3; 5)$.

11.7. $P(3; 3; -1)$, $S(8; 6; -7)$, $d = \sqrt{70}$.

11.8. $P(1; 2; 3)$, $S(-1; -1; 13)$, $d = \sqrt{113}$.

11.9. Точки пересечения $(-7; -2; 1)$, $(-7; 0; 3)$, общий перпендикуляр $\dfrac{x+7}{0} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ или $\dfrac{x+7}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{1}$, расстояние $2\sqrt{2}$.

11.10. $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z}{1}$, точки пересечения $(2; 8; 1)$ и $(5; 15; 2)$.

11.11. $3x - 8y + 19z + 16 = 0$.

12.1. (a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$; (b) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; (c) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$; (d) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; (e) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$; (f) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; (g) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{1} = 1$; (h) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$; (i) $\dfrac{x^2}{13} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ или $\dfrac{x^2}{117/4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; (j) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$.

12.2. $a = 5$, $b = 3$, $F_{1,2}(\pm 4; 0)$, $\varepsilon = 4/5$, $x = \pm 25/4$.

12.3. (a) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ или $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$; (b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; (c) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$; (d) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$; (e) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$; (f) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$; (g) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; (h) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$; (i) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

12.4. (a) $\sqrt{2}$; (b) $\dfrac{1}{\varepsilon^2} + \dfrac{1}{\varepsilon'^2} = 1$.

12.5. (a) $F_{1,2}(\pm 5; 0)$, $a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = 5/3$, $4x \pm 3y = 0$, $x = \pm 9/5$; (b) $F_{1,2}(0; \pm 5)$, $a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = 5/4$, $4x \pm 3y = 0$, $y = \pm 16/5$.

12.6. (a) $y^2 = 9x$; (b) $y^2 = -9x$.

12.7. (a) $F(6; 0)$, $x + 6 = 0$; (b) 12; (c) $y^2 - 4x - 4y + 28 = 0$.

12.8. (a) $A(2; 0)$, $p = 2$, $x = 1$; (b) $A(0; 2)$, $p = 1/2$, $4y = 9$.

12.9. (a) $r = \dfrac{16}{5 - 3\cos\varphi}$; (b) $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$ (c) $r = \dfrac{3}{1 - \cos\varphi}$

12.10. (a) $y^2 = 3x$; (b) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$; (c) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$.

12.11. $x = \dfrac{ab\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$, $y = \dfrac{ab\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

12.12. 16.
12.13. $5x + 12y + 10 = 0$, $x = 2$.
12.14. (1) $\sqrt{3}/2$; (2) $\sqrt{2}/2$; (3) $\sqrt{3}/3$; (4) $1/2$.
12.15. $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$.
12.16. $2x - y = 12$, $2x - y = -12$, $d = 24\sqrt{5}/5$.
12.17. 18.
12.18. $\dfrac{x^2}{17} + \dfrac{y^2}{8} = 1$. [Указание: воспользуйтесь свойством, полученным в примере 12.1 на с. 188.]
12.19. $2x + 11y = 10$.
12.20. $y = 4$, $16x - 15y - 100 = 0$.
12.21. $\varepsilon = \sqrt{3}$.
12.22. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$.
12.23. $\dfrac{x^2}{60} - \dfrac{y^2}{40} = 1$.
12.24. $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$.
12.25. $x = 1$, $5x - 2y + 3 = 0$.
12.26. $x + 2y = 4$, $x + 2y = -4$, $d = 8\sqrt{5}/5$.
12.27. $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$.
12.28. $d = 17\sqrt{10}/10$.
12.29. $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.
12.30. $2x + 11y + 6 = 0$.
12.31. $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.
12.32. $x + y + 2 = 0$.
12.33. $2x - y = 16$.
12.34. $3x - y + 3 = 0$, $3x - 2y + 12 = 0$.
12.35. $d = 13\frac{5}{13}$.
12.36. $y = 18$.
13.1. Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ и обратная матрица

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix},$$

столбцы координат векторов

$$X'_{\boldsymbol{a}} = C^{-1}X_{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ -40 \end{pmatrix},$$

$$X_{\boldsymbol{b}} = CX'_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\boldsymbol{a} = 51\boldsymbol{e}'_1 - 40\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{b} = 10\boldsymbol{e}_1 + 17\boldsymbol{e}_2$.
13.2. Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ и обратная матрица:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = 5x' - 8y' + 4, \\ y = -2x' + 3y' - 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -3x - 8y - 4, \\ y' = -2x - 5y - 2; \end{cases}$$

координаты точки O во второй системе $(-4; -2)$; связь базисных векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = -3\boldsymbol{e}_1' - 2\boldsymbol{e}_2', \quad \boldsymbol{e}_2 = -8\boldsymbol{e}_1' - 5\boldsymbol{e}_2';$$

уравнение прямой во второй системе координат $26x' - 41y' + 21 = 0$.

13.3. Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$ и обратная матрица:

$$C = \begin{pmatrix} \cos 135^\circ & -\sin 135^\circ \\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') - 3, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') + 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y) - 4\sqrt{2}, \\ y' = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y) + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Координаты точки O во второй системе $(-4\sqrt{2}; \sqrt{2})$; связь базисных векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1' + \boldsymbol{e}_2'), \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1' - \boldsymbol{e}_2').$$

Уравнение прямой l во второй системе координат $x' = 0$; уравнение прямой m в первой системе координат $x - 3y + 18 = 0$.

13.4. *Решение.* Пусть $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ — ортонормированный базис, полученный из исходного ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ поворотом на угол φ. Тогда координаты векторы $\boldsymbol{a}'$ в базисе $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ равны соответствующим координатам вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, т.е. $\boldsymbol{a}' = x\boldsymbol{i}' + y\boldsymbol{j}'$. Подставляя сюда выражения $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ через $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, получим требуемые формулы.

13.6. $x' = 2x + y - 3$, $y' = x + 2y + 1$.

13.6. $x' = x - 3y + 2$, $y' = 2x + 5y - 1$.

14.1. (См. рис. II.) Инварианты: $S = 13$, $\delta = 36$, $\Delta = -1296$. Эллипс $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$, эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}/3$, в канонической системе координат координаты фокусов $F_{1,2}(\pm\sqrt{5}; 0)$, уравнения асимптот $\sqrt{5}x' \pm 9 = 0$. Координаты начала канонической системы координат $O'(-3; 2)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') - 3, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') + 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x - y + 8), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 1). \end{cases}$$

Координаты фокусов: $F_1(-5; 3)$, $F_2(-1; 1)$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $x + 2y = 1$, Oy: $2x - y + 8 = 0$. Уравнения директрис: d_1: $2x - y + 17 = 0$, d_2: $2x - y - 1 = 0$.

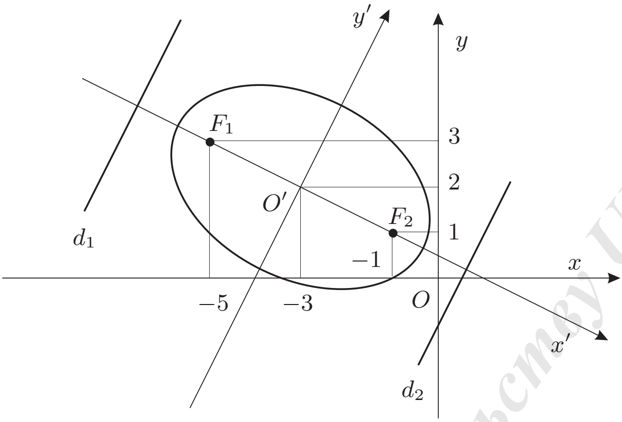


Рис. II. К задаче 14.1

14.2. Инварианты: $S = 50$, $\delta = 225$, $\Delta = -10125$. Эллипс $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$, эксцентриситет $\varepsilon = 2\sqrt{2}/3$, в канонической системе координат координаты фокусов $F_{1,2}(\pm 2\sqrt{2}; 0)$, уравнения асимптот $2\sqrt{2}x' \pm 9 = 0$. Координаты начала канонической системы координат $O'(1; -1)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y') + 1, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(2x' - y') - 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y + 2), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x + y + 4). \end{cases}$$

Координаты фокусов: $F_1\big(1 - 2/\sqrt{5}; -1 - 6/\sqrt{5}\big)$, $F_2\big(1 + 2/\sqrt{5}; -1 + 6/\sqrt{5}\big)$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $3x - y = 4$, Oy: $x + 3y + 8 = 0$. Уравнения директрис: $2x + 6y + 4 \pm 9\sqrt{5} = 0$.

14.3. (См. рис. III.) Инварианты: $S = -10$, $\delta = -75$, $\Delta = -4500$. Гипербола $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{12} = 1$, эксцентриситет $\varepsilon = 2$, в канонической системе координат координаты фокусов $F_{1,2}(\pm 4; 0)$, уравнения асимптот $x' \pm 1 = 0$. Координаты начала канонической системы координат $O'(-3; -2)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 3, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') - 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y + 7), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y - 4). \end{cases}$$

Координаты фокусов: $F_1\big(-3 - 4/\sqrt{5}; -2 - 8/\sqrt{5}\big)$, $F_2\big(-3 + 4/\sqrt{5}; -2 + 8/\sqrt{5}\big)$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $2x - y + 4 = 0$, Oy: $x + 2y + 7 = 0$. Уравнения директрис: d_1: $x + 2y + 7 + \sqrt{5} = 0$, d_2: $x + 2y + 7 - \sqrt{5} = 0$. Уравнения асимптот: $x\big(\sqrt{3} + 2\big) + y\big(2\sqrt{3} - 1\big) + 7\sqrt{3} + 4 = 0$, $x\big(\sqrt{3} - 2\big) + y\big(2\sqrt{3} + 1\big) + 7\sqrt{3} - 4 = 0$.

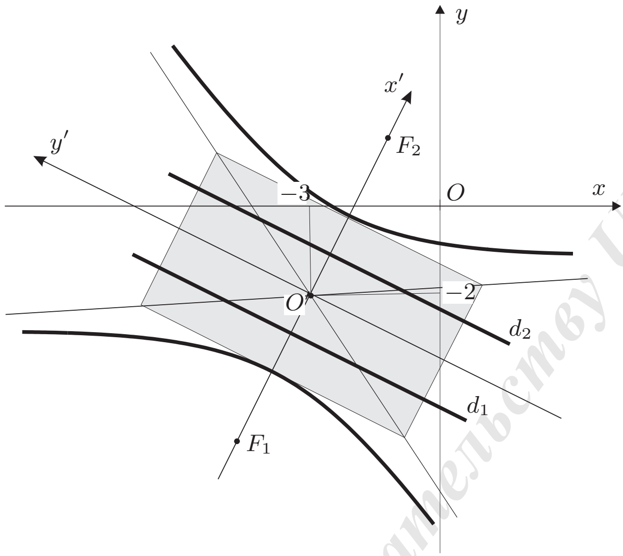


Рис. III. К задаче 14.3

14.4. Инварианты: $S = -7$, $\delta = -144$, $\Delta = -20736$. Гипербола $\dfrac{x'^2}{9} - \dfrac{y'^2}{16} = 1$, эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}/3$, в канонической системе координат координаты фокусов $F_{1,2}(\pm 5; 0)$, уравнения асимптот $5x' \pm 9 = 0$. Координаты начала канонической системы координат $O'(2; 3)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') + 2, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 8), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y + 1). \end{cases}$$

Координаты фокусов: $F_1(2 - \sqrt{5}; 3 - 2\sqrt{5})$, $F_2(2 + \sqrt{5}; 3 + 2\sqrt{5})$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $2x - y - 1 = 0$, Oy: $x + 2y - 8 = 0$. Уравнения директрис: d_1: $x + 2y - 8 - 9/\sqrt{5} = 0$, d_2: $x + 2y - 8 + 9/\sqrt{5} = 0$. Уравнения асимптот: $2x + y - 7 = 0$, $2x - 1y + 29 = 0$.

14.5. Инварианты: $S = 14$, $\delta = -576$, $\Delta = 0$. Пара пересекающихся прямых $16x'^2 - 9y'^2 = 0$ или $4x' \pm 3y' = 0$. Координаты начала канонической системы координат (координаты точки пересечения прямых) $O'(-3; 4)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') - 3, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') + 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 1), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x + y - 7). \end{cases}$$

Уравнения канонических осей координат: Ox: $x - y + 7 = 0$, Oy: $x + y - 1 = 0$. Уравнения прямых: $7x + y + 17 = 0$, $x + 7y - 25 = 0$.

14.6. Инварианты: $S = 50$, $\delta = 225$, $\Delta = 0$. Пара мнимых пересекающихся прямых $9x'^2 + y'^2 = 0$. Координаты начала канонической системы координат (координаты точки пересечения прямых) $O'(-1; 1)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 1, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 1), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y - 3). \end{cases}$$

Уравнения канонических осей координат: Ox: $2x - y + 3 = 0$, Oy: $x + 2y - 1 = 0$.

14.7. Инварианты: $S = 13$, $\delta = 36$, $\Delta = 1296$. Мнимый эллипс $\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{4} = -1$. Координаты начала канонической системы координат (координаты точки пересечения прямых) $O'(-1; 1)$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') + 2, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y') - 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y - 12), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x + y + 1). \end{cases}$$

Уравнения канонических осей координат: Ox: $2x + y + 1 = 0$, Oy: $x - 2y - 12 = 0$.

14.8. (См. рис. IV.) Инварианты: $S = 25$, $\delta = 0$, $\Delta = -250000$. Парабола $y'^2 = 8x$. Координаты начала канонической системы координат (координаты вершины параболы) $O'(2; 3)$. В канонической системе координат координаты фокуса $F(2; 0)$, уравнение директрисы $x + 2 = 0$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}(-3x' - 4y') + 2, \\ y = \dfrac{1}{5}(4x' - 3y') + 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(-3x + 4y - 6), \\ y' = \dfrac{1}{5}(-4x - 3y + 17). \end{cases}$$

Координаты фокуса $F(4/5; 23/5)$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $4x + 3y - 17 = 0$, Oy: $3x - 4y + 6 = 0$. Уравнение директрисы $3x - 4y - 4 = 0$.

14.9. (См. рис. V.) Инварианты: $S = 25$, $\delta = 0$, $\Delta = -140625$. Парабола $y'^2 = 6x$. Координаты начала канонической системы координат (координаты вершины параболы) $O'(-1; -3)$. В канонической системе координат координаты фокуса $F(3/2; 0)$, уравнение директрисы $2x + 3 = 0$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}(4x' + 3y') - 1, \\ y = \dfrac{1}{5}(-3x' + 4y') - 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(4x - 3y) - 1, \\ y' = \dfrac{1}{5}(3x + 4y) + 3. \end{cases}$$

Координаты фокуса $F(1/5; -39/10)$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $4x - 3y - 5 = 0$, Oy: $3x + 4y + 15 = 0$. Уравнение директрисы $4x - 3y + 5 = 0$.

14.10. Инварианты: $S = 5$, $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $K = -100$. Пара параллельных прямых $y'^2 = 4$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') + a, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') + (2a + 7); \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 5a - 14), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y - 7), \end{cases}$$

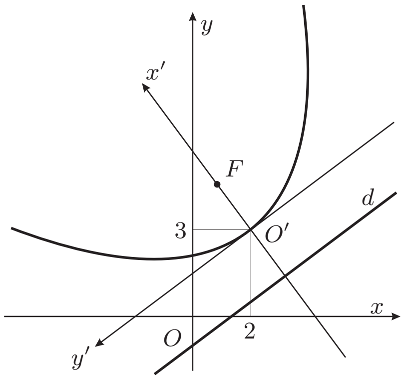


Рис. IV. К задаче 14.8

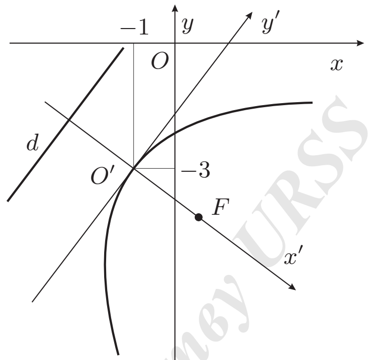


Рис. V. К задаче 14.9

где a — произвольная постоянная. Уравнения прямых, образующих квадрику, $2x - y + 7 - 2\sqrt{5} = 0$, $2x - y + 7 + 2\sqrt{5} = 0$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $2x - y + 7 = 0$; Oy: $x + 2y - 5a - 14 = 0$.

14.11. Инварианты: $S = 5$, $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $K = 0$. Пара совпадающих прямых $y'^2 = 0$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y') - 2a, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-3x' + 2y') + (3a - 5); \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2x - 3y + 13a - 15), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3x + 2y + 10), \end{cases}$$

где a — произвольная постоянная. Уравнения прямых $3x + 2y + 10 = 0$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $3x + 2y + 10 = 0$; Oy: $2x - 3y + 13a - 15 = 0$.

14.12. Инварианты: $S = 5$, $\delta = 0$, $\Delta = 0$, $K = 625$. Пара совпадающих прямых $y'^2 + 25 = 0$. Формулы замены координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}(4x' - 3y') + 4a, \\ y = \dfrac{1}{5}(3x' + 4y') + (3a - 2); \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}(4x + 3y + 6 - 25a), \\ y' = \dfrac{1}{5}(-3x + 4y + 8), \end{cases}$$

где a — произвольная постоянная. Уравнение квадрики $(3x - 4y - 8)^2 + 25 = 0$. Уравнения канонических осей координат: Ox: $3x - 4y - 8 = 0$; Oy: $4x + 3y - 25a + 6 = 0$.

15.1.

(a) Эллипсоид вращения с осью Ox при $\lambda > 0$ (в частности, единичная сфера при $\lambda = 1$); однополостный гиперболоид вращения с осью Ox при $\lambda < 0$; круговой цилиндр с осью Ox при $\lambda = 0$.

(b) Эллипсоид вращения с осью Ox при $\lambda > 0$ (в частности, единичная сфера при $\lambda = 1$); двуполостный гиперболоид вращения с осью Ox при $\lambda < 0$; пара мнимых плоскостей, пересекающихся по оси Ox при $\lambda = 0$.

(c) Однополостный гиперболоид вращения с осью Oz при $\lambda > 0$; двуполостный гиперболоид вращения с осью Oz при $\lambda > 0$; конус с осью Oz при $\lambda = 0$.

(d) Эллипсоид вращения с осью Ox при $\lambda > 0$ (в частности, единичная сфера при $\lambda = 1$); две параллельные плоскости $x = \pm 1$ при $\lambda = 0$; двуполостный гиперболоид вращения с осью Ox при $\lambda < 0$.
(e) Эллипсоид вращения с осью Ox при $\lambda > 0$ (в частности, единичная сфера при $\lambda = 1$); две совпадающих плоскости $x = 0$ при $\lambda = 0$; однополостный гиперболоид вращения с осью Ox при $\lambda < 0$.
(f) Эллиптический параболоид при $\lambda > 0$ (в частности, параболоид вращения при $\lambda = 1$); гиперболический параболоид при $\lambda < 0$; параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox, при $\lambda = 0$.
(g) Эллиптический параболоид вращения с осью Oz при $\lambda \neq 0$; плоскость $z = 0$ при $\lambda = 0$.
(h) Эллиптический параболоид вращения с осью Oz при $\lambda \neq 0$; пара мнимых плоскостей, пересекающихся по оси Oz при $\lambda = 0$.
(i) Эллиптический параболоид с осью Oz при $\lambda \neq 0$ (в частности, параболоид вращения при $\lambda = 1$); гиперболический параболоид при $\lambda < 0$; две совпадающих плоскости $x = 0$ при $\lambda = 0$.
(j) Круговой цилиндр с осью Oz при $\lambda > 0$; пара мнимых плоскостей, пересекающихся по оси Oz при $\lambda = 0$; пустое множество при $\lambda < 0$.
(k) Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, при $\lambda \neq 0$; пара пересекающихся по оси Oz плоскостей при $\lambda = 0$.
(l) Эллиптический цилиндр с осью Oz при $\lambda > 0$ (в частности, круговой цилиндр при $\lambda = 1$); гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, при $\lambda < 0$; пара совпадающих плоскостей $y = 0$ при $\lambda = 0$.

15.2. (a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 5$; (b) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$.
15.3. (a) $C(-3; 2; 1)$, $R = 2$; (b) $C(3; 3; -2)$, $R = 5$.
15.4. (a) поверхность четвёртого порядка $16(x^2+y^2) = z^4$; (b) эллиптический параболоид $4x = z^2 + y^2$.
15.5. (a) двуполостный гиперболоид $x^2 - y^2 - z^2 = 4$; (b) однополостный гиперболоид $x^2 - y^2 + z^2 = 4$.
15.6. Уравнение поверхности вращения, получаемой вращением линии $F(x, y) = 0$ вокруг оси Oy, получается заменой x на $\sqrt{x^2+z^2}$. Из уравнения $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ получаем $(x^2 + z^2) + y^2 + 12 = 8\sqrt{x^2+z^2}$ или $\left(x^2 + y^2 + z^2 + 12\right)^2 = 64(x^2 + z^2)$.
15.7. $x^2(y^2 + z^2) = 1$; $y^2(x^2 + z^2) = 1$.
15.8.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -36 \\ 7 \\ 75 \end{pmatrix},$$

$8x + 9y + 3z + 16 = 0$;

$$(2)\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -21 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 28 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$49x - y + 25z - 25 = 0$.

15.9. Пара прямолинейных образующих, проходящих через точку $(3; -4; 0)$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

15.10. Пара параллельных прямых $3x+4y-25=0$, $3x+4y+25=0$. Это две прямолинейные образующие, принадлежащие различным семействам и проходящие через диаметрально противоположные точки $(3; 4; 0)$ и $(-3; -4; 0)$ горлового эллипса.

15.11.

(1) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -15 \\ -20 \\ 48 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 48 \end{pmatrix},$$
$32x-36y-5z+20=0$.

(2) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix},$$
$8x+2y-z-6=0$.

15.12. Пара прямолинейных образующих, проходящих через точку $(4; -2; -5)$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1979. — 512 с.
2. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. — М.: Наука, 1968. — 912 с.
3. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Физматлит, 2005. — 304 с.
4. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Физматлит, 2004. — 496 с.
5. Бортаковский А. С., Пантелеев А. В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2005. — 496 с.
6. Винберг Э. Б. Курс алгебры. — М.: Факторил Пресс, 2001. — 544 с.
7. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Физматлит, 2005. — 240 с.
8. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 320 с.
9. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука. Физматлит, 1999. — 224 с.
10. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — М.: Наука. Физматлит, 1999. — 296 с.
11. Кадомцев С. Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2003. — 160 с.
12. Ким Г. Д., Крицков Л. В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Т. I. — М.: Планета знаний, 2007. — 469 с.
13. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1980. — 240 с.
14. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. — М.: Физматлит, 1994. — 320 с.
15. Моденов П. С. Аналитическая геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1967. — 698 с.
16. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
17. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1979. — 336 с.
18. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Лань, 2003. — 336 с.

Предметный указатель

Оглавление