МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. Ломоносова

Ф И З И Ч Е С К И Й   Ф А К У Л Ь Т Е Т

Н.Н. Нефедов, В.Ю. Попов, В.Т. Волков

Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Примеры и приложения.

Учебно-методическое пособие
к курсу лекций «Дифференциальные уравнения»

Москва – 2010

Введение.

Настоящее пособие является вводной частью курса лекций, читаемого на физическом факультете МГУ. Основной целью этого пособия является формирование языка общения со студентами, изучающими этот курс, а также иллюстрация введенных понятий на примерах и приложениях.

§1. Понятие дифференциального уравнения. Основные определения.

<u>Определение 1</u>. ***Дифференциальным уравнением*** **(ДУ)** называют уравнение, в котором неизвестная функция находится под знаком производной или дифференциала.

<u>Определение 2</u>. Если неизвестная функция зависит от одной переменной, то уравнение называют ***обыкновенным дифференциальным уравнением*** **(ОДУ).**

Примеры.

1) Задачу отыскания всех первообразных $y(x)$ для заданной функции $f(x) \in C\left[a,b\right]$ можно записать в виде ОДУ $y' \equiv \dfrac{dy}{dx} = f(x)$. Как известно из курса математического анализа, это уравнение имеет на отрезке $\left[a,b\right]$ однопараметрическое семейство решений вида $y(x,C) = F\left(x\right) + C$, где $F\left(x\right)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а $C \in R$ – вещественный параметр.

2) Замечательным свойством функции $y(x) = e^x$ является равенство ее своей производной, что позволяет для этой функции записать уравнение $y' = y$. Заметим, что решением этого ОДУ является любая функция вида $y(x) = Ce^x$. Проверьте это самостоятельно.

3) Поскольку первая производная координаты по времени в механике называется скоростью, то ОДУ, описывающее прямолинейное равномерное движение со скоростью v, выглядит как $\dot{x} \equiv \dfrac{dx}{dt} = v$, а его решение, удовлетворяющее ***начальному условию*** $x\left(t_0\right) = x_0$, имеет вид $x\left(t\right) = x_0 + v\left(t - t_0\right)$.

4) Аналогично, ОДУ для прямолинейного равноускоренного движения с ускорением a записывается в форме $\ddot{x} \equiv \dfrac{d^2x}{dt^2} = a$, а его решение, удовлетворяющее ***начальным условиям*** $x\left(t_0\right) = x_0$, $\dot{x}\left(t_0\right) = v_0$ имеет вид $x\left(t\right) = x_0 + v_0\left(t - t_0\right) + \dfrac{a\left(t - t_0\right)^2}{2}$.

5) Если в уравнении окружности $x^2 + y^2 = R^2$ переменные x и y считать дифференцируемыми функциями $x = x\left(t\right)$, $y = y\left(t\right)$ параметра t, то после дифференцирования обеих частей равенства получится ОДУ, описывающее семейство всех окружностей с центром в начале координат:

$$xdx + ydy = 0, \qquad \text{или} \qquad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Легко проверить, что одним из решений этих уравнений является пара функций $x(t) = R\sin t$, $y(t) = R\cos t$. Очевидно, что это пара функций является также решением следующей ***системы дифференциальных уравнений***:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

6) Уравнение малых линейных свободных колебаний в системе без затухания имеет вид $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Проверьте, что его решением является функция $x(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$, или $x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)$. Убедитесь в том, что сделав замены $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, уравнению $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ можно сопоставить эквивалентную ***систему дифференциальных уравнений***

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1. \end{cases}$$

7) Уравнение малых линейных свободных затухающих колебаний имеет вид $\ddot{x} + 2\gamma_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $0 < \gamma_0 < \omega_0$. Проверьте, что его решением является функция $x(t) = e^{-\gamma_0 t}\left(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\right)$, или $x(t) = Ae^{-\gamma_0 t}\sin\left(\omega t + \varphi\right)$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma_0^2}$. Убедитесь в том, что сделав замены $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, уравнению $\ddot{x} + 2\gamma_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ можно сопоставить эквивалентную ***систему дифференциальных уравнений***

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2\gamma_0 x_2 - \omega_0^2 x_1. \end{cases}$$

<u>Общий вид ОДУ</u>. В нашем курсе мы, как правило, будем обозначать значения неизвестной функции либо буквой x, тогда независимой переменной будет t, либо буквой y, тогда независимой переменной будет x. Мы будем также использовать сокращенные обозначения

$$\vec{J}^n x = \left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x_t^{(n)}\right), \qquad \text{или} \quad \vec{J}^n y = \left(y, y', y'', \ldots, y_x^{(n)}\right).$$

В этом случае произвольное ОДУ с одной неизвестной функцией может быть записано в виде

$$F\left(t, \vec{J}^n x\right) = 0, \qquad \text{или} \qquad F\left(x, \vec{J}^n y\right) = 0$$

<u>Определение 3</u>. ***Порядком дифференциального уравнения*** называется наивысший порядок входящей в него производной.

Например, $F\left(x, \vec{J}^2 y\right) \equiv F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ – ОДУ 2-го порядка.

<u>Определение 4</u>. Уравнением, ***разрешенным относительно старшей производной,*** называется ОДУ вида

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, \vec{J}^{n-1} y\right).$$

<u>Определение 4а</u>. ОДУ, разрешенное относительно старшей производной, правая часть которого не содержит явно независимой переменной, называется ***автономным***, т.е.

$$y^{(n)}(x) = f\left(\vec{J}^{n-1} y\right).$$

<u>Определение 5</u>. ***Нормальной системой ОДУ*** называют систему дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \cdots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y'_n = f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases},$$

или, в векторной форме,

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}\left(x, \vec{y}\right),$$

где $$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \\ \cdots \\ y'_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}\left(x, \vec{y}\right) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \cdots \\ f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Замечание. Если правая часть нормальной системы ОДУ не содержит явно независимой переменной, то ее называют ***динамической системой***.

Подчеркнем характерную особенность обыкновенных дифференциальных уравнений, отличающую их от прочих уравнений, содержащих производные неизвестных функций: все неизвестные должны быть функциями одного вещественного аргумента; все они и их производные должны входить в уравнение только в виде своих значений в одной и той же переменной точке, которая также может фигурировать в уравнении.

Примеры дифференциальных уравнений, не являющихся ОДУ:

1) $\dot{x}(t) = x(2t)$;

2) $\dot{x}(t) = x(t-1)$ – уравнение с запаздывающим аргументом или дифференциально-разностное уравнение;

3) $\dot{x}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} x(\tau)\, d\tau$ – интегро-дифференциальное уравнение.

<u>Определение 6</u>. Если в ДУ неизвестная функция зависит от нескольких переменных, то такое уравнение называют ***дифференциальным уравнением в частных производных***.

Примеры дифференциальных уравнений в частных производных.

1) $\left(\vec{A}\left(\vec{r}\right), \operatorname{grad} u\left(\vec{r}\right)\right) = F\left(\vec{r}, u\right)$ – уравнение в частных производных 1-го порядка.

2) $\dfrac{\partial^2 u\left(\vec{r}, t\right)}{\partial t^2} = \operatorname{div}\left(k\left(\vec{r}, u, t\right) \operatorname{grad} u\left(\vec{r}, t\right)\right) + F\left(\vec{r}, u, t\right)$ – уравнение колебаний (волновое уравнение) – уравнение в частных производных 2-го порядка.

3) $\dfrac{\partial u\left(\vec{r}, t\right)}{\partial t} = \operatorname{div}\left(k\left(\vec{r}, u, t\right) \operatorname{grad} u\left(\vec{r}, t\right)\right) + F\left(\vec{r}, u, t\right)$ – уравнение диффузии, (теплопроводности, Шрёдингера и т.д.) – уравнение в частных производных 2-го порядка.

4) $\operatorname{div}\left(k\left(\vec{r}, u\right) \operatorname{grad} u\left(\vec{r}\right)\right) = -F\left(\vec{r}, u\right)$ – уравнение Пуассона (Лапласа, если $F \equiv 0$) – уравнение в частных производных 2-го порядка.

5) $\dfrac{\partial f\left(\vec{r},\vec{v},t\right)}{\partial t}+\vec{v}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{r}}+\dfrac{e}{m}\left(\vec{E}+\dfrac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right]\right)\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}=0$ – уравнение Власова-Максвелла – уравнение в частных производных 1-го порядка.

§2. Общее решение дифференциального уравнения, общий интеграл.

Определение 7. ***Решением ДУ*** называют функцию, или совокупность функций, обращающих уравнение в тождество.

Определение 8. ***Частное решение ДУ*** – конкретная функция, удовлетворяющая уравнению.
Например, для ОДУ $y''(x)+4y(x)=0$ частными решениями будут функции $y_1=\pi\sin 2x$, $y_2=\sqrt{2}\cos 2x$, $y_3=3\sin\left(2x+\pi/4\right)$, $y_4=4\cos\left(2x-\pi/6\right)$ и т.д.

Множество решений ОДУ n-го порядка зависит от n произвольных постоянных.
Например, множество решений уравнения $y'=f(x)$ есть $y=F(x)+C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная функции для $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Множество решений *уравнения в частных производных* 1-го порядка определено с точностью до произвольной функции.
Например, множеством решений уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ является любая функция вида $u=f(x+y)$, где f – произвольная дифференцируемая функция, например $u=(x+y)^m$, $u=\cos(x+y)$, $u=\sin e^{x+y}$ и т.д. Проверьте это самостоятельно.

Определение 9. ***Общим решением*** дифференциального уравнения называется совокупность всех его решений.
Например, общее решение ОДУ $y''(x)+4y(x)=0$ может быть записано в виде $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$, или (что одно и то же) $y=A\sin\left(2x+\varphi\right)$, где C_1, C_2, A, φ – произвольные постоянные.

Определение 10. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называют ***интегрированием ОДУ***.

Определение 11. Если уравнение $\Phi\left(x,y,\vec{C}\right)=0$, где $\vec{C}=\left(C_1,C_2,\ldots,C_n\right)$ – вектор произвольных параметров, определяет все множество решений соответствующего ДУ, то его называют ***общим интегралом*** данного ДУ, а полученное из него параметрическое семейство решений также называют ***общим решением***.

Замечание. Определенное в 11 общее решение является более узким, по сравнению с 9**,** поскольку возможны еще ***особые решения,*** которые не входят в это семейство ни при каких значениях параметров.

Пример. Рассмотрим уравнение $\frac{dy}{dx}=y^{\frac{2}{3}}$. Проверьте, что его общим решением является функция $y=\left(\frac{x+C}{3}\right)^3$, а функция $y=0$ будет особым решением. Графическая иллюстрация приведена на рис. 1.

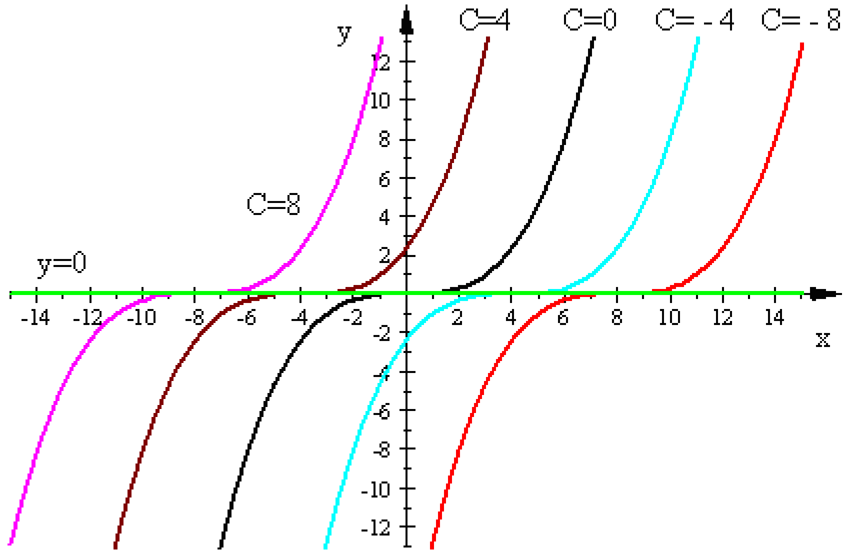


Рис. 1. $\frac{dy}{dx}=y^{\frac{2}{3}}$, $y=\left(\frac{x+C}{3}\right)^3$, $y=0$

В ряде случаев задача интегрирования ОДУ первого порядка сводится к исследованию соответствующей неявной функции с помощью первого интеграла.

Определение 12. Функция $F(x,y)$, определенная в области $G\subset R^2$ и не равная в ней постоянной функции, называется ***первым интегралом ОДУ*** первого порядка, если для любого решения $y=\varphi(x)$ этого уравнения, график которого лежит в области G, и для любых $x\in(a,b)$ существует такая постоянная C такая, что $F(x,\varphi(x))=C$.

Определение первого интеграла естественным образом переносится на системы, например, на динамические системы.

Определение 13. Функция $V(\vec{x})$, $\{V:R^n\to R\}$, определенная и непрерывная в области $D\subset R^n$ и не равная постоянной, называется ***первым интегралом динамической системы***

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=f(\vec{x})$$

в области D, если для любого решения $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ этой системы существует постоянная C такая, что $V\left(\vec{x}(t)\right)=C$ для всех $t\in(a,b)$.

Аналогично формулируется определение первого интеграла для уравнения $n-$го порядка.

Определение 14. Если для любого решения $y=\varphi\left(x\right)$ ОДУ n-го порядка существует функция $F\left(x,\vec{J}^{(p)}y\right)$ такая, что $F\left(x,\vec{J}^{(p)}\varphi(x)\right)=const$ при всех x, то такая функция $F\left(x,\vec{J}^{(p)}y\right)$ называется ***первым интегралом*** ОДУ.

В физических задачах первыми интегралами могут быть энергия, импульс, момент инерции, масса, заряд и т.д. Некоторые примеры даны в таблице.

Уравнение	*Общий интеграл*	*Общее решение*	*Частное решение*	*Первый интеграл* $F = const$
$y' = f(x)$	$y - \int f(x)dx - C = 0$	$y = \int f(x)dx + C$	$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$	$y - \int f(x)dx$
$y' = -\dfrac{x}{y}$	$y^2 + x^2 - C = 0$	$y^2 + x^2 = C$	$y^2 + x^2 = 1$	$y^2 + x^2$
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$x - C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t = 0$ или $x - A\sin(\omega_0 t + \varphi) = 0$	$x = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$ или $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$	$x = \cos\omega_0 t$	$\left(\dot{x}\right)^2 + \omega_0^2 x^2$

<u>Об интегрировании ОДУ в квадратурах</u>. Выражение общего решения или полного интеграла через элементарные функции и интегралы от них (берущихся или не берущихся в элементарных функциях) называют ***интегрированием данного ОДУ в квадратурах***. Интегрирование в квадратурах допускают лишь уравнения некоторых простейших типов. Большинство же ОДУ можно решать только приближенно или исследовать их качественными методами, то есть методами, позволяющими выяснять свойства решений без явного их отыскания. Качественные и приближенные методы составляют основное содержание современной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Движение материальной точки массы m под действием силы $\vec{F}(\vec{r}) = \{F_x(x), F_y(y), F_z(z)\}$, которая зависит только от положения точки (не зависит явно от времени), а каждая декартова проекция силы зависит только от соответствующей проекции радиуса–вектора. Уравнения движения имеют вид

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$$

или в координатах

$$m\ddot{x} = F_x(x), \qquad m\ddot{y} = F_y(y), \qquad m\ddot{z} = F_z(z).$$

Общее решение этих уравнений может быть получено в квадратурах. Рассмотрим, например первое из них и проделаем следующие выкладки

$$m\ddot{x} = F_x(x)$$

$$\dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{m}F_x(x)\dot{x} \;=>\; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{m}F_x(x)\frac{dx}{dt} \;=>\; d\left(\dot{x}\right)^2 = \frac{2}{m}F_x(x)dx \;=>\; \left(\dot{x}\right)^2 = \frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1$$

$$\dot{x} = \pm\left(\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1\right)^{1/2} \;=>\; \frac{dx}{dt} = \pm\left(\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1\right)^{1/2} \;=>\; dt = \pm\frac{dx}{\left(\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1\right)^{1/2}}$$

$$t + C_2 = \pm\int\frac{dx}{\left(\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1\right)^{1/2}}.$$

Если заданы начальные условия

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0,$$

то решение задачи выражается в квадратурах и имеет вид

$$t-t_0=\pm\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\left(\frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{\xi}F_x(\eta)\,d\eta+\dot{x}_0^2\right)^{1/2}}\quad.$$

Пример 2. Решение уравнения $y'=y^2-x$ нельзя записать в виде интеграла от элементарной функции, т.е. в квадратурах.

§3. Постановка основных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дополнительные условия.

Наряду с ОДУ для постановки задач используют ***начальные*** и ***граничные*** условия, количество и вид которых определяются «физической» постановкой задачи.

1⁰. Начальная задача (задача Коши) (Огюстен Луи Коши (1789-1857) - французский математик):

$$y^{(n)}(x)=f\left(x,\vec{J}^{\,n-1}y\right)$$

$\vec{J}^{\,n-1}y\left(x_0\right)=\vec{Y}^0$ или $y(x_0)=Y_0^0,\ y'(x_0)=Y_1^0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=Y_{n-1}^0$ – начальные условия.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=y^{\frac{2}{3}}\\&y(0)=1\end{aligned}\ .$$

Ее решение $y=\left(\dfrac{x+3}{3}\right)^3$ – существует и единственно.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=y^{\frac{2}{3}}\\&y(0)=0\end{aligned}$$

Решениями этой задачи являются функции $y=\left(\dfrac{x}{3}\right)^3$ и $y=0$, т.е. решение существует, но не единственно.

2⁰. Краевая задача *(2-х точечная)*:

$$y''(x)=f\left(x,y,y'\right),\quad x\in\left(a,b\right)$$

*граничные условия первого рода (**задача Дирихле**):* $y(a)=y_a$, $y(b)=y_b$;

*граничные условия второго рода (**задача Неймана**):* $y'(a)=y_a$, $y'(b)=y_b$;

граничные условия третьего рода: $y'(a)+\alpha y\left(a\right)=y_a$, $y'(b)+\beta y(b)=y_b$;

периодические граничные условия: $y(a)=y\left(b\right)$, $y'(a)=y'\left(b\right)$

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2y}{dx^2}=1,\quad x\in\left(0,1\right)\\&y(0)=0,\quad y(1)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad y=x\left(1-x\right)$$ – решение задачи существует и единственно.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2y}{dx^2}=1, \quad x\in\left(0,1\right)\\ y'(0)=0, \quad y'(1)=0\end{array}\right\} \quad - \text{ решение задачи не существует.}$$

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2y}{dx^2}=0, \quad x\in\left(0,1\right)\\ y'(0)=0, \quad y'(1)=0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad y=C \quad - \text{ задача имеет бесконечное множество решений.}$$

3⁰. Периодическая задача. В общем случае задача о периодических решениях – это задача о нахождении T -периодического решения уравнения $\dot{x}=f\left(t,x\right)$ с T -периодической по переменной t правой частью: $f\left(t,x\right)=f\left(t+T,x\right)$. Эта задача весьма важна в приложениях, поскольку такие решения описывают периодические колебательные процессы в реальных системах, например в механических и электрических устройствах.

4⁰. Задача Штурма-Лиувилля (краевая задача на собственные значения).

Оператором Штурма-Лиувилля называется дифференциальный оператор 2-го порядка $Ly=\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)-q(x)y$, где коэффициенты $p(x)\in C^1[a,b], \quad p(x)>0$, $q(x)\in C[a,b], \quad q(x)\geq 0$.

Поставим вопрос: при каких значениях параметра λ существует нетривиальное решение краевой задачи ($\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0, \quad \beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$)

$$\begin{cases} Ly+\lambda\rho(x)y=0 \\ \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0, \qquad \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{cases},$$

где $\rho(x)\in C[a,b], \quad \rho(x)>0$.

Такая задача называется ***краевой задачей на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля*** (сокращенно – ***задача Штурма-Лиувилля***); числа λ_n, при которых существуют нетривиальные решения, называются ***собственными значениями***, а соответствующие <u>нетривиальные</u> решения – ***собственными функциями***.

Пример. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, x\in\left(0,l\right) \\ y(0)=0, \quad y(l)=0\end{cases}.$$

Решение. В случае $\lambda=-\mu^2<0$ имеем общее решение $y(x)=C_1e^{\mu x}+C_2e^{-\mu x}$. Учитывая граничные условия, получаем единственное решение $y(x)=0$, т.е. собственных функций (и собственных значений) нет.

В случае $\lambda=0$ общее решение рассматриваемого уравнения $y(x)=C_1x+C_2$. С учетом граничных условий получаем $y(x)=0$ – нет собственных функций.

Пусть $\lambda=\mu^2>0$, тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1\sin\mu x+C_2\cos\mu x$. Дополнительные условия дают $y(0)=0 \Rightarrow C_2=0$, $y(l)=0 \Rightarrow C_1\sin\mu l=0$, откуда получаем

$\sin \mu l = 0 \Rightarrow \mu_n = \dfrac{\pi n}{l}$, $n \in N$. Следовательно, искомые собственные значения $\lambda_n = \mu_n^2 = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$, $n \in N$, а отвечающие им собственные функции имеют вид $y_n(x) = C \sin \dfrac{\pi n}{l} x$.

В курсе интегральных уравнений доказано следующее утверждение.

Теорема (*Стеклова*). Любая функция $f(x) \in C^2[a,b]$, удовлетворяющая однородным краевым условиям, представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье по ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе собственных функций $y_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля (с теми же краевыми условиями)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x),$$

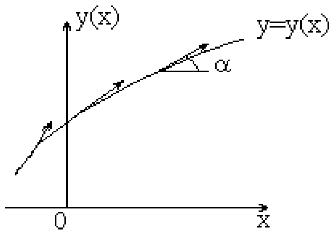
где коэффициенты Фурье определяются формулой $f_n = \int\limits_a^b f(x) y_n(x) \rho(x)\, dx$.

§4. Геометрическая интерпретация ОДУ.

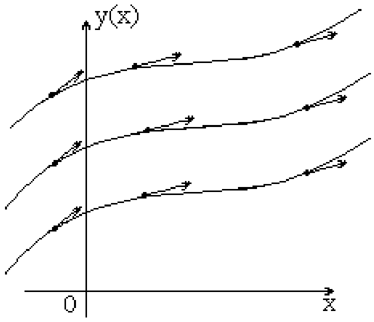
Графики решений $y = y(x)$ скалярного ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

называются его ***интегральными кривыми***. В геометрических терминах данное уравнение выражает следующий факт: *кривая на* (x, y)*-плоскости является его интегральной кривой в том и только том случае, когда в любой точке* (x_0, y_0) *этой кривой она имеет касательную с угловым коэффициентом* $k = f(x_0, y_0)$.



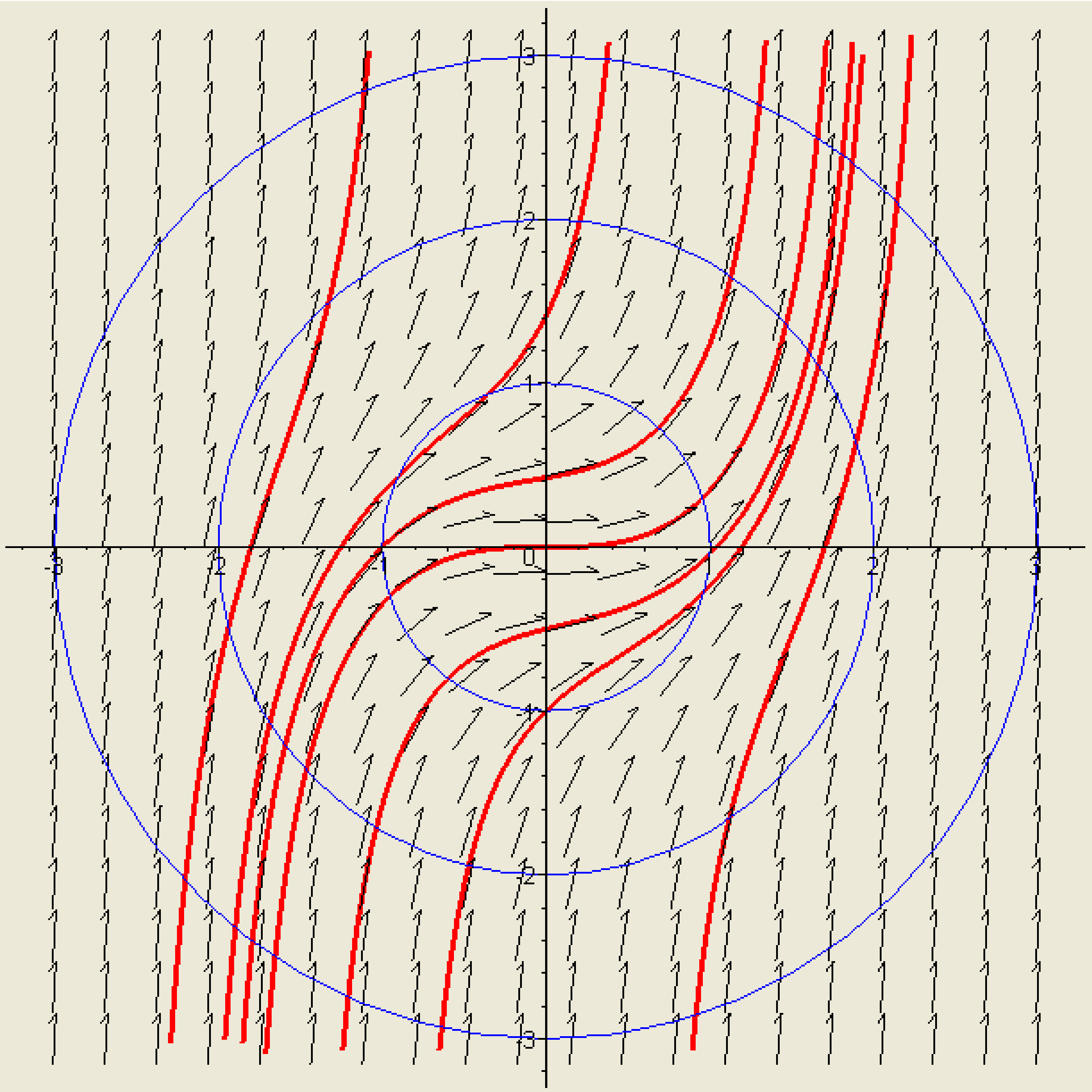
Таким образом, зная правую часть уравнения (1), можно заранее построить касательные ко всем интегральным кривым во всех точках: для этого каждой точке (x_0, y_0) нужно сопоставить проходящую через нее прямую с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$. Полученное соответствие между точками плоскости и проходящими через нее прямыми, называется ***полем направлений уравнения*** (1).



Конечно, фактически поле направлений можно построить лишь в виде достаточно густой сетки отрезков с отмеченными на них точками. После этого задача построения интегральных кривых становится похожей на отыскание нужного пути в большом парке, снабженном густой сетью стрелок-указателей.

Метод изоклин. Построение поля направлений значительно облегчается предварительным нахождением ***изоклин*** – кривых на (x, y)-плоскости, вдоль которых угловой коэффициент k сохраняет неизменное значение. Уравнение изоклин имеет вид $f(x, y) = k$. Вдоль изоклин отрезок, принадлежащий полю направлений, переносится параллельно своему первоначальному положению: переход к другой изоклине осуществляется изменением k и построением отрезка с новым угловым коэффициентом.

Например, для уравнения $y' = x^2 + y^2$ изоклины описываются уравнением $x^2 + y^2 = k$ и представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат. На рисунке изображены изоклины (синим цветом), поля направлений (черные стрелки) и интегральные кривые (красные линии).



§5. Примеры задач, приводящих к ОДУ.

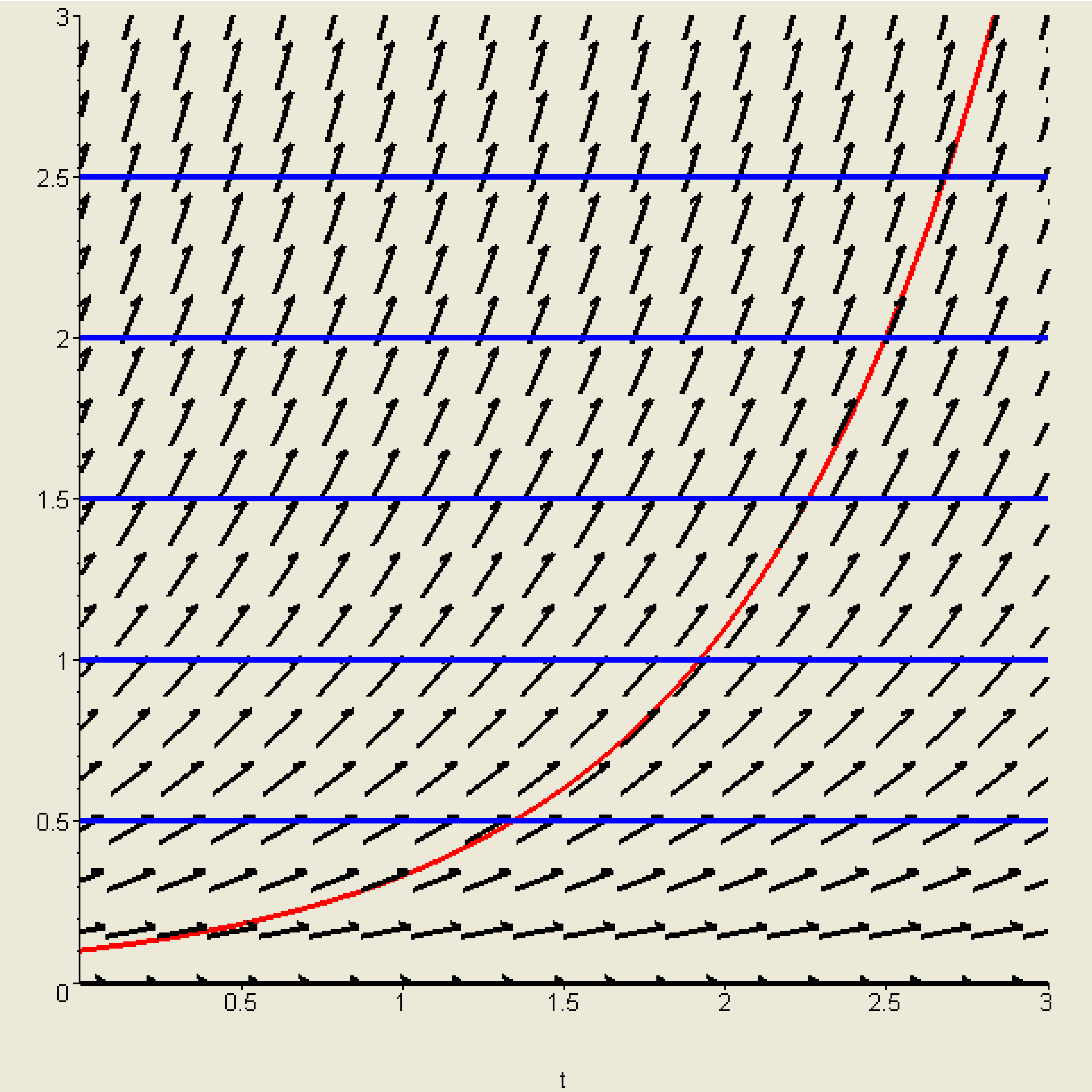
Пример 1: *нормальное размножение.* Пусть x — количество особей в некоторой биологической популяции (например, количество рыб в пруду). При нормальных условиях: достаток пищи, отсутствие хищников и болезней, — скорость размножения пропорциональна числу особей:

$$\dot{x} = kx, \qquad k > 0.$$

Решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$ имеет вид $x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}$. Заметим, что при всех $T > 0$ отношение

$$\frac{x(t+T)}{x(T)} = e^{kT}$$

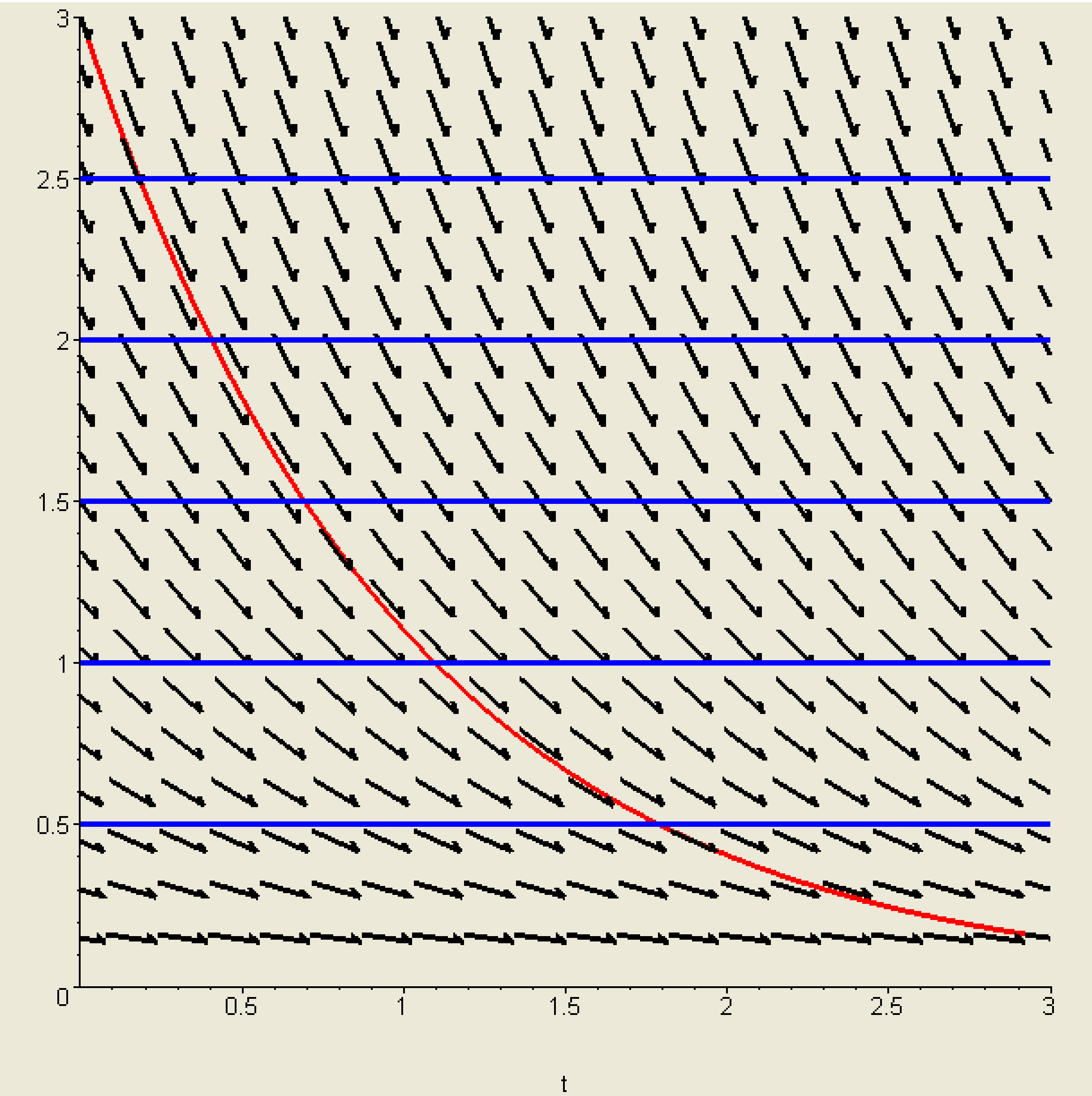
не зависит от x_0 и t. Для населения Земли известен период удвоения $T \approx 40$ лет, и можно определить коэффициент k из соотношения $e^{kT} = 2$, т.е. $k = \frac{\ln 2}{T}$.



Пример 2: *радиоактивный распад.* Пусть x – количество радиоактивного вещества. Тогда скорость распада будет пропорциональна количеству этого вещества, т.е.:

$$\dot{x} = kx, \qquad k < 0 .$$

Как и в примере 1, решением с начальным условием $x(t_0) = x_0$ будет функция $x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}$. Время, необходимое для уменьшения количества радиоактивного вещества вдвое, называется ***периодом полураспада*** и определяется из уравнения $e^{kT} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $T = -\dfrac{\ln 2}{k}$. Для радия-226 он составляет 1620 лет, для урана-238 – $4,5 \cdot 10^9$ лет.



Пример 3: *взрыв.* В физико-химических задачах часто встречается ситуация, когда скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов. В задачах динамики популяций в некоторых случаях скорость прироста также пропорциональна не количеству особей, а количеству пар, т.е.

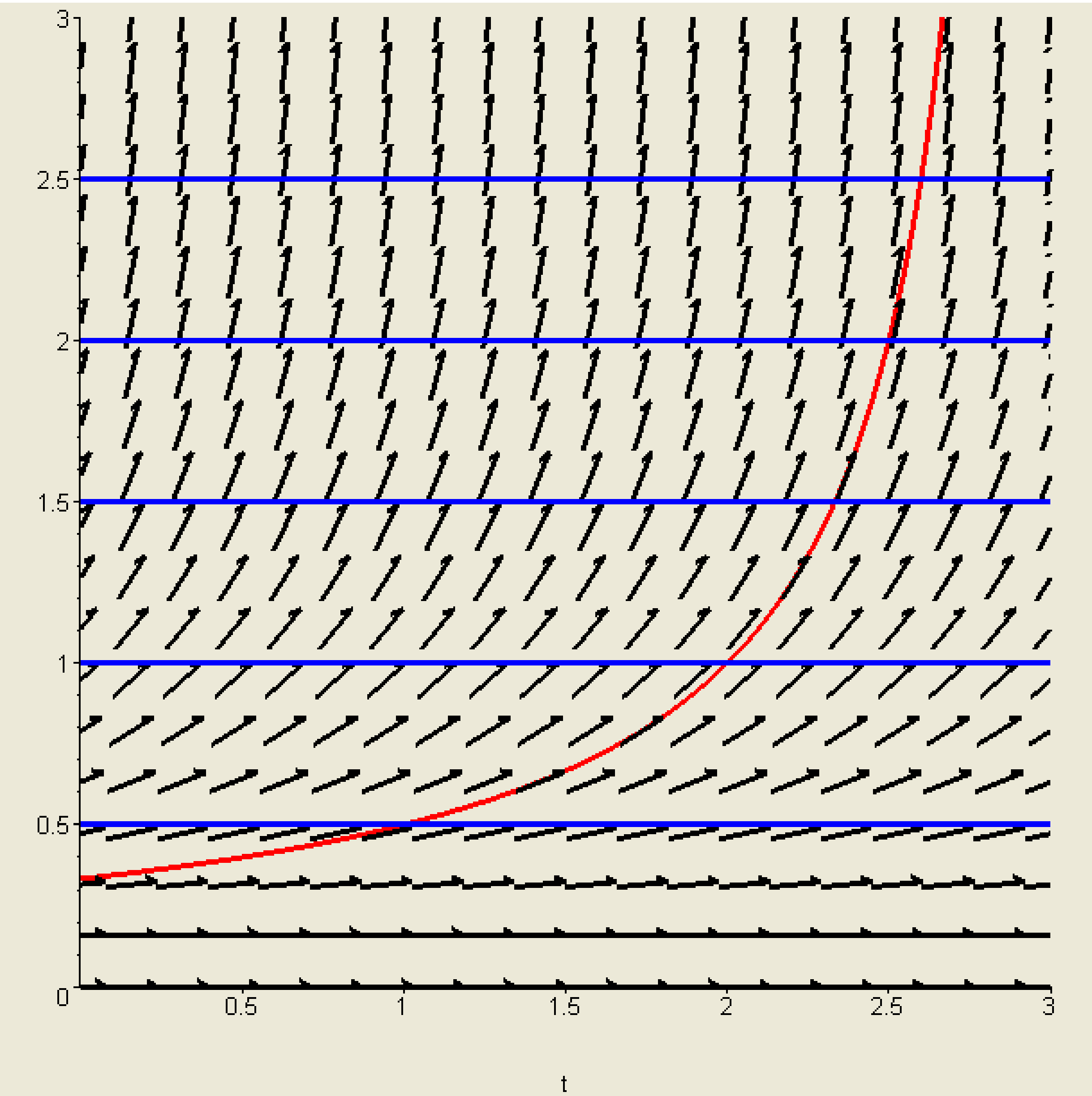
$$\dot{x} = kx^2, \qquad k > 0 .$$

В данном случае рост решения происходит гораздо быстрее экспоненциального, и величина $x(t)$ неограниченно возрастает за конечное время: интегральная кривая решения с начальным условием $x(0)=x_0$ описывается формулой

В данном случае рост решения происходит гораздо быстрее экспоненциального, и величина $x(t)$ неограниченно возрастает за конечное время: интегральная кривая решения с начальным условием $x(0)=x_0$ описывается формулой

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{kx_0}-t}, & x_0\neq 0\\ 0\quad , & x_0=0\end{cases}$$

и имеет вертикальную асимптоту ("момент взрыва") $t=\dfrac{1}{kx_0}$.



Пример 4: *уравнения Лагранжа для механических систем*. Рассмотрим систему из N свободных материальных точек A_j с массами m_j, $j=1,2,\ldots,N$. Пусть в некоторой декартовой инерциальной системе координат (т. е. в такой, где справедлив второй закон

Ньютона) радиус-вектор точки A_j есть $\vec{r}_j = \vec{r}_j(t)$. Тогда ее скорость и ускорение вычисляются как производные от $\vec{r}_j(t)$: $\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j(t)$, $\vec{a}_j = \ddot{\vec{r}}_j(t)$. Допустим, что сумма всех внешних и внутренних сил, приложенных к A_j, есть вектор-функция $\vec{F}_j = \vec{F}_j\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right)$, где $\vec{r} = \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N\right)$. Тогда данная механическая система описывается, согласно второму закону Ньютона, задачей Коши для системы ОДУ:

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right), \tag{1}$$

$$\vec{r}_j(t_0) = \vec{r}_j^{\,0}, \; \dot{\vec{r}}_j(t_0) = \vec{v}_j^{\,0} \qquad j = 1, 2, ..., N \;.$$

Таким образом, второй закон Ньютона дает общий метод описания механических систем с помощью дифференциальных уравнений.

Пусть на систему наложены *связи* (например, точки соединены жесткими стержнями пренебрежимо малой массы и т. п.) Тогда $3N$-мерная точка $\vec{r}$, изображающая мгновенное положение всей системы, уже не может принимать произвольное положение в пространстве $\mathbf{R}^{3N}$, а в каждый момент времени t принадлежит некоторому множеству $\mathcal{K}_t \subset \mathbf{R}^{3N}$, называемому *конфигурационным многообразием* данной механической системы.

Мы будем предполагать, что конфигурационное многообразие допускает следующее описание. Пусть $t_0 \in \mathbf{R}$, $r^0 \in \mathcal{K}_{t_0}$. Тогда должны существовать окрестность $U \subset \mathbf{R}$ точки t_0 и окрестность $V \subset \mathbf{R}^{3N}$ точки r^0 такие, что для любого $t \in U$ любая точка $r \in \mathcal{K}_t \cap V$ однозначно записывается в виде

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t, \vec{q}\right), \tag{2}$$

где функция $\vec{r}\left(t, \vec{q}\right)$ определена по переменной $\vec{q} = \left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$ на открытом множестве $Q \subset \mathbf{R}^n$ ($n \le 3N$), дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных и невырождена, т.е. $(3N \times n)$- матрица Якоби $\dfrac{\partial \vec{r}\left(t, \vec{q}\right)}{\partial \vec{q}}$ имеет максимально возможный ранг n. Координаты $\left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$ вектора $\vec{q}$, которые по заданным $t \in U$ и $r \in \mathcal{K}_t \cap V$ находятся однозначно, называются *локальными обобщенными*, или *лагранжевыми координатами* точки $\vec{r}$. Выбор локальных обобщенных (или просто обобщенных) координат, конечно, неоднозначен. Число n называется *размерностью конфигурационного многообразия*.

Для системы со связями в правых частях уравнения (1) появляются неизвестные заранее *силы реакции связей*. Если связи *идеальны*, (т. е. соответствующие силы реакции не производят работы), то задача, тем не менее, остается динамически определенной, так как уравнения связей (2) дают необходимую дополнительную информацию. Однако практически бывает удобно рассматривать вместо (1), (2) эквивалентную ей *систему уравнений Лагранжа второго рода*, записанную непосредственно в обобщенных координатах $\left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$ и не содержащую сил реакции связей. Вывод уравнений Лагранжа дается в курсе теоретической механики, здесь мы только опишем алгоритм построения этих уравнений, состоящий из трех шагов.

1) Выражение *кинетической энергии* системы через обобщенные координаты:

$$T = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j \vec{v}_j^{\,2}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\dot{\vec{r}}_j\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \vec{q}} \dot{\vec{q}}\right)^2$$

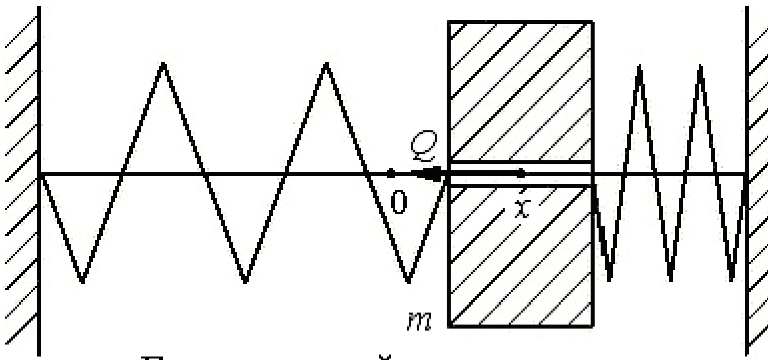
2) Вычисление *обобщенных сил*:

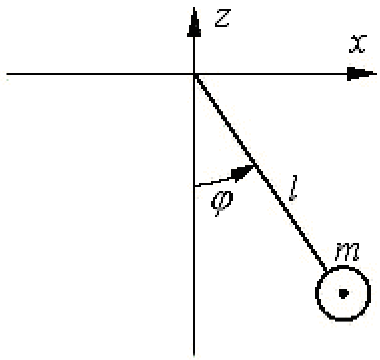
$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, ..., n \ .$$

3) Выписывание *уравнений Лагранжа*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, ..., n \ .$$

Пример 5: *гармонический осциллятор и математический маятник.* Составим уравнения Лагранжа для двух конкретных механических систем, изображенных на рисунке.





Гармонический осциллятор – это грузик на гладком стержне, поддерживаемый с двух концов пружинами. Для него в качестве единственной обобщенной координаты q можно взять декартову координату $q = x$; для ***маятника*** естественно выбрать $q = \varphi$. Тогда уравнения (2) для этих систем запишутся в виде:

осциллятор – $\vec{r} = (x, 0, 0)$;

маятник – $\vec{r} = (l \sin\varphi, 0, -l\cos\varphi)$.

Для маятника эта функция взаимно однозначна при $\varphi \in (-\pi, \pi)$ или при $\varphi \in (0, 2\pi)$ (две локальные системы координат).

Кинетическая энергия этих механических систем вычисляется по формулам:

осциллятор – $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}\right)^2$;

маятник – $T = \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\varphi}\right)^2$,

а обобщенные силы – по формулам:

осциллятор – $\vec{F} = (-kx, 0, 0)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 0)$, $Q = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = -kx$;

маятник – $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (l\cos\varphi, 0, l\sin\varphi)$, $Q = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$

Далее, для осциллятора имеем $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0$,

и уравнение движения $m\ddot{x} = -kx$, или $m\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

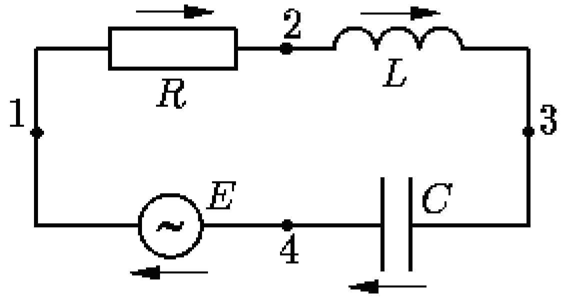
В случае маятника: $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}$, $\dfrac{\partial T}{\partial q} = \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$,

и уравнение движения $ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi$, или $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Если $\varphi << 1$, то $\sin\varphi \approx \varphi$, и получаем $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ – линеаризованное уравнение колебаний.

Если длина стержня маятника изменяется во времени, т.е. $l = l(t)$, то уравнение движения будет иметь вид $\ddot{\varphi} + \dfrac{2\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \omega^2(t)\sin\varphi = 0$, где $\omega(t) = \sqrt{\dfrac{g}{l(t)}}$ (получите это самостоятельно).

Пример 6: *уравнение RLCE-контура.* Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рисунке.



Она состоит из четырех *двухполюсников*: *сопротивления* ***R***, *индуктивности* ***L***, *емкости* ***C*** и *источника ЭДС* ***E***. Если для двухполюсника *A* произвольно выбрать *положительное направление*, то в любой момент времени ему можно сопоставить две величины: *напряжение* $\boldsymbol{u_A}$ (вольт) и *ток* $\boldsymbol{i_A}$ (ампер). При смене положительного направления они меняют знак. Каждый из двухполюсников описывается определенным уравнением:

$$u_R = Ri_R, \qquad L\frac{di_L}{dt} = u_L, \qquad C\frac{du_C}{dt} = i_C, \qquad u_E = -e(t).$$

Неотрицательные параметры ***R*** (ом), ***L*** (генри) и ***C*** (фарада) называются, как и сами двухполюсники, сопротивлением, индуктивностью и емкостью; заданная функция $e(t)$ характеризует источник ЭДС. Соединения двухполюсников в цепь описываются двумя *законами Кирхгофа*.

Первый закон Кирхгофа гласит: *сумма токов, втекающих в любой узел, равна нулю*. В рассматриваемом контуре четыре узла, они помечены цифрами. Из закона Кирхгофа для узла 1 следует, что $i_E = i_R$, так как в этот узел *втекают токи* i_E и $-i_R$. Из рассмотрения остальных узлов следует, что ток во всем контуре одинаковый:

$$i_E = i_R = i_C = i_L = i.$$

Второй закон Кирхгофа утверждает, что *сумма напряжений при обходе любого замкнутого контура равна нулю* (положительные направления двухполюсников должны быть согласованы с направлением обхода).

В нашем случае

$$u_E + u_R + u_C + u_L = 0,$$

или

$$L\frac{di}{dt} + u_C + Ri = e(t).$$

Из уравнения емкости следует, что

$$i = \frac{du_C}{dt}, \qquad \frac{di}{dt} = C\frac{d^2u}{dt^2}$$

Введя обозначение $u = u_C$, получаем окончательно

$$LCu'' + RCu' + u = e(t).$$

Это и есть ***уравнение RLCE-контура***. В него входит только напряжение емкости *u*; все остальные напряжения и токи вычисляются по известному значению *u*:

$$u_R = Ri, \qquad i = Cu', \qquad u_L = e(t) - u - u_R.$$

Заметим, что если положить $R = 0$ и $e(t) \equiv 0$, то полученное уравнение лишь обозначениями будет отличаться от уравнения гармонического осциллятора. Здесь проявляется универсальность языка дифференциальных уравнений: он выявляет существенные связи между разными уравнениями. В уравнении контура роль величины ω_0 играет $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

***Пример** 7*: *модель биологической системы "хищник-жертва".* Приведем вывод уравнений, описывающих изменение численности двух взаимосвязанных биологических видов: *"жертвы"* (N_1) и *"хищника"* (N_2) по книге известного итальянского математика Вито Вольтерры. Встречающийся в этом выводе термин *"коэффициент прироста"* обозначает отношение N'/N скорости изменения численности вида к его численности. В подобных моделях функцию удобно считать гладкой, хотя на самом деле она принимает целочисленные значения и, следовательно, изменяется скачкообразно. Поскольку модель носит приближенный характер, такая интерпретация допустима.

Если бы в среде, где обитают эти виды, находился только один из них, а именно жертва, то у него был бы некоторый коэффициент прироста $\varepsilon_1 > 0$. Другой вид (хищник), питающийся только жертвой, в предположении, что он существует изолированно, имеет некоторый коэффициент прироста $-\varepsilon_2 < 0$. Когда два такие вида сосуществуют в ограниченной среде, первый будет развиваться тем медленнее, чем больше существует индивидуумов второго вида, а второй – тем быстрее, чем многочисленнее будет первый вид. Гипотеза, довольно простая, состоит в том, что коэффициенты прироста таковы, что

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \gamma_1 > 0 \quad \text{и} \quad -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \gamma_2 > 0.$$

Это приводит к системе дифференциальных уравнений для описания численности видов:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)$$
$$N_1(t_0) = N_1^0, \; N_2(t_0) = N_2^0$$

На практике, при выводе дифференциальных уравнений помимо строгих законов нередко используются гипотезы и различные приближенные представления.

Пример 8: *сведение уравнения в частных производных к ОДУ.*

Уравнение теплопроводности на отрезке с «холодильниками» на концах. Начально-краевая задача для температуры $u(x,t)$ в тонком однородном стержне имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (0 < x < l) \;;$$

граничные условия $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$;

начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$.

Рассмотрим два подхода к решению этой задачи, приводящие к ОДУ.

1) <u>Преобразование Лапласа</u>. В результате применения преобразования Лапласа, получим ОДУ для образа $U(x,p)=\int\limits_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt$

$$pU(x,p)-\varphi(x)=a^2\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}+F(x,p), \qquad (0<x<l)$$

с граничными условиями $U(0,p)=0$, $U(l,p)=0$,

где $F(x,p)=\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)e^{-pt}dt$.

Решая эту задачу и обращая преобразование Лапласа (например, по формуле Меллина) можно получить искомую функцию $u(x,t)$.

2) <u>Метод Фурье.</u> Решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности можно искать в виде ряда Фурье

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\psi_n(x)$$

по ортонормированной системе $\{\psi_n(x)\}$ собственных функций задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d^2\psi_n}{\partial x^2}+\lambda_n\psi_n=0, \ (0<x<l)$$

$$\psi_n(0)=0, \qquad \psi_n(l)=0.$$

Подставив решение в указанном выше виде в исходное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(t)}{dt}\psi_n(x)=a^2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\ \frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2}+f(x,t)$$

и учитывая определение функций $\psi_n(x)$, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(t)}{dt}\psi_n(x)=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\lambda_n\psi_n(x)+f(x,t).$$

Умножим обе части последнего равенства на $\psi_n(x)$ и проинтегрируем по переменной x от 0 до l:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(t)}{dt}\int\limits_0^l\psi_n(x)\psi_k(x)\,dx=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\lambda_n\int\limits_0^l\psi_n(x)\psi_k(x)\,dx+\int\limits_0^l f(x,t)\psi_k(x)\,dx.$$

Учитывая условие нормировки $\int\limits_0^l\psi_n(x)\psi_k(x)\,dx=\begin{cases}0, & k\neq n\\ 1, & k=n\end{cases}$, и обозначив $\varphi_k=\int\limits_0^l\varphi(x)\psi_k(x)\,dx$, и $f_k(t)=\int\limits_0^l f(x,t)\psi_k(x)\,dx$, для определения функций $u_k(t)$ получим ОДУ

$$\frac{du_k}{dt}+a^2\lambda_k u_k=f_k(t)$$

с начальным условием $u_k(0)=\varphi_k$ (задача Коши).

В частности, решение однородного уравнения теплопроводности (при $f(x,t)\equiv 0$) с нулевыми граничными условиями первого рода имеет вид

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right).$$

Получите эту формулу самостоятельно.