# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКИ

I. Понятие о математической модели.

II. Сплошные среды и способы их описания.

1. Метод Лагранжа.
2. Метод Эйлера.

III. Математические модели жидких идеальных сред.

1. Массовые и поверхностные силы.
2. Общее уравнение движения жидкого объема.
3. Напряжение в жидкой среде. Гидродинамическое давление идеальной жидкости.
4. Уравнения Эйлера.
5. Модели жидких идеальных сред.
6. Начальные и граничные условия.

IV. Математические модели жидких вязких сред.

1. Понятие вязкой жидкости.
2. Теорема Коши-Гельмгольца. Понятие тензора скоростей деформации и тензора напряжений.
3. Закон Навье-Стокса.
4. Модели жидких вязких сред.
5. Начально-краевые задачи.

V. Частные случаи и примеры.

1. Основные свойства потенциального движения несжимаемой жидкости в односвязных областях *(свойства гармонических функций: принцип максимума, теорема о среднем; простейшие внутренние краевые задачи для уравнения Лапласа).*

2. Плоские задачи о движении тел в идеальной жидкости *(примеры постановок внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа).*

3. Стационарное течение вязкой однородной жидкости в трубах:

а) течение в трубах с круговым и эллиптическим сечениями *(краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге);*

б) течение в трубе с прямоугольным сечением и течение в плоском канале с твердыми стенками *(краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике).*

4. Распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении сферы *(краевая задача Неймана для уравнения Лапласа вне шара).*

5. Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением *(начально-краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности в круге).*

6. Нестационарные слоистые течения:

а) тангенциальный разрыв *(задача Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой);*

б) движение твердой поверхности *(начально-краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой);*

в) течение под действием касательного напряжения (простейшее моделирование морского течения в приповерхностном слое под действием ветра постоянной силы), *(начально-краевая задача Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой).*

**1. ВВЕДЕНИЕ. 1.1. Понятие о математической модели.** Математическая физика изучает процессы реального мира с помощью *математических моделей,* которые получаются на основе законов физики. Любая математическая модель является приближенной, не адекватной полностью тому процессу, который она описывает. При составлении математической модели стремятся к тому, чтобы она наиболее полно отражала сам процесс. Однако математическая модель должна быть достаточно простой для изучения, должна давать возможность извлечь из нее доступными методами полезную информацию о процессе. Поэтому какие-то факторы, влияние которых на процесс мало, неизбежно не учитываются, и они оказываются не представленными в математической модели.

Математическая модель включает в себя замкнутую систему уравнений (количество уравнений равно количеству неизвестных функций) и *дополнительные условия,* которые состоят из начальных распределений *(начальных условий)* и *краевых (граничных) условий.* Таким образом, рассмотрение задач математической физики сводится к исследованию *начально-краевых задач* для систем уравнений, как правило, в частных производных. Далее будут обсуждаться математические модели, соответствующие процессам в сплошных жидких средах, а также применение методов математической физики при решении задач гидродинамики.

**1.2. Сплошные среды и способы их описания.** Введение понятия *сплошной среды* позволяет не учитывать молекулярное строение вещества при последующем рассмотрении процесса, что существенно упрощает процедуру описания гидрофизических явлений. Само понятие сплошной среды вводится через определение *жидкой частицы,* которая является неделимым элементом сплошной среды. В качестве жидкой частицы можно выбрать малый объем жидкости, линейный размер которого $l$ сравним с наименьшим фиксируемым размером, и имеет порядок размера регистрирующего датчика. Величина $l$ много больше размеров молекул, но много меньше размеров окружающих нас объектов. Поэтому, являясь для наблюдателя точкой, жидкая частица заключает в себе большое количество молекул и атомов. Благодаря изменению расстояния между жидкими частицами происходит изменение внешней конфигурации объема, причем при своем движении жидкие частицы также деформируются. Осредняя по объему $l^3$ физические характеристики среды, такие как плотность, температура, скорость и т.д., получаем плотность, температуру, скорость соответствующей жидкой частицы (средние величины будем называть *гидродинамическими,* подробнее см. например [1]). Таким образом осуществляется переход от дискретной среды к сплошной.

При описании жидких сред в основном используются два подхода. С точки зрения *метода Лагранжа* объектом изучения являются жидкие частицы, рассматриваемые как материальные точки, сплошь заполняющие объем с жидкостью. При этом исследуется:

-как изменяются различные векторные и скалярные величины, связанные с конкретной частицей, с течением времени;

-как изменяются эти величины при переходе от одной частице к другой.

Если $(x_0, y_0, z_0)$-координаты частицы в начальный момент времени $t = t_0$ относительно некоторой системы координат, то в любой другой момент времени $t \neq t_0$ координаты частицы $(x, y, z)$ будут функциями не только времени $t$, но и начального положения частицы:

$$x = \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0), \quad z = \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0).$$

При $t = t_0$ имеем

$$x_0 = \varphi_1(t_0, x_0, y_0, z_0), \quad y_0 = \varphi_2(t_0, x_0, y_0, z_0), \quad z_0 = \varphi_3(t_0, x_0, y_0, z_0).$$

Вместо $(x_0, y_0, z_0)$ можно рассматривать любые другие величины $(a,b,c)$, однозначно связанные с $(x_0, y_0, z_0)$:

$$a = \psi_1(x_0, y_0, z_0), \quad b = \psi_2(x_0, y_0, z_0), \quad c = \psi_3(x_0, y_0, z_0).$$

Совокупность величин $(t,a,b,c)$ называется *переменными Лагранжа.*

Введя переменные Лагранжа можно определить значения скалярных и векторных величин, связанных с конкретной частицей. Координаты некоторой частицы задаются соотношениями

$$x = f_1(t,a,b,c), \quad y = f_2(t,a,b,c), \quad z = f_3(t,a,b,c).$$

При вычислении компонентов скорости и ускорения частицы пользуются символом частной производной, подчеркивая этим то, что производные вычисляются для рассматриваемой частицы среды (при фиксированных значениях $(a,b,c)$):

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{a,b,c}, \quad w_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\right)_{a,b,c},$$
$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)_{a,b,c}, \quad w_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\right)_{a,b,c},$$
$$v_z = \frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial t}\right)_{a,b,c}, \quad w_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2}\right)_{a,b,c}.$$

Для полной характеристики состояния жидкости необходимо знать давление $p$ и плотность $\rho$, как функции переменных Лагранжа:

$$p = p(t,a,b,c), \quad \rho = \rho(t,a,b,c).$$

Объектом изучения в случае *метода Эйлера* является не сама жидкость, а неподвижное пространство, заполненное жидкостью. При этом изучается:

-изменение различных характеристик движения в фиксированной точке пространства с течением времени;

-изменение этих характеристик при переходе к другим точкам пространства.

В данном случае векторные и скалярные характеристики движения зависят от переменных $(t,x,y,z)$, называемых *переменными Эйлера.* В частности, компоненты вектора скорости могут быть заданы как

$$v_x = F_1(t,x,y,z), \quad v_y = F_2(t,x,y,z), \quad v_z = F_3(t,x,y,z).$$

Вектор ускорения вычисляется по формуле (подробнее см. [2])

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}, \tag{1.1}$$

где $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, где $\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_z$ - координатные орты.

**1.3. Основные уравнения.** Получим уравнение движения некоторого *жидкого объема* $V$ (объема, содержащего одни и те же частицы), выделенного внутри движущейся жидкости. Для этого подсчитаем действующие на него силы.

Состояние движения жидкой среды изменяется под влиянием взаимодействия частиц друг с другом и с телами, внешними по отношению к рассматриваемому объему с жидкостью. В результате такого взаимодействия возникают силы, которые делят на два основных типа: *массовые* и *поверхностные.* Силы, распределенные по объему и пропорциональные массам частиц, называются *массовыми* (напр. сила тяжести, сила инерции и др.). Если $\mathbf{F} = \{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$ – вектор массовой силы, отнесенный к единице массы, то на элемент объема $d\tau$ действует сила $\mathbf{F}\rho d\tau$, где $\rho(x, y, z, t)$ – плотность жидкости. Следовательно, массовая сила, действующая на объем $V$ равна

$$\int_V \mathbf{F}\rho d\tau = \left\{ \int_V X\rho d\tau, \int_V Y\rho d\tau, \int_V Z\rho d\tau \right\}.$$

Например, в случае силы тяжести $\mathbf{F} = \mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ - вектор ускорения свободного падения.

*Поверхностные силы,* в отличие от массовых, распределены по поверхности. Силы взаимодействия частиц рассматриваемого объема с окружающей средой, приложенные к поверхности раздела или силы, с которыми взаимодействуют частицы внутри рассматриваемого объема через разделяющие их воображаемые поверхности, называются поверхностными. Пусть $ds$ – элемент достаточно гладкой поверхности $S$, ограничивающей объем $V$, $\mathbf{n}$ - нормаль к поверхности $S$, внешняя по отношению к объему $V$. Вектор поверхностных сил $\mathbf{p}_{\mathrm{n}}$, отнесенный к единице площади, называется *напряжением.* В общем случае $\mathbf{p}_{\mathrm{n}}$ зависит от положения и ориентации сечения в пространстве и от времени. Поскольку $ds$ - элемент двухсторонней поверхности, то к $ds$ можно задать две нормали: $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$. Со стороны внешних, по отношению к объему $V$, частиц к внешней стороне элемента $ds$ будет приложена поверхностная сила $\mathbf{p}_{\mathrm{n}}ds$. Со стороны частиц объема к внутренней стороне этого же элемента поверхности приложена сила $\mathbf{p}_{-\mathrm{n}}ds$. В силу 3-го закона Ньютона: $\mathbf{p}_{-\mathrm{n}} = -\mathbf{p}_{\mathrm{n}}$. Если угол между нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности и напряжением $\mathbf{p}_{\mathrm{n}}$ острый, то нормальная составляющая вектора $\mathbf{p}_{\mathrm{n}}$ называется *нормальным напряжением;* если угол является тупым, то нормальная составляющая называется *давлением.* Касательная к поверхности составляющая вектора $\mathbf{p}_{\mathrm{n}}$ называется *касательным напряжением* или *силой внутреннего трения (силой вязкости).*

В соответствие со 2-м законом Ньютона имеет место уравнение

$$\mathbf{F} + \mathbf{I}_{\mathrm{d}} = 0,$$

где $\mathbf{F}$ - равнодействующая сила, приложенная к материальной точке массы $m$, $\mathbf{I}_{\mathrm{d}} = -m\mathbf{a}$ - *даламберова сила инерции*, которую следует интерпретировать как сопротивление, оказываемое инертной массой, изменению своего движения, то есть ускорению, вызванному другим объектом. Таким образом, в каждый момент движения все силы, приложенные к материальной точке, взаимно уравновешиваются. В этом состоит принцип Даламбера*,* который справедлив и для материальных систем. Применив принцип Даламбера к жидкому объему $V$, получаем *общее уравнение движения жидкого объема*

$$\int_V (\mathbf{F} - \mathbf{w})\rho d\tau + \oint_S \mathbf{p}_n ds = 0, \qquad (1.2)$$

где $\mathbf{p}_{\mathrm{n}}$ **-** напряжение, приложенное к внешней стороне поверхности $S$; $\mathbf{w}$ **-** ускорение жидкого объема единичной массы. Если в трех сечениях, образующих трехгранный угол друг с другом (для определенности будем считать, что сечения совпадают с координатными плоскостями некоторой декартовой системы координат), напряжения $\mathbf{p}_{\mathrm{X}}$, $\mathbf{p}_{\mathrm{Y}}$ и $\mathbf{p}_{\mathrm{Z}}$. известны, то напряжения $\mathbf{p}_{\mathrm{n}}$ во всех других сечениях, проходящих через эту точку, могут быть определены по формуле

$$\mathbf{p}_{\mathrm{n}} = \alpha\mathbf{p}_{\mathrm{X}} + \beta\mathbf{p}_{\mathrm{Y}} + \gamma\mathbf{p}_{\mathrm{Z}}, \tag{1.3}$$

где $\{\alpha,\beta,\gamma\} = \left\{\cos(\mathbf{n},\hat{\mathbf{e}}_x),\quad \cos(\mathbf{n},\hat{\mathbf{e}}_y),\quad \cos(\mathbf{n},\hat{\mathbf{e}}_z)\right\}$ – косинусы углов между нормалью $\mathbf{n}$ к рассматриваемому сечению и координатными ортами $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{z}}$ (подробнее см. [2]).

В заключение этого пункта получим уравнение непрерывности, которое представляет собой дифференциальное уравнение закона сохранения вещества. Масса $M$ жидкости, заключенной в жидком объеме $V$, равна $M = \int\limits_V \rho(x,y,z,t)d\tau$ и остается постоянной с течением времени. Известно, что если $B(x,y,z,t)$ - некоторая гидродинамическая величина, то справедлива формула [3]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V B(x,y,z,t)d\tau = \int\limits_V\left(\frac{dB}{dt} + Bdiv\mathbf{v}\right)d\tau, \tag{1.4}$$

где $V$ - жидкий объем. В соответствии с (1.4) имеем

$$\frac{dM}{dt} = \int\limits_V\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho div\mathbf{v}\right)d\tau = 0.$$

В силу произвольности объема $V$ и непрерывности подынтегральной функции, получаем *уравнение непрерывности*

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + div\mathbf{v} = 0. \tag{1.5}$$

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКИХ ИДЕАЛЬНЫХ СРЕД.

**2.1. Уравнение Эйлера.** *Идеальной жидкостью* называется жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения, а значит, касательные составляющие напряжений равны нулю. Следовательно, в идеальной жидкости существуют только нормальные напряжения, которые при деформации жидкости предотвращают ее разрыв. Поэтому нормальные напряжения всегда направлены вглубь выделенного в идеальной жидкости объема и являются силами давления, называемого *гидродинамическим давлением идеальной жидкости.* Возвращаясь к представлению (1.3) учтем тот факт, что в случае идеальной жидкости вектор $\mathbf{p}_{\mathrm{n}}$ направлен противоположно вектору внешней нормали. Скалярно умножая (1.3) на $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{z}}$, приходим к равенствам

$$-\mathrm{p}_n\alpha = -\alpha\mathrm{p}_X, \quad -\mathrm{p}_n\beta = -\beta\mathrm{p}_Y \quad -\mathrm{p}_n\gamma = -\gamma\mathrm{p}_Z$$

или

$$\mathrm{p}_n = \mathrm{p}_X = \mathrm{p}_Y = \mathrm{p}_Z.$$

Следовательно, в идеальной жидкости величина нормального напряжения (давления) не зависит от ориентации сечения. Значит давление в одной и той же точке идеальной жидкости одинаково во всех направлениях (во всех сечениях, проходящих через эту точку). С учетом этого уравнение (1.2) принимает вид

$$\int_V (\mathbf{F} - \mathbf{w})\rho d\tau + \oint_S \mathbf{p} ds = 0, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{p} = -\mathbf{n}\mathrm{p}$. Воспользуемся преобразованиями Гаусса [3], которые формулируются для непрерывной вместе с производными скалярной функции $u(x, y, z)$, определенной в пространственной области $V$, ограниченной кусочно гладкой поверхностью $S$ с внешней нормалью $\mathbf{n}$:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = \oint_S u\cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_x) ds, \quad \int_V \frac{\partial u}{\partial y} d\tau = \oint_S u\cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_y) ds, \quad \int_V \frac{\partial u}{\partial z} d\tau = \oint_S u\cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_z) ds. \tag{2.2}$$

Умножая первое выражение в (2.2) на $\mathbf{e}_x$, второе – на $\mathbf{e}_y$, третье – на $\mathbf{e}_z$ и складывая результаты, получаем

$$\int_V grad u d\tau = \oint_S u\mathbf{n} ds.$$

Применяя это преобразование к уравнению (2.1), находим

$$\int_V [(\mathbf{F} - \mathbf{w})\rho - grad\mathrm{p}] d\tau = 0.$$

Предполагая непрерывность подынтегральной функции, в силу произвольности объема $V$, а также учитывая представление (1.1) для вектора ускорения в эйлеровых переменных, приходим к *основному уравнению движения идеальной жидкости (уравнению Эйлера)*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} grad p. \tag{2.3}$$

**2.2. Модели жидких идеальных сред.** Общую задачу о движении идеальной жидкости можно сформулировать следующим образом: при заданном распределении внешних массовых сил, определить координаты отдельной частицы в каждый момент времени, скорости движения в каждой точке жидкости в каждый момент времени, а также силы внутреннего взаимодействия, то есть гидродинамические давления, в каждой точке в каждый момент времени.

Наиболее часто рассматриваются однородные среды. Плотность однородной жидкости, характеризующая среду, как правило, известна (напр. установлена экспериментально): $\rho(x,y,z,t)=const$. Соответствующую систему уравнений гидродинамики можно получить, если к уравнению Эйлера (2.3), представленному покомпонентно, добавить уравнение непрерывности (1.5):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\\
&\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Система (2.4), состоящая из четырех уравнений, является системой относительно четырех неизвестных функций: $v_x$, $v_y$, $v_z$ и $p$. Поэтому она замкнута. Предположим, что удалось разрешить систему (2.4), то есть, что найдены следующие функции

$$
\begin{aligned}
&p=f_1(t,x,y,z),\quad v_x=f_2(t,x,y,z),\\
&v_y=f_3(t,x,y,z),\quad v_z=f_4(t,x,y,z).
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Представления (2.5) содержат неизвестные константы, т. к. система (2.4) имеет бесконечно много решений. Для выделения единственного решения (2.4), которое соответствует физическому процессу, нужно задать дополнительные условия, о которых будет сказано ниже. Для того чтобы в каждый момент времени определить координаты частицы, находившейся в начальный момент $t=t_0$ в точке $(x_0,y_0,z_0)$, нужно решить задачу Коши для системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=f_2(t,x,y,z),\quad \frac{dy}{dt}=f_3(t,x,y,z),\quad \frac{dz}{dt}=f_4(t,x,y,z),\\
&x(t_0)=x_0,\quad y(t_0)=y_0,\quad z(t_0)=z_0.
\end{aligned}
$$

При рассмотрении неоднородной несжимаемой жидкости (напр. несжимаемая жидкость с примесью в поле силы тяжести (жидкость с плотностной стратификацией)) количество неизвестных функций увеличивается на одну: $\rho(x,y,z,t)$. В этом случае уравнение (1.5) распадается на два уравнения. В самом деле, т. к. жидкость несжимаема, то поток скорости $\oint\limits_{\overline{S}} \mathbf{vn}ds = 0$, где $\overline{S}$ – любая кусочно гладкая поверхность, расположенная внутри объема с жидкостью $V$. Следовательно, по теореме Остроградского-Гаусса $\int\limits_{\overline{V}} div\mathbf{v}d\tau = 0$, где $\overline{V}$ – объем, ограниченный поверхностью $\overline{S}$. В силу произвольности $\overline{V}$, имеем $div\mathbf{v} = 0$ в объеме $V$. Тогда из уравнения (1.5) получаем уравнение для определения плотности: $d\rho/dt = 0$. Заметим, что для производной $d\rho/dt$ в эйлеровых переменных справедлива формула, аналогичная (1.1) (подробнее см. [2]):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -(\mathbf{v},\nabla)\rho\,. \tag{2.6}$$

Добавив к уравнениям (2.4) уравнение (2.6), замыкаем систему.

Для сжимаемых сред характерна определенная зависимость между плотностью и давлением. В связи с этим различают *баротропные и бароклинные среды.*

*Баротропной средой* называется среда, в которой плотность зависит только от давления. Так как зависимость $\rho = \Phi(p)$, как правило, известна (напр., установлена экспериментально), то для баротропных сред система уравнений гидродинамики оказывается замкнутой. В самом деле, к уравнению Эйлера (2.3) добавляется уравнение непрерывности (1.5).

*Бароклинной средой* называется среда, плотность которой зависит не только от давления. Поэтому количество неизвестных функций увеличивается на одну: $v_x$, $v_y$, $v_z$, $p$ и $\rho$. Для того, чтобы замкнуть систему необходимо еще, по крайней мере, одно уравнение. С целью получения недостающего уравнения запишем дифференциальное уравнение закона сохранения энергии для сжимаемой идеальной жидкости. Полная энергия $U$ движущегося жидкого объема $V$ представляет собой сумму кинетической энергии $K$ и внутренней $\widetilde{U}$ (предполагается общий случай, когда внешнее силовое поле не потенциально): $U = K + \widetilde{U}$, где $K = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\mathbf{v}^2 d\tau$. Если $E$ - значение внутренней энергии, отнесенной к единице массы, то $\widetilde{U} = \int\limits_V \rho E d\tau$. Поэтому $U = \int\limits_V \rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + E\right)d\tau$. Приращение энергии $\Delta U$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$ складывается из работы массовых сил $A_\tau$, работы поверхностных сил $A_S$, притока тепла $Q_S$ через поверхность $S$, ограничивающую объем $V$ и притока тепла $Q_\tau$ от источников, распределенных в объеме с жидкостью:

$$\Delta U = A_\tau + A_S + Q_\tau + Q_S\,. \tag{2.7}$$

Работа массовых сил, действующих на элемент массы $dm = \rho d\tau$ за единицу времени определяется как $\mathbf{Fv}\rho d\tau$, где $\mathbf{F}$ - плотность массовых сил. Поэтому

$A_\tau = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_V \mathbf{Fv}\rho d\tau dt$ . Работа поверхностных сил, действующих на элемент поверхности $ds$ , за единицу времени равна $\mathbf{p}_n\mathbf{v}ds$ , где $\mathbf{p}_n$ - плотность поверхностных сил (напряжение). Следовательно $A_S = \int\limits_{t_1}^{t_2}\oint\limits_S \mathbf{p}_n\mathbf{v}dsdt$ . Если $q_n$ - количество тепла, поступающее в единицу времени через единицу поверхности в объем $V$ , то $Q_S = \int\limits_{t_1}^{t_2}\oint\limits_S q_n dsdt$ . Для многих изотропных сред справедлив закон теплопроводности Фурье, определяющий плотность теплового потока:

$$q_n = k\frac{\partial T}{\partial n},$$

где $\partial T/\partial n$ - скорость изменения температуры в направлении нормали $\mathbf{n}$ , $k$ - коэффициент теплопроводности, величина которого зависит в основном от температуры. Введем в рассмотрение скорость объемного выделения тепла $\varepsilon$ , как количество тепла, выделяемое единицей объема за единицу времени. Тогда $Q_\tau = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_V \varepsilon\, d\tau dt$ . Подставляя найденные выражения в (2.7) и используя теорему о среднем, предположив непрерывность подынтегральных функций, приходим к соотношению

$$\Delta U = \left(\int\limits_V \mathbf{Fv}\rho d\tau\right)_{t=t*}\cdot\Delta t + \left(\oint\limits_S \mathbf{p}_n\mathbf{v}dS\right)_{t=t**}\cdot\Delta t + \left(\oint\limits_S k\frac{\partial T}{\partial n}dS\right)_{t=t***}\cdot\Delta t +$$

$$+\left(\int\limits_V \varepsilon\, d\tau\right)_{t=t****}\cdot\Delta t,$$

где $t*,\quad t**,\quad t***,\quad t**** \in (t_1, t_2)$ . Сократив обе части уравнения на $\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ , имеем

$$\frac{dU}{dt} = \int\limits_V \mathbf{Fv}\rho d\tau + \oint\limits_S \mathbf{p}_n\mathbf{v}dS + \oint\limits_S k\frac{\partial T}{\partial n}dS + \int\limits_V \varepsilon\, d\tau .$$

С другой стороны, используя (1.4), находим

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}+E\right)d\tau = \int\limits_V\left[\rho\left(\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{dE}{dt}\right)+\frac{d\rho}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}+E\right)+\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}+E\right)div\mathbf{v}\right]d\tau =$$

$$= \int_V \rho\left(\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt}\right)d\tau.$$

Здесь учитывалось уравнение (1.5). Таким образом, получаем закон сохранения энергии для сжимаемой теплопроводящей среды в интегральной форме

$$\int_V \rho\left(\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt}\right)d\tau = \int_V \mathbf{F}\mathbf{v}\rho d\tau + \oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds + \oint_S k\frac{\partial T}{\partial n}ds + \int_V \varepsilon\, d\tau\,. \qquad (2.8)$$

Преобразуем поверхностные интегралы, содержащиеся в выражении (2.8), в объемные. По формуле Остроградского-Гаусса

$$\oint_S k\frac{\partial T}{\partial n}ds = \oint_S \mathbf{n} kgradTds = \int_V div(kgradT)d\tau\,.$$

Выражение для работы поверхностных сил легко преобразуется в интеграл по объему, если учесть преобразования Гаусса (2.2):

$$\oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds = -\oint_S p\mathbf{n}\mathbf{v} ds = -\oint_S p\left[v_x \cos(\mathbf{n},\hat{\mathbf{e}}_x) + v_y \cos(\mathbf{n},\hat{\mathbf{e}}_y) + v_z \cos(\mathbf{n},\hat{\mathbf{e}}_z)\right]ds =$$

$$= -\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(pv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(pv_y) + \frac{\partial}{\partial z}(pv_z)\right]d\tau = -\int_V \left[pdiv\mathbf{v} + \mathbf{v}gradp\right]d\tau.$$

Подставляя найденные выражения в (2.8) в силу произвольности объема $V$ приходим к уравнению

$$\rho\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho\frac{dE}{dt} = \varepsilon + div(kgradT) + \rho\mathbf{F}\mathbf{v} - pdiv\mathbf{v} - \mathbf{v}gradp\,.$$

Учитывая (2.3), окончательно находим

$$\rho\frac{dE}{dt} = \varepsilon + div(kgradT) - pdiv\mathbf{v}\,. \qquad (2.9)$$

При адиабатическом движении идеальной жидкости имеем уравнение

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{p}{\rho} div\mathbf{v} .$$

Если в качестве идеальной жидкости выступает идеальный газ, то

$$\frac{dE}{dt} = c_V \frac{dT}{dt},$$

где $c_V$ – удельная теплоемкость в изохорном процессе. Пусть зависимость $E = \Psi(T, p)$ известна. Тогда добавив к уравнениям (1.5), (2.3), (2.9) уравнение состояния

$$\Theta(p, \rho, T) = 0 . \qquad (2.10)$$

приходим к замкнутой системе уравнений, которая соответствует движению идеальной теплопроводящей бароклинной жидкости *(модель идеальной сжимаемой теплопроводящей жидкости)*. Например, при рассмотрении движений идеального газа уравнение (2.10) представляет собой уравнение Менделеева-Клапейрона

$$p = R\rho T ,$$

где $R = k_0 m^{-1}$ – универсальная газовая постоянная; $k_0$ – постоянная Больцмана, одинаковая для всех газов; $m$ – средняя масса молекулы в граммах.

**2.3. Начальные и граничные условия.** Гидродинамическая система уравнений, являясь системой дифференциальных уравнений, имеет бесконечное множество решений. Для того чтобы выделить единственное решение системы, соответствующее физическому процессу, необходимо задать *дополнительные условия*, включающие в себя *начальные распределения* и *граничные условия*. В качестве начальных условий в эйлеровых переменных, например для системы (2.4), используется распределения скоростей в начальный момент времени $t = t_0$:

$$v_x(x, y, z, t_0) = \varphi_1(x, y, z), \quad v_y(x, y, z, t_0) = \varphi_2(x, y, z), \quad v_z(x, y, z, t_0) = \varphi_3(x, y, z). \qquad (2.11)$$

Условия, задаваемые на границах области, зависят от характеристик границы. Если жидкость граничит с неподвижной твердой стенкой $S_T$ с уравнением поверхности $G(x, y, z) = 0$, то граничное условие имеет вид

$$v_n = (\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T , \qquad (2.12)$$

где $\mathbf{n} = \{\partial G/\partial x, \partial G/\partial y, \partial G/\partial z\}$ – нормаль к поверхности границы $S_T$, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор, проведенный из начала координат в рассматриваемую точку. Условие (2.12) можно переписать в виде

$$v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T.$$

Если же стенка движется со скоростью $\mathbf{V}_T$, то нормальная составляющая скорости частиц жидкости в любой точке на поверхности должна равняться нормальной составляющей скорости движения поверхности:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = (\mathbf{V}_T, \mathbf{n}) \quad \mathbf{r} \in S_T. \tag{2.13}$$

При условии, что поверхность является свободной, уравнение поверхности зависит от времени: $G(t, x, y, z) = 0$. Частицы жидкости на свободной поверхности $S_p$ движутся вместе с поверхностью, не пересекая ее. Поэтому если частица в момент времени $t$ находилась на поверхности в точке $(x, y, z)$, то в следующий момент $t + \Delta t$ она окажется в точке $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, но все еще будет находиться на поверхности:

$$G(t + \Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = 0, \quad \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} \in S_p.$$

Используя разложение в ряд Тейлора, и ограничиваясь членами первого порядка, получаем

$$G(t, x, y, z) + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial G}{\partial z}\Delta z = 0, \quad \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} \in S_p.$$

Учитывая уравнение свободной поверхности и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ окончательно находим *кинематическое условие на свободной поверхности*

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} v_x + \frac{\partial G}{\partial y} v_y + \frac{\partial G}{\partial z} v_z = 0, \quad \mathbf{r} \in S_p.$$

При переходе через границу свободной поверхности давление не испытывает скачок. Если $\mathbf{n}_1$ -нормаль к свободной поверхности $S_p$, а $\mathbf{p}_1$ - соответствующее напряжение, то $\mathbf{p}_1 = -p_0\mathbf{n}_1$, где $p_0$ – атмосферное давление. Пусть $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$. Тогда напряжение $\mathbf{p}_2$, действующее в сечении с нормалью $\mathbf{n}_2$, равно $\mathbf{p}_2 = -p_0\mathbf{n}_2$. Таким образом, получаем *динамическое условие на свободной поверхности*

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{n}_2) = -p_0, \quad \mathbf{r} \in S_p .$$

При изучении движений идеальной жидкости в замкнутом объеме во всех внутренних точках области должно выполняться условие ограниченности решений гидродинамической системы (*внутренняя задача гидроаэродинамики*). Если область содержит бесконечно удаленные точки (*внешняя задача гидроаэродинамики*), то на бесконечности также должно выполняться условие ограниченности решений. Например, в случае задачи об обтекании тела поступательно движущимся потоком скорость жидкости на бесконечности обязана стремиться к скорости невозмущенного потока. Если же рассматривается задача о движении тела в невозмущенной жидкости, то на бесконечности скорость движения жидкости должна стремиться к нулю.

**3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКИХ ВЯЗКИХ СРЕД. 3.1. Понятие вязкой жидкости. Закон Навье-Стокса.** Взаимодействие частиц жидкости характеризуется напряжениями поверхностных сил, то есть силами взаимодействия, отнесенными к единице площади соприкосновения жидких частиц. Как уже отмечалось ранее, в случае идеальной жидкости вектор напряжения $\mathbf{p}_n$ имеет только нормальную к поверхности соприкосновения составляющую, направленную вглубь выделенного объема. Таким образом, взаимодействие частиц идеальной жидкости характеризуется давлениями. При движении *вязкой жидкости* наряду с нормальной составляющей напряжения возникает касательная составляющая, называемая *силой внутреннего трения (силой вязкости),* которая проявляет себя в виде сопротивления жидкости процессу деформации.

Рассмотрим движущуюся жидкость. Пусть $O-$некоторая точка (полюс) внутри малого объема с жидкостью $V$, $A-$ точка из окрестности полюса, $\boldsymbol{\rho} = \{\xi, \eta, \zeta\}-$ вектор, проведенный из точки $O$ в точку $A$. Тогда скорость $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ точки $A$ представима в виде векторной суммы *(теорема Коши-Гельмгольца [2])*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 , \tag{3.1}$$

где $\mathbf{v}_0$ - скорость движения полюса; $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} rot\mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho}$ - скорость вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс $O$; $\mathbf{v_2} = \{v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}\}-$ скорость деформационного процесса, где $v_{2x} = \varepsilon_1 \xi + \frac{1}{2}\theta_3 \eta + \frac{1}{2}\theta_2 \zeta, \quad v_{2y} = \frac{1}{2}\theta_3 \xi + \varepsilon_2 \eta + \frac{1}{2}\theta_1 \zeta,$ $v_{2z} = \frac{1}{2}\theta_2 \xi + \frac{1}{2}\theta_1 \eta + \varepsilon_3 \zeta$ , $\varepsilon_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \theta_1 = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z},$ $\theta_2 = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \theta_3 = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}.$ Таблица из девяти величин

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

называется *тензором скоростей деформации.* Тензор $\Phi$ полностью описывает динамику деформационного процесса, происходящего в малой окрестности выбранного в жидкости полюса. Если все девять компонентов тензора обращаются в ноль, то скорость деформации равна нулю и, следовательно, скорость всякой частицы из окрестности точки $O$ представима известной формулой для твердых тел: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, где $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} rot\mathbf{v} \times \boldsymbol{\rho}$ - вектор угловой скорости.

Далее, вернемся к формуле (1.3) и составим из проекций векторов $\mathbf{p}_X$, $\mathbf{p}_Y$ и $\mathbf{p}_Z$ на координатные оси следующую таблицу

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix},$$

которая определяет *тензор напряжений.* В случае идеальной жидкости недиагональные компоненты тензора напряжений $\Pi$ обращаются в ноль, так как $\mathbf{p}_X = \mathbf{e}_x p_{xx} = -\mathbf{e}_x p$, $\mathbf{p}_Y = -\mathbf{e}_y p$, $\mathbf{p}_Z = -\mathbf{e}_z p$. Поэтому

$$\Pi^0 = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Если вязкая жидкость покоится, то напряженное состояние в ней также характеризуется тензором $\Pi^0$. При своем движении вязкая среда деформируется, причем процесс деформации сопровождается возникновением дополнительных напряжений, в частности касательных. Величины касательных напряжений тем больше, чем быстрее деформируется среда, т.е. чем быстрее разные слои жидкости движутся друг относительно друга. Таким образом, изменение напряжений в движущейся жидкости непосредственно связано со скоростью деформационного процесса. Это позволяет высказать предположение о существовании определенной связи между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформации. Такую связь устанавливает *закон Навье-Стокса.*

В основу *модели вязкой жидкости* положены следующие предположения:

- составляющие тензора напряжений при стремлении вязкости к нулю должны стремиться к составляющим тензора напряжений в идеальной жидкости;

- жидкость изотропна (физические свойства жидкости одинаковы по всем направлениям);

- компоненты тензора напряжений есть линейные функции компонентов тензора скоростей деформации.

В соответствии с первым утверждением тензор напряжений представим в виде

$$\Pi = \Pi^0 + \Pi' = -pE + \Pi', \tag{3.2}$$

где $E$ - единичный тензор, $\Pi'$ - вязкий тензор напряжений, компоненты которого стремятся к нулю, если вязкость стремится к нулю. Компоненты тензора $\Pi'$ предполагаются линейными функциями компонентов тензора $\Phi$. Наиболее общий вид такой зависимости выражается формулой [4]

$$\Pi' = \lambda E div\mathbf{v} + 2\mu\Phi, \tag{3.3}$$

где $\lambda$ и $\mu$ - скалярные характеристики среды, присутствие которых в (3.3) отражают свойство изотропности среды. Коэффициент $\mu$ называют *первым коэффициентом вязкости,* $\lambda$ *- вторым коэффициентом вязкости.* Соотношения (3.2), (3.3) представляют собой *закон Навье-Стокса.* Представим (3.3) покомпонентно

$$
\begin{aligned}
&p_{xx} = -p + \lambda div\mathbf{v} + 2\mu\varepsilon_1, \quad p_{xy} = p_{yx} = \mu\theta_3, \\
&p_{yy} = -p + \lambda div\mathbf{v} + 2\mu\varepsilon_2, \quad p_{xz} = p_{zx} = \mu\theta_2, \\
&p_{zz} = -p + \lambda div\mathbf{v} + 2\mu\varepsilon_3, \quad p_{yz} = p_{zy} = \mu\theta_1.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

В рамках рассматриваемой модели часто полагают $\mu = const$ и $\lambda = -2/3\,\mu$, считая, что гидродинамическое давление $p$ равно среднему арифметическому от трех нормальных давлений $p_{xx}$, $p_{yy}$ и $p_{zz}$, взятому со знаком минус

$$p = -\frac{1}{3}\left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right).$$

Из (3.4) непосредственно следует, что вязкий тензор $\Pi'$ обращается в ноль, если жидкость покоится или движется с постоянной скоростью, а силы трения возникают только в тех случаях, когда различные части жидкости движутся с разными скоростями.

**3.2. Уравнение Навье-Стокса.** Рассмотрим уравнение (1.2). Применим преобразования Гаусса (2.2) к компонентам вектора $\mathbf{p}_x$:

$$\oint_S p_{xx}\cos(\mathbf{n},\hat{\ }\mathbf{e}_x)ds = \int_V \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}d\tau, \quad \oint_S p_{xy}\cos(\mathbf{n},\hat{\ }\mathbf{e}_x)ds = \int_V \frac{\partial p_{xy}}{\partial x}d\tau,$$

$$\oint_S p_{xz}\cos(\mathbf{n},\hat{\ }\mathbf{e}_x)ds = \int_V \frac{\partial p_{xz}}{\partial x}d\tau.$$

Умножая первое выражение на $\mathbf{e}_x$, второе – на $\mathbf{e}_y$, третье – на $\mathbf{e}_z$ и складывая результаты умножения, имеем $\oint_S \mathbf{p}_x\cos(\mathbf{n},\hat{\ }\mathbf{e}_x)ds = \int_V \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x}d\tau$. Аналогично получаются равенства $\oint_S \mathbf{p}_y\cos(\mathbf{n},\hat{\ }\mathbf{e}_y)ds = \int_V \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y}d\tau$, $\oint_S \mathbf{p}_z\cos(\mathbf{n},\hat{\ }\mathbf{e}_z)ds = \int_V \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}d\tau$. Следовательно

$$
\begin{aligned}
&\oint_S \mathbf{p}_n ds = \oint_S \left(\mathbf{p}_x\cos(\mathbf{n},\hat{\ }\mathbf{e}_x) + \mathbf{p}_y\cos(\mathbf{n},\hat{\ }\mathbf{e}_y) + \mathbf{p}_z\cos(\mathbf{n},\hat{\ }\mathbf{e}_z)\right)ds = \\
&= \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}\right)d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Подставляя (3.5) в (1.2), в силу произвольности объема $V$ приходим к уравнению

$$\mathbf{F} - \mathbf{w} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{3.6}$$

или покомпонентно

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right),\\
\frac{dv_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right),\\
\frac{dv_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Преобразуем уравнения (3.7), учитывая представления (3.4) для компонентов тензора напряжений. Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}div\mathbf{v} + 2\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \\
&+ \mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}div\mathbf{v} + \\
&+ \mu\Delta v_x + \mu\frac{\partial}{\partial x}div\mathbf{v} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}div\mathbf{v} + \mu\Delta v_x.
\end{aligned}$$

Аналогично преобразуются правые части в двух других уравнениях из системы (3.7). Подставляя эти соотношения в (3.7) и учитывая, что $\nu = \mu/\rho$ (кинематический коэффициент вязкости), приходим к *уравнениям Навье-Стокса*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}div\mathbf{v} + \nu\Delta v_x,\\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial y}div\mathbf{v} + \nu\Delta v_y,\\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial z}div\mathbf{v} + \nu\Delta v_z,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

или (*векторная форма представления)*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}gradp + \frac{\nu}{3}graddiv\mathbf{v} + \nu\Delta\mathbf{v}.$$

**3.3. Модели жидких вязких сред.** Если среда однородна и $\mu = const$, то уравнения Навье-Стокса принимают вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Объединяя (3.9) с уравнением непрерывности

$$div\mathbf{v} = 0, \tag{3.10}$$

получаем замкнутую систему из четырех скалярных уравнений относительно четырех неизвестных функций: $v_x$, $v_y$, $v_z$ и $p$. Если несжимаемая жидкость неоднородна, то к уравнениям (3.9), (3.10) следует добавить уравнение для определения плотности среды (2.6), которое замыкает соответствующую систему.

В общем случае объединяя уравнение непрерывности (1.5) с уравнениями Навье-Стокса (3.8), приходим к незамкнутой системе, которую можно замкнуть, если воспользоваться законом сохранения энергии с целью получения недостающего уравнения. Интегральная форма закона сохранения энергии для движущегося объема жидкости была получена ранее и давалась формулой (2.8). Вычислим второе слагаемое в правой части (2.8), имеющее смысл работы поверхностных сил за единицу времени. Для этого воспользуемся формулой (1.3) и преобразованиями Гаусса (2.2):

$$\begin{aligned}
&\oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} dS = \oint_S \left[ \mathbf{p}_x \mathbf{v} \cos(\mathbf{n}, \hat{\ } \mathbf{e}_x) + \mathbf{p}_y \mathbf{v} \cos(\mathbf{n}, \hat{\ } \mathbf{e}_y) + \mathbf{p}_z \mathbf{v} \cos(\mathbf{n}, \hat{\ } \mathbf{e}_z) \right] ds = \\
&= \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{p}_x \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{p}_y \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{p}_z \mathbf{v}) \right] d\tau.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в (2.8), получаем

$$\begin{aligned}
&\int_V \rho \left( \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt} \right) d\tau = \int_V \mathbf{F} \mathbf{v} \rho d\tau + \int_V \varepsilon \, d\tau + \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{p}_x \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{p}_y \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{p}_z \mathbf{v}) \right] d\tau + \\
&+ \int_V div(kgradT) d\tau.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

В силу произвольности выбора объема $V$ в (3.12) и непрерывности подынтегральных функций, приходим к уравнению

$$\rho \mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\rho\frac{dE}{dt}=\varepsilon+div(kgradT)+\rho\mathbf{F}\mathbf{v}+\mathbf{v}\left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z}\right)+\mathbf{p}_x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+\mathbf{p}_y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+\mathbf{p}_z\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}.$$

Принимая во внимание уравнение движения (3.6), имеем искомое *уравнение притока тепла*

$$\rho\frac{dE}{dt}=\varepsilon+div(kgradT)+\mathbf{p}_x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}+\mathbf{p}_y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}+\mathbf{p}_z\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \qquad (3.13)$$

Если в систему уравнений (1.5), (3.8), (3.13) включить уравнение состояния среды (2.10) то, считая, что плотность внутренней энергии $E=\Psi(T,p)$ полностью определяется параметрами $T$ и $p$, приходим к замкнутой системе уравнений.

В системе (1.5), (3.8), (3.13), (2.10) предполагается постоянство коэффициента вязкости. Для многих жидких сред такое допущение является вполне удовлетворительным. В общем случае зависимость коэффициента вязкости газов от температуры дается *формулой Сатерленда*

$$\mu=\frac{C_1}{T+T_0}T^{\frac{3}{2}}, \quad T_0\approx 114^0 K,$$

или степенным законом вида

$$\mu=C_2\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\omega}, \quad 0.5\le\omega\le 1,$$

где $C_i$ – некоторые константы, $i=1,2$.

Итак, *модель вязкой сжимаемой теплопроводящей жидкости,* подчиняющейся закону Фурье, включает следующие элементы:

- уравнения Навье-Стокса (3.8);
- уравнение непрерывности (1.5);
- уравнение притока тепла (3.13);
- уравнение состояния (2.10);
- выражение для плотности внутренней энергии через параметры $T$ и $p$;
- значения коэффициента вязкости $\mu$ и коэффициента теплопроводности $k$.

Плотность массовых сил $\mathbf{F}$ и интенсивность внутренних источников тепла $\varepsilon$ являются внешними параметрами и должны быть заданы.

**3.4. Начально-краевые задачи.** *Внешняя задача гидроаэродинамики.* Одной из основных проблем механики жидкостей является задача обтекания тела конечного размера однородным неограниченным потокам. Пусть $S_T$ - поверхность тела, $D_e$ - внешняя часть пространства по отношению к телу. Требуется найти решение системы

(3.9), (3.10) соответствующее течению, переходящему на бесконечности в однородный поток, движущийся со скоростью $U_\infty$ вдоль оси $X$. На бесконечности имеем условие

$$\mathbf{v} \to \mathbf{e}_x U_\infty, \quad \mathbf{r} \to \infty. \tag{3.14}$$

Так как жидкость вязкая, то на поверхности $S_T$ выполняется условие прилипания частиц жидкости к поверхности:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_T, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad t \ge t_0. \tag{3.15}$$

Если обтекаемое тело покоится, то, очевидно, справедливо граничное условие

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad t \ge t_0. \tag{3.16}$$

В уравнения (3.9) входят первые производные по времени. Поэтому следует задать начальное распределение скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(x, y, z), \quad \mathbf{r} \in S_T \cup D_e, \quad t = t_0. \tag{3.17}$$

Совокупность уравнений (3.9), (3.10), краевых условий (3.14), (3.15) и начальных условий (3.17) составляют *нестационарную начально- краевую задачу об обтекании тела вязким потоком.*

*Внутренняя задача.* Внутренняя задача ставится для течения внутри замкнутой области $D$. Пусть $\partial D$ - непроницаемая граница области $D$. Тогда требуется найти решение задачи (3.9), (3.10) с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} = \mathbf{V}_T, \quad \mathbf{r} \in \partial D, \quad t \ge t_0, \\ &\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(x, y, z), \quad \mathbf{r} \in \partial D \cup D, \quad t = t_0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Кроме этого, следует принять во внимание условие ограниченности решения в области $D$

$$|\mathbf{v}| < \infty, \quad \mathbf{r} \in D, \tag{3.19}$$

поскольку именно такие решения являются физически обоснованными.

*Условия на поверхности раздела.* Рассмотрим воображаемую поверхность $S_p$, разделяющую жидкости с различными физическими свойствами, образующие единый поток. Тогда на поверхности $S_p$ выполняются условия

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{r} \in S_p, \tag{3.20}$$

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{n}_2), \quad |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|, \quad \mathbf{r} \in S_p, \tag{3.21}$$

где $\mathbf{n}_1$ -нормаль к одной из сторон поверхности $S_p$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{v}_1$ - напряжение и скорость частиц на соответствующей стороне поверхности $S_p$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{-n}_1$. Условие (3.20) называется *кинематическим* и выражает равенство скоростей соприкасающихся частиц на поверхности раздела при отсутствии перемешивания жидкостей. Условие (3.21), называемое *динамическим условием,* выражает равенство нормальных и касательных напряжений по обе стороны от поверхности раздела.

Поскольку на свободной поверхности при отсутствии внешних касательных напряжений частицы жидкости совершают движения, перпендикулярные к поверхности раздела, то

$$p_{n_S} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_p, \tag{3.22}$$

где $p_{n_S}$ - проекция напряжения на любое касательное к свободной поверхности $S_p$ направление. Если $\mathbf{n}$ - нормаль к свободной поверхности, то напряжение $\mathbf{p}$ на свободной поверхности равно $\mathbf{p} = -p_0\mathbf{n}$, где $p_0$ – величина атмосферного давления. Поэтому

$$(\mathbf{p}, \mathbf{n}) = -p_0, \quad \mathbf{r} \in S_p. \tag{3.23}$$

Таким образом, условия (3.22), (3.23) представляют собой *динамическое условие на свободной поверхности вязкой жидкости*. *Кинематическое условие на свободной поверхности* формулируется следующим образом: скорость жидких частиц на свободной поверхности совпадает со скоростью перемещения свободной поверхности.

**4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ И ПРИМЕРЫ. 4.1. Основные свойства потенциальных движений идеальной несжимаемой жидкости в односвязных областях.** (*Темы: “Свойства гармонических функций (принцип максимума, теорема о среднем)”, “Простейшие внутренние краевые задачи для уравнения Лапласа”.)*

В соответствии с теоремой Коши-Гельмгольца (3.1) движения жидкости можно классифицировать следующим образом: *безвихревые (потенциальные, консервативные)* и *вихревые. Потенциальным движением* называется движение, при котором во всем объеме с жидкостью выполняется условие $rot\mathbf{v} \equiv 0$ (нет локального вращательного движения). *Вихревым движением* называется движение, для которого условие $rot\mathbf{v} = 0$ выполняется не во всем объеме. В случае потенциального движения компоненты вектора $rot\mathbf{v}$ равны нулю:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \tag{4.1}$$

Соотношения (4.1) являются необходимым и достаточным условием существования потенциала скорости $\varphi(t,x,y,z)$, так что справедливо представление: $\mathbf{v} = grad\varphi$.

Рассмотрим основные свойства безвихревого движения несжимаемой жидкости внутри односвязной области. В этом случае уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + divgrad\varphi = 0$$

или

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \Delta\varphi = 0 .$$

Если жидкость несжимаема, то $\Delta\varphi = 0$ и функция $\varphi(t,x,y,z)$ является *гармонической* по пространственным переменным.

**4.1.1.** Опираясь на принцип максимума [5] можно доказать следующее утверждение: *при потенциальном движении несжимаемой жидкости в односвязной области* $D$ *скорость не может принимать максимальное значение внутри* $D$.

Заметим, что относительно минимального значения такое утверждение сформулировать нельзя.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что во внутренней точке $A$ скорость достигает максимального значения. Направим в точке $A$ ось $OX$ вдоль скорости в этой точке в данный момент времени. Тогда

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_A = v_A = v_{\max} .$$

Так как движение потенциально, то

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 .$$

Продифференцировав это равенство по $x$, приходим к выводу, что функция $\partial\varphi/\partial x$ также является гармонической. По принципу максимума $\partial\varphi/\partial x$ не может достигать максимального значения в точке $A$. Следовательно, существует точка $B$, из окрестности точки $A$, для которой имеет место неравенство:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_B > \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_A = v_A .$$

Очевидно, что

$$v_B^2 = \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]_B > v_A^2 .$$

Получаем противоречие с предполагаемым ранее.

**4.1.2.** Из теоремы о среднем [5] следует утверждение: *при потенциальном течении несжимаемой жидкости значение потенциала в точке* $M_0$ *равно среднему значению потенциала на поверхности любой сферы с центром в точке* $M_0$*, принадлежащей области* $D$.

Аналогичное утверждение имеет место для вектора скорости в точке $M_0$, т.к. компоненты вектора скорости $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ являются гармоническими функциями. Следовательно

$$\mathbf{v}(M_0,t) = \mathbf{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0,t) + \mathbf{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0,t) + \mathbf{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0,t) =$$

$$= \frac{1}{S_0}\oint_S \left( \mathbf{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x}(P,t) + \mathbf{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y}(P,t) + \mathbf{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial x}(P,t) \right) ds = \frac{1}{S_0}\oint_S \mathbf{v}(P,t) ds,$$

где $P \in S$, $S_0$ – площадь сферы $S$ с центром в точке $M_0$.

**4.3.1.** В настоящем пособии рассматриваются течения, характеризуемые непрерывными полями скоростей. Поскольку в случае потенциального движения $\mathbf{v} = grad\varphi$, то требование непрерывности скорости налагает определенные ограничения на гладкость функции $\varphi$. В связи с этим возникает необходимость изучения существования именно классических решений краевых задач, определяющих потенциал течения.

Из теоремы единственности решения внутренней задачи Дирихле [5] следует утверждение: *если потенциал сохраняет постоянное значение на границе области* $D$*, то он остается постоянным во всех внутренних точках области.*

В самом деле, если потенциал имеет на границе постоянное значение $C$, то он удовлетворяет в $D$ задаче Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{в } D,$$
$$\varphi\big|_{\partial D} = C, \quad P \in \partial D,$$

которая имеет классическое решение $\varphi = C$, являющееся единственным в силу теоремы единственности.

Заметим, что доказанное утверждение также следует из принципа максимума.

Докажем следующие два утверждения.

*В односвязном объеме с несжимаемой жидкостью, который ограничен непроницаемыми твердыми стенками, не может существовать потенциальное движение.*

Допустим, что жидкость способна совершать потенциальное движение при заданных условиях на границе. Найдем потенциал, отвечающий такому движению.

Очевидно, что на границе $\partial D$ объема с жидкостью выполняется условие равенства нулю нормальной компоненты скорости:

$$v_n\big|_{\partial D} = 0.$$

Значит

$$v_n\big|_{\partial D} = \mathbf{vn}\big|_{\partial D} = \mathbf{n}\,grad\varphi\big|_{\partial D} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\partial D} = 0,$$

где **n** - внешняя нормаль по отношению к $D$. Следовательно, потенциал в области $D$ удовлетворяет однородной краевой задаче Неймана для оператора Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{в } D,$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0$$

которая имеет классическое решение $\varphi(M) = C$, причем постоянная $C$ произвольна. Отсюда приходим к выводу, что жидкость в $D$ покоится.

*Если односвязный объем с несжимаемой жидкостью ограничен неподвижной стенкой, причем на одной части границы потенциал имеет постоянное значение, а другая часть границы непроницаема, то внутри объема не может существовать безвихревое движение.*

Допустим, что жидкость в области $D$ совершает потенциальное движение. Тогда потенциал будет удовлетворять краевой задаче

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{в } D, \tag{4.2}$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial D_1} = 0, \quad \varphi\big|_{\partial D_2} = C, \quad \partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial D. \tag{4.3}$$

Очевидно, что задача (4.2), (4.3) имеет классическое решение $\varphi = C$. Докажем его единственность.

Пусть существует еще одно классическое решение $\varphi = \varphi_0 \neq C$ задачи (4.2), (4.3). Тогда функция $\overline{\varphi} = \varphi_0 - C$ удовлетворяет однородной задаче

$$\Delta\overline{\varphi} = 0, \quad M \in D,. \tag{4.4}$$
$$\left.\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}\right|_{\partial D_1} = 0, \quad \overline{\varphi}\big|_{\partial D_2} = 0, \quad \partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial D. \tag{4.5}$$

Полагая в первой формуле Грина [5]

$$\int_D v\Delta u d\tau = \oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_D \nabla u \nabla v d\tau$$

$u = v = \overline{\varphi}$, получим

$$\int_D \overline{\varphi}\Delta\overline{\varphi} d\tau = \oint_{\partial D} \overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}ds - \int_D (\nabla\overline{\varphi})^2 d\tau$$

или

$$\int_D \overline{\varphi}\Delta\overline{\varphi} d\tau = \int_{\partial D_1} \overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}ds + \int_{\partial D_2} \overline{\varphi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial n}ds - \int_D (\nabla\overline{\varphi})^2 d\tau .$$

В силу уравнения (4.4) и граничных условий (4.5), имеем

$$\int\limits_D (\nabla \overline{\varphi})^2 d\tau = 0 \, .$$

Отсюда находим, что $grad\overline{\varphi} = 0$ в $D$. Следовательно, $\overline{\varphi} \equiv 0$ в $\overline{D}$, что и требовалось доказать.

**4.2. Плоские задачи о движении тел в идеальной жидкости.** *(Тема: “Примеры постановок внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа”.)*

Хорошо изученным классом течений жидкости являются плоские потенциальные течения. Если при движении жидкости линии тока (линии, в каждой точке которых в данный момент времени вектор скорости является касательным) представляют собой плоские кривые, расположенные в параллельных плоскостях, а частицы, лежащие на одной прямой, перпендикулярной к этим плоскостям, совершают одинаковые движения, то такое движение жидкости называется *плоскопараллельным* или *плоским.* Предположим, что жидкость совершает плоское движение параллельное плоскости $XY$. Тогда все характеристики движения будут зависеть от двух пространственных переменных. Если при этом жидкость несжимаема, то справедливо уравнение непрерывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \, .$$

Поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial (-v_y)}{\partial y} \, . \tag{4.6}$$

Дифференциальное уравнение линий тока имеет вид

$$\frac{dx}{v_x(x,y,t)} = \frac{dy}{v_y(x,y,t)}$$

или

$$-v_y dx + v_x dy = 0 \, . \tag{4.7}$$

Выполнение равенства (4.6) является необходимым и достаточным условием того, что выражение (4.7) представляет собой полный дифференциал, то есть, что существует такая скалярная функция $\psi(x,y,t)$, для дифференциала которой справедливо представление

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy = 0 \, , \tag{4.8}$$

причем

$$\partial\psi/\partial x = -v_y = -\partial\varphi/\partial y, \quad \partial\psi/\partial y = v_x = \partial\varphi/\partial x.$$

Интегрируя (4.8), получаем

$\psi(x, y, t) = const$ вдоль линии тока.

Функция $\psi(x, y, t)$ называется *функцией тока* и вводится для описания плоских потоков.

Если плоское движение потенциально, то компоненты вихря скорости равны нулю:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно, функция тока является гармонической функцией по пространственным переменным.

**4.2.1.** Пусть цилиндрическое тело с произвольным гладким сечением $\gamma$ движется в идеальной жидкости, причем обтекание будем считать потенциальным. При этом функция тока является гармонической во внешней, по отношению к цилиндру, области $D_e$:

$$\Delta\psi = 0, \quad (x, y) \in D_e. \tag{4.9}$$

Если тело движется в жидкости, которая покоится на бесконечности, то на бесконечности выполняются условия

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \to 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} \to 0, \quad (x, y) \to \infty. \tag{4.10}$$

Поскольку сечение поверхности цилиндра является гладкой кривой, то в каждой точке контура $\gamma$ определена нормаль $\mathbf{n}$ и касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$. Обозначим через $\theta$ угол между вектором $\boldsymbol{\tau}$ и осью $X$ (рис. 1).

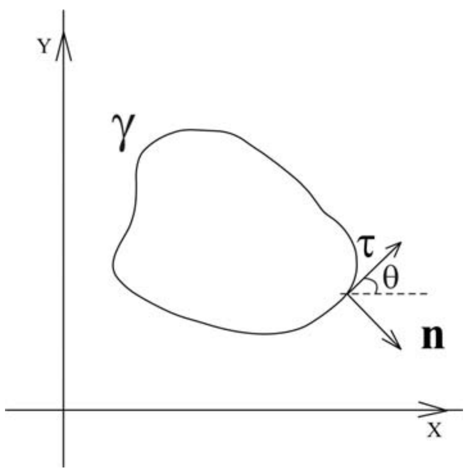


Рис. 1.

Тогда для нормальной составляющей скорости движения частиц жидкости на границе имеем выражение:

$$v_n\big|_\gamma = \left( v_x \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_x}) + v_y \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{e}_y}) \right)\Big|_\gamma = \left( v_x \sin\theta + v_y \sin(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e}_y}) \right)\Big|_\gamma =$$

$$= \left( v_x \sin\theta - v_y \cos\theta \right)\big|_\gamma .$$

Далее, если $ds$ - бесконечно малый элемент кривой $\gamma$, а $dx$ и $dy$ - проекции $ds$ на координатные оси, то, вводя натуральный параметр $s$, определяемый как расстояние от некоторой фиксированной точки на $\gamma$ до произвольной, окончательно находим

$$v_n\big|_\gamma = \left( v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds} \right)\Big|_\gamma = \left( \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} \right)\Big|_\gamma = \frac{d\psi}{ds}\Big|_\gamma .$$

Пусть цилиндр движется со скоростью $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}$. Тогда на поверхности цилиндра имеет место граничное условие (2.13)

$$v_n\big|_\gamma = (\mathbf{u}, \mathbf{n})\big|_\gamma = \left( u_x \sin\theta - u_y \cos\theta \right)\big|_\gamma$$

или

$$\frac{d\psi}{ds}\Big|_\gamma = \left( u_x \sin\theta - u_y \cos\theta \right)\big|_\gamma . \qquad (4.11)$$

Произвольное движение цилиндра можно разложить на поступательное движение со скоростью $\mathbf{U}^{\text{пост}} = \{U, V\}$ и вращательное движение, осуществляемое вокруг начала координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Тогда, если $\mathbf{u}$ - скорость движения некоторой точки на контуре $\gamma$, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор, проведенной из начала координат к выбранной точке, то

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}^{\text{пост}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] .$$

Следовательно

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x .$$

Поэтому, в силу (4.11)

$$\frac{d\psi}{ds}\Big|_\gamma = \left[ (U - \omega y)\sin\theta - (V + \omega x)\cos\theta \right]\big|_\gamma = \left[ (U - \omega y)\frac{dy}{ds} - (V + \omega x)\frac{dx}{ds} \right]\Big|_\gamma .$$

Интегрируя вдоль $\gamma$, находим

$$\psi\big|_\gamma = Uy - Vx - \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) + const, \quad (x, y) \in \gamma. \qquad (4.12)$$

Таким образом, для определения функции тока получаем внешнюю задачу Дирихле (4.9), (4.10), (4.12) для уравнения Лапласа, куда время входит как параметр. Заметим, что функция тока, также как и потенциал скорости, определяется с точностью до аддитивной постоянной.

**4.2.2.** Задачу о движении цилиндра можно решать путем поиска функции $\varphi(x,y)$. Вне контура $\gamma$ потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad (x,y)\in D_e . \tag{4.13}$$

На самом контуре выполняется условие (2.13)

$$\begin{aligned} &v_n\big|_\gamma = (\mathbf{n}, grad\varphi)\,\big|_\gamma = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\gamma = (\mathbf{u},\mathbf{n})\big|_\gamma = \\ &= (U-\omega y)n_1(x,y) + (V+\omega x)n_2(x,y), \quad (x,y)\in\gamma, \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $n_i(x,y)$ – направляющие косинусы единичной нормали $\mathbf{n}$, которые являются известными функциями, т.к. контур $\gamma$ задан. Поскольку на бесконечности жидкость покоится, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\to 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\to 0, \quad (x,y)\to\infty . \tag{4.15}$$

Следовательно, для определения потенциала скорости получаем внешнюю задачу Неймана (4.13)-(4.15) для уравнения Лапласа.

**4.3. Стационарные течения вязкой однородной жидкости в трубах.**

**4.3.1. Течения в трубах с круговым и эллиптическим сечениями.** *(Тема: “Краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в круге”.)* Рассмотрим ламинарное (слоистое) течение однородной вязкой жидкости в трубе с гладким сечением, вызванное продольным градиентом давления, независящим от времени: $\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial z}\neq 0$. Будем считать, что ось $Z$ направлена вдоль оси трубы по течению жидкости. Типичным свойством ламинарных течений является изменение характера течения только в связи с изменением внешних условий и внешних сил. В остальных случаях течение сохраняет свой спокойный характер. При изменении параметров трубы, скорости течения или физических характеристик жидкости движение может стать беспорядочным (турбулентным).

Для определения распределения скоростей в трубе имеем систему уравнений гидродинамики, которая следует из системы (3.9), (3.10)

$$\begin{aligned} &\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial p}{\partial z}, \\ &\frac{\partial p}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

с граничными условиями (3.16), (3.19)

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}=0, \quad \mathbf{r}\in S_T, \\ &|\mathbf{v}|<\infty, \quad \mathbf{r}\in D, \end{aligned} \tag{4.17}$$

где $D$ - область, расположенная внутри поверхности трубы $S_T$. Из системы (4.16) следует, что $v_z = v_z(x,y), \quad p = p(z)$.

Наиболее важным частным случаем является течение по трубе с круговым сечением радиуса $a$. Переходя в полярную систему координат $(r,\varphi)$, из системы (4.16), (4.17) получаем краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}, \quad 0 \le r < a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ &v_z\big|_{r=a} = 0, \quad |v_z| < \infty. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Далее, так как $p = p(z)$, а $v_z = v_z(r,\varphi)$, то выполнение уравнения из системы (4.18) возможно, если $\frac{dp}{dz} = const$. Решение задачи (4.18) ищем в виде $v_z(r,\varphi) = w(r,\varphi) + \frac{r^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}$, где функция $w(r,\varphi)$ удовлетворяет краевой задаче Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta w = 0, \quad 0 \le r < a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad w\big|_{r=a} = -\frac{a^2}{4\mu}\frac{dp}{dz}, \quad |w| < \infty.$$

Решение краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри круга, ограниченное при $r = 0$, дается формулой [5]

$$w(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right), \quad A_n, B_n = const.$$

Учитывая граничное условие при $r = a$, находим $A_0 = -\frac{a^2}{2\mu}\frac{dp}{dz}, \quad A_n = 0, \quad n \ne 0, \quad B_n = 0$.

Следовательно,

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(a^2 - r^2\right). \tag{4.19}$$

Функция (4.19) является классическим решением задачи (4.18), и, значит, единственным ее решением в силу теоремы единственности [5].

Течение с профилем скорости (4.19) называется *плоскопараллельным течением Пуазейля.* Если $p_1$ и $p_2$ - давления в двух точках, отстоящих на расстояние $l$ друг от друга, то

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p_1 - p_2}{l}.$$

Поэтому распределение (4.19) можно переписать в виде

$$v_z(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}\left(a^2 - r^2\right).$$

Другое частное решение задачи (4.16), (4.17) будем искать в виде

$$v_z(x,y) = Ax^2 + By^2 + C\,. \qquad (4.20)$$

Подставляя (4.20) в (4.16), получаем

$$(2A + 2B) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\,. \qquad (4.21)$$

Условие на поверхности трубы

$$v_z\big|_{S_T} = \left(Ax^2 + By^2 + C\right)\Big|_{l_T} = 0$$

означает, что сечением $l_T$ трубы, для которого распределение скоростей представимо формулой (4.20), является эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

где $a^2 = -\dfrac{C}{A}$, $b^2 = -\dfrac{C}{B}$, $a$ и $b$ - полуоси эллипса. Поэтому, в соответствии с (4.21),

$$\frac{C}{a^2} + \frac{C}{b^2} = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dz}$$

или

$$C = \frac{1}{2\mu}\frac{p_1 - p_2}{l}\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}\,.$$

Следовательно, распределение скоростей при ламинарном течении в трубе с эллиптическим сечением имеет вид

$$v_z(x,y) = \frac{1}{2\mu l}\frac{(p_1 - p_2)a^2b^2}{a^2 + b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right). \qquad (4.22)$$

При $a = b$ из формулы (4.22) получаем профиль скорости (4.19) для течения Пуазейля.

**4.3.2. Течение в трубе с прямоугольным сечением и течение в плоском канале с твердыми стенками.** *(Тема: “Краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике”.)* Если сечение поверхности трубы является кусочно гладкой кривой, то процедура построения решения усложняется. Рассмотрим, например, течение в трубе, сечение которой – прямоугольник, ограниченный прямыми $y = \pm a, \quad x = \pm b$. Решение системы (4.16), (4.17) будем искать в виде

$$v_z(x,y) = -\frac{\Delta p}{2\mu l}\left(a^2 - y^2 + \overline{v}(x,y)\right).$$

Тогда функция $\bar{v}(x,y)$ определяется из краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} = 0, \\
&\bar{v}\big|_{y=\pm a} = 0, \quad \bar{v}\big|_{x=\pm b} = y^2 - a^2 .
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Частные решения уравнения (4.23), удовлетворяющие граничным условиям при $y = \pm a$, ищем в соответствии с методом разделения переменных [5]:

$$\bar{v}(x,y) = X(x)Y(y) .$$

Подставляя это представление в уравнение (4.23), находим

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda, \quad \lambda = const.$$

С учетом однородного граничного условия из системы (4.23) получаем задачу на собственные функции и собственные значения отрезка:

$$\begin{aligned}
&Y'' + \lambda Y = 0, \quad -a < y < a, \\
&Y(\pm a) = 0,
\end{aligned}$$

решение которой представимо как

$$Y(y) = C_1 \sin\sqrt{\lambda} y + C_2 \cos\sqrt{\lambda} y ,$$

где коэффициенты $C_1$ и $C_2$ определяются из системы

$$\begin{aligned}
&C_1 \sin\sqrt{\lambda} a + C_2 \cos\sqrt{\lambda} a = 0, \\
&- C_1 \sin\sqrt{\lambda} a + C_2 \cos\sqrt{\lambda} a = 0.
\end{aligned}$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если

$$\begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda} a & \cos\sqrt{\lambda} a \\ -\sin\sqrt{\lambda} a & \cos\sqrt{\lambda} a \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем дисперсионное уравнение относительно параметра $\lambda$:

$$\sin 2\sqrt{\lambda} a = 0,$$

и систему собственных значений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2a}\right)^2, \quad n = 0,1,2,...$$

Если $n = 2k, \quad k = 0,1,2,...$, то $Y_k = \sin\sqrt{\lambda_k}\, y, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2$.

Если $n = 2k+1, \quad k = 0,1,2,...$, то $Y_k = \cos\sqrt{\lambda_k}\, y, \quad \lambda_k = \left[\frac{\pi}{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]^2$.

Постоянные $C_1$ и $C_2$ положили равными единице, так как значения собственных функций определены с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что собственные функции $Y_k$ обладают свойством ортогональности на отрезке $[-a;a]$ [5]:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\sin\frac{\pi k}{a}z\sin\frac{\pi k'}{a}zdz = \delta_{kk'},\\
&\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\cos\frac{\pi}{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)z\cos\frac{\pi}{a}\left(k'+\frac{1}{2}\right)zdz = \delta_{kk'},\\
&\int_{-a}^{a}\sin\frac{\pi k}{a}z\cos\frac{\pi}{a}\left(k'+\frac{1}{2}\right)zdz = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

при любых $k$ и $k'$. Здесь $\delta_{kk'} = 1$, если $k = k'$; $\delta_{kk'} = 0$, если $k \ne k'$.

Для определения функции $X(x)$ получаем уравнение

$$X'' - \lambda_k X = 0,$$

фундаментальную систему решений которого удобно записать в виде $\left\{sh\sqrt{\lambda_k}\,x, \quad ch\sqrt{\lambda_k}\,x\right\}$. Таким образом, построены системы частных решений уравнения Лапласа

$$\begin{aligned}
&sh\frac{\pi k}{a}x\sin\frac{\pi k}{a}y, \quad sh\frac{\pi}{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)x\cos\frac{\pi}{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)y,\\
&ch\frac{\pi k}{a}x\sin\frac{\pi k}{a}y, \quad ch\frac{\pi}{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)x\cos\frac{\pi}{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)y.
\end{aligned}$$

Решение задачи (4.23) представим в виде разложения по этим частным решениям

$$\begin{aligned}
\bar{v}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg\{&\left[A_k sh\frac{\pi k}{a}x + B_k ch\frac{\pi k}{a}x\right]\sin\frac{\pi k}{a}y +\\
&+\left[C_k sh\frac{\pi}{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)x + D_k ch\frac{\pi}{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]\cos\frac{\pi}{a}\left(k+\frac{1}{2}\right)y\Bigg\},
\end{aligned}$$

где коэффициенты ряда определяются из граничных условий при $x = \pm b$:

$$y^2 - a^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[ \pm A_k sh \frac{\pi k}{a} b + B_k ch \frac{\pi k}{a} b \right] \sin \frac{\pi k}{a} y + \right.$$
$$\left. + \left[ \pm C_k sh \frac{\pi}{a}\left(k + \frac{1}{2}\right) b + D_k ch \frac{\pi}{a}\left(k + \frac{1}{2}\right) b \right] \cos \frac{\pi}{a}\left(k + \frac{1}{2}\right) y \right\}. \qquad (4.25)$$

В соответствии с теоремой разложимости Стеклова [5] функция $y^2 - a^2$ может быть представлена единственным образом в виде разложения по системе собственных функций задачи (4.24). Поэтому $A_k = 0, \quad C_k = 0$ для любого значения $k$.

Далее, умножая обе части равенства (4.25) на $\sin \frac{\pi k'}{a} y$, затем интегрируя по $y$ от $-a$ до $a$ и используя свойство ортогональности (4.24), имеем: $B_k = 0$ для любого значения $k$. Умножая обе части равенства (4.25) на $\cos \frac{\pi}{a}\left(k' + \frac{1}{2}\right) y$ и интегрируя по $y$, находим

$$\int_{-a}^{a} \left(y^2 - a^2\right) \cos \frac{\pi}{a}\left(k + \frac{1}{2}\right) y dy = a D_k ch \frac{\pi}{a}\left(k + \frac{1}{2}\right) b,$$

или

$$D_k ch \lambda_k b = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} \left(y^2 - a^2\right) \cos \lambda_k y dy = (-1)^{k+1} \frac{32 a^2}{(2k+1)^3 \pi^3}, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{a}\left(k + \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, распределение скоростей в трубе с прямоугольным сечением дается формулой

$$v_z(x, y) = -\frac{\Delta p}{2\mu l}\left[ a^2 - y^2 + \frac{32 a^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} \frac{ch \lambda_k x}{ch \lambda_k b} \cos \lambda_k y \right], \quad \lambda_k = \frac{\pi}{a}\left(k + \frac{1}{2}\right). \qquad (4.26)$$

При $b \to \infty$ из распределения (4.26) получаем распределение скоростей в плоском канале между двумя твердыми поверхностями $y = \pm a$ (плоскопараллельное течение Пуазейля):

$$v_z(x, y) = -\frac{\Delta p}{2\mu l}\left(a^2 - y^2\right).$$

**4.4. Распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении сферы.** *(Тема: "Краевая задача Неймана для уравнения Лапласа вне шара. Единственность решения внешних задач в трехмерном случае.")* Определим распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении со скоростью $\mathbf{v}_0(t)$ сферы радиуса $a$, считая обтекание сферы потенциальным. Так как движение потенциально и жидкость несжимаема, то потенциал $\varphi$ вне сферы удовлетворяет уравнению Лапласа по пространственным переменным (см. пример 4.1). Поскольку жидкость граничит с движущейся сферой, то нормальная составляющая скорости частиц жидкости на поверхности сферы равна нормальной составляющей скорости движения поверхности сферы $S$ (см. (2.13)):

$$(\mathbf{v},\mathbf{n})\big|_S = (grad\varphi,\mathbf{n})\big|_S = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_S = (\mathbf{v}_0(t),\mathbf{n})\,.$$

На бесконечности выполняется условие:

$$\mathbf{v}\to 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r}\to\infty\,.$$

Значит

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\to 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r}\to\infty\,.$$

Таким образом, для определения потенциала скорости в области $D_e$ вне движущейся сферы имеем краевую задачу

$$\Delta\varphi = 0, \quad (x,y,z)\in D_e\,,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_S = (\mathbf{v}_0(t),\mathbf{n}), \quad t\ge 0, \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\to 0 \quad \text{при} \quad (x,y,z)\to\infty\,, \tag{4.28}$$

куда $t$ входит как параметр.

Выберем сферическую систему координат $(r,\theta,\lambda)$, $0\le r<+\infty$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\lambda\le 2\pi$ так, чтобы начало отсчета совпадало с центром сферы, а угол $\theta$ совпадал с углом между направлением движения сферы и направлением нормали к поверхности (рис. 2).

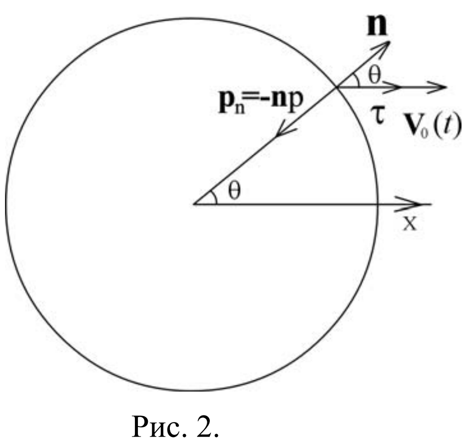


Рис. 2.

В каждый момент времени $t = t_0$ можно определить распределение скоростей в жидкости относительно этой системы координат, решив задачу (4.27), (4.28) при фиксированном значении $t = t_0$. В выбранной системе координат система (4.27), (4.28) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}=0,\quad (r,\theta,\lambda)\in D_e,\\
&\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}=v_0(t_0)\cos\theta,\quad 0<\theta<\pi,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial r},\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\to 0,\quad r\to\infty.
\end{aligned}\tag{4.29}$$

Исследуем разрешимость задачи (4.27), (4.28) при каждом фиксированном $t$. Покажем, что для двух функций $\varphi$ и $u$, непрерывных вместе с первыми производными во внешней области $D_e \cup S$, где $S -$ граница $D_e$, имеющих непрерывные вторые производные в $D_e$ и удовлетворяющих условию на бесконечности (4.28), справедлива 1-я формула Грина.

Окружим поверхность $S$ сферой $\Sigma_R$ достаточно большого радиуса $R$. Область между $S$ и $\Sigma_R$ обозначим $D_R$. В области $D_R$ справедлива 1-я формула Грина

$$\int_{D_R} u\Delta\varphi d\tau = \oint_S u\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds + \oint_{\Sigma_R} u\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma - \int_{D_R}\nabla u\nabla\varphi d\tau.$$

Очевидно, что

$$\oint_{\Sigma_R} u\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma = \oint_{\Sigma_R} u\left(n_1(P)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+n_2(P)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+n_3(P)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\sigma \to 0,\quad R\to\infty,\quad P\in\Sigma_R,$$

в силу выполнения условия (4.28). Здесь $n_i(P) -$ направляющие косинусы нормали к поверхности $\Sigma_R$, $i=\overline{1,3}$. Таким образом получаем 1-ю формулу Грина

$$\int_{D_e} u\Delta\varphi d\tau = \oint_S u\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds - \int_{D_e}\nabla u\nabla\varphi d\tau.\tag{4.30}$$

Из формулы (4.30) следует необходимое условие разрешимости задачи (4.27), (4.28). Полагая в (4.30) $u = 1$ (очевидно, что эта функция принадлежит рассматриваемому классу функций), имеем условие

$$\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0,$$

которое выполняется, т.к. при $r = a$ имеет место граничное условие (4.29).

Если классическое решение задачи (4.29) существует, то оно определено с точностью до произвольной функции времени. Докажем это. Пусть $\varphi_1(r,\theta,\lambda,t_0)$ - решение задачи (4.29). Покажем, что любое другое решение $\varphi_2(r,\theta,\lambda,t_0)$ отличается от решения $\varphi_1(r,\theta,\lambda,t_0)$ на произвольную функцию времени $C(t_0)$. Рассмотрим функцию $\varphi_0(r,\theta,\lambda,t_0) = \varphi_2(r,\theta,\lambda,t_0) - \varphi_1(r,\theta,\lambda,t_0)$. Функция $\varphi_0(r,\theta,\lambda,t_0)$ удовлетворяет задаче (4.29) с условием на границе $\partial\varphi_0 / \partial r = 0$ при $r = a$. Полагая в формуле (4.30) $u = \varphi = \varphi_0$, имеем:

$$\int_{D_e} \varphi_0 \Delta\varphi_0 d\tau = \oint_S \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds - \int_{D_e} (\nabla\varphi_0)^2 d\tau .$$

Отсюда $\nabla\varphi_0 = 0$ в $D_e$. Учитывая условие на бесконечности, находим: $\varphi_0(r,\theta,\lambda,t_0) =$ $= C(t_0)$. Следовательно $\varphi_2(r,\theta,\lambda,t_0) = \varphi_1(r,\theta,\lambda,t_0) + C(t_0)$.

Ограниченные на бесконечности частные решения уравнения из системы (4.29) ищем в соответствии с методом разделения переменных [5] в виде

$$\varphi(r,\theta,\lambda) = R(r)u(\theta,\lambda).$$

Подставляя искомый вид решения в соответствующее уравнение, получим

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dR}{dr}\right)}{R} = -\frac{\Delta_{\theta\lambda} u}{u} = \mu ,$$

где $\Delta_{\theta\lambda} u = \dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\lambda^2}$ – сферический оператор Лапласа, $\mu = const$.

Отсюда приходим к задаче Штурма-Лиувилля для сферического оператора Лапласа

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\theta\lambda} u + \mu u = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \lambda \le 2\pi, \\
&u(\theta,\lambda) = u(\theta,\lambda + 2\pi), \\
&|u(0,\lambda)| < \infty, \quad |u(\pi,\lambda)| < \infty
\end{aligned}$$

собственными функциями которой являются сферические функции [5]

$$u = u_{nm}(\theta,\lambda) = P_n^m(\cos\theta)\begin{cases}\cos m\lambda,\\ \sin m\lambda,\end{cases}$$

а собственные значения равны $\mu = \mu_n = n(n+1), \quad n = 0,1,...,\infty, \quad m = 0,1,...,n.$

Здесь $P_n^m(\cos\theta) = \sin\theta \dfrac{d^m}{d(\cos\theta)^m} P_n(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра, $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра [5].

Функция $R(r)$ удовлетворяет уравнению

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0,$$

общее решение которого представимо как

$$R(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}.$$

Таким образом, ограниченное на бесконечности решение уравнения из задачи (4.29) ищем в виде

$$\varphi(r,\theta,\lambda,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r^{-(n+1)}(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta) + C(t_0),$$

где $C(t)$ – произвольная функция времени. Поскольку $P_1^0(\cos\theta) = P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, то граничное условие из (4.29) можно записать как

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = v_0(t_0)P_1^0(\cos\theta).$$

Далее

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+1)a^{-(n+2)}(A_{nm}\cos m\lambda + B_{nm}\sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta) = v_0(t_0)P_1^0(\cos\theta).$$

Отсюда ясно, что отличны от нуля только члены с $n = 1, \quad m = 0$:

$$-2a^{-3}A_{10}P_1^0(\cos\theta) = v_0(t_0)P_1^0(\cos\theta).$$

Следовательно

$$\varphi(r,\theta,t_0) = -\frac{v_0(t_0)a^3}{2r^2}\cos\theta + C(t_0) \tag{4.31}$$

для любого момента времени $t = t_0$.

Поскольку в сферической системе координат выражение для скорости имеет вид

$$\mathbf{v}(r,\theta,\lambda,t) = \mathbf{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\lambda \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda},$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\lambda$ – орты сферической системы координат, то

$$\mathbf{v}(r,\theta,t) = \mathbf{e}_r \frac{v_0(t)a^3}{r^3}\cos\theta + \mathbf{e}_\theta \frac{v_0(t)a^3}{2r^3}\sin\theta . \tag{4.32}$$

Заметим, что потенциал скорости (4.31) определен с точностью до произвольной функции времени, а распределение скоростей определяется однозначно и дается формулой (4.32).

**4.5. Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением.** *(Тема: "Начально-краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности в круге.").* Пусть в горизонтальной цилиндрической трубе радиуса $a$ с покоящейся жидкостью внутри в момент времени $t = 0$ задается постоянный продольный градиент давления $-\dfrac{\partial p}{\partial z} = \gamma$, который остается постоянным в последующие моменты времени. Если ось $Z$ декартовой системы координат совпадает с осью трубы, то $v_z \neq 0, \quad v_x = v_y = 0, \quad \partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$. Пренебрегая действием силы тяжести из системы (3.9), (3.10) с учетом дополнительных условий (3.18), (3.19) получаем модельную начально-краевую задачу в круге $K^a$ с границей $\partial K^a$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{\rho}\gamma, \quad |v_z| < \infty, \quad (x,y) \in K^a,\\
&v_z(x,y,t) = 0, \quad (x,y) \in \partial K^a, \quad t \geq 0,\\
&v_z(x,y,0) = 0, \quad 0 \leq r \leq a.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Перейдем в полярную систему координат $(r,\varphi)$ и введем новую неизвестную функцию:

$$u(r,\varphi,t) = \frac{\gamma}{4\mu}\left(a^2 - r^2\right) - v_z(r,\varphi,t) .$$

Тогда из системы (4.33) для определения функции $u(r,\varphi,t)$ получаем задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad 0 \le r < a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$u(a,\varphi,t) = 0, \quad t \ge 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{4.34}$$
$$u(r,\varphi,0) = \frac{\gamma}{4\mu}\left(a^2 - r^2\right), \quad 0 \le r \le a.$$

Частные решения уравнения (4.34), удовлетворяющие граничному условию при $r = a$, ищем в соответствии с методом разделения переменных [5]:

$$u(r,\varphi,t) = \overline{u}(r,\varphi)T(t).$$

Тогда, подставляя это представление в уравнение из системы (4.34), находим

$$\frac{T'}{\nu T} = \frac{\dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \varphi^2}}{\overline{u}} = -\frac{\lambda}{a^2},$$

где $\lambda$ - произвольная постоянная величина. Учитывая граничное условие из системы (4.34), для нахождения функции $\overline{u}(r,\varphi)$ получаем задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге:

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{\lambda}{a^2}\overline{u} = 0, \quad 0 \le r < a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{4.35}$$
$$\overline{u}(a,\varphi) = 0, \quad \left|\overline{u}\right| < \infty.$$

Решение задачи (4.35) ищем в виде $\overline{u}(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Подставляя этот вид в уравнение и разделяя переменные, имеем

$$\frac{r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial R}{\partial r}\right) + \dfrac{\lambda}{a^2}r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu,$$

где $\nu$ – произвольная постоянная величина. Для определения функции $\Phi(\varphi)$ получаем задачу Штурма-Лиувилля на отрезке с условиями периодичности

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Решение этой задачи дается в [5]: $\nu_n = n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix}, \quad n = 0,1,2...$ При каждом значении $\nu_n = n^2$ имеем задачу Штурма-Лиувилля для оператора Бесселя:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\frac{\lambda}{a^2}r^2 - n^2\right)R = 0, \quad 0 \le r < a,$$
$$R(a) = 0, \quad \left|R\right| < \infty.$$

Решение этой задачи также построено в [5]:

$$R_n(r) = J_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^n}}{a} r\right),$$

где $J_n$ – функция Бесселя $n$ – го порядка, $\lambda_k^n$ – $k$ -тый корень уравнения $J_n\left(\sqrt{\lambda^n}\right) = 0$, $k = 1,2,3...$

Далее, приходим к уравнению

$$T' + \frac{\nu\lambda_k^n}{a^2} T = 0$$

общее решение которого представимо как

$$T_{nk}(t) = Ae^{-\frac{\nu\lambda_k^n}{a^2}t}.$$

Решение задачи (4.34) будем искать в виде ряда

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^n}}{a} r\right)(A_{nk}\cos n\varphi + B_{nk}\sin n\varphi)e^{-\frac{\nu\lambda_k^n}{a^2}t}.$$

Учитывая вид начального условия из системы (4.34), полученное представление можно несколько упростить:

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} J_0\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^0}}{a} r\right) e^{-\frac{\nu\lambda_k^0}{a^2}t}. \tag{4.36}$$

С целью нахождения коэффициентов разложения (4.36) воспользуемся следующим свойством ортогональности собственных функций задачи Штурма-Лиувилля для оператора Бесселя [5]:

$$\int_0^a rJ_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^n}}{a} r\right) J_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_{k'}^n}}{a} r\right) dr = \frac{a^2}{2} J_n'^2\left(\sqrt{\lambda_k^n}\right)\delta_{kk'}, \tag{4.37}$$

где $\delta_{kk'}$ - символ Кронекера. Коэффициенты $A_{0k}$ определяются путем подстановки решения (4.36) в начальное условие из системы (4.34):

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} J_0\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^0}}{a} r\right) = \frac{\gamma}{4\mu}\left(a^2 - r^2\right).$$

Умножая обе части полученного выражения на $rJ_0\left(\frac{\sqrt{\lambda_{k'}^0}}{a} r\right)$, интегрируя по $r$ от $0$ до $a$ и используя формулу (4.37), имеем

$$A_{0k'}\frac{a^2}{2}J_1^2\left(\sqrt{\lambda_{k'}^0}\right)=\frac{\gamma}{4\mu}\int_0^a r\left(a^2-r^2\right)J_0\left(\frac{\sqrt{\lambda_{k'}^0}}{a}r\right)dr\,.$$

Отсюда

$$A_{0k'}=\frac{2\gamma a^2}{\mu\lambda_{k'}^{0\;3/2}J_1\left(\sqrt{\lambda_{k'}^0}\right)}.$$

Итак, решение задачи (4.33) представимо в виде

$$v_z(r,t)=\frac{\gamma}{4\mu}\left(a^2-r^2\right)-\frac{2\gamma a^2}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\sqrt{\lambda_k^0}\,r/a\right)}{\lambda_k^{0\;3/2}J_1\left(\sqrt{\lambda_k^0}\right)}e^{-\frac{\nu\lambda_k^0}{a^2}t},$$

где $\lambda_k^0-k$ -тый корень уравнения $J_0(\sqrt{\lambda^0})=0$. При $t\to\infty$ получаем распределение скоростей (4.19), отвечающее течению Пуазейля.

**4.6. Нестационарные слоистые течения.** Рассмотрим нестационарное течение вязкой жидкости, полагая, что, относительно выбранной системы координат жидкость движется в направлении оси $X$. В этом случае $v_x=v_x(x,y,z,t),\quad v_y=v_z=0$. Поскольку, в соответствии с уравнением непрерывности (3.10), $\partial v_x/\partial x=0$, то функция $v_x$ не зависит от переменной $x$. Поэтому уравнения движения принимают вид (см. (3.9)):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial v_x}{\partial t},\\&\frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial p}{\partial z}=0,\quad\frac{\partial v_x}{\partial x}=0.\end{aligned}\tag{4.38}$$

Так как левая часть в первом уравнении из системы (4.38) зависит только от переменных $x$ и $t$, а правая – от переменных $y$, $z$ и $t$, то уравнение разрешимо, если $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=f(t)$. Здесь $f(t)$ - произвольная функция времени. При условии, что $f(t)=0$, функция $v_x(y,z,t)$ удовлетворяет двумерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right).\tag{4.39}$$

Если же $f(t)\neq 0$, то замена

$$v_x(y,z,t)=\tilde{v}_x(y,z,t)-\int_0^t f(t)dt$$

сводит соответствующее уравнение к уравнению (4.39), но уже относительно функции $\tilde{v}_x(y,z,t)$.

Вид частных решений уравнения (4.39) определяется видом начальных и граничных условий. Так, если эти условия не зависят от переменной $y$, то и решение задачи также не будет зависеть от этой переменной. Такие математические модели описывают течения из класса *одномерных нестационарных течений.*

Пусть требуется найти решение уравнения (4.39) в бесконечной области при условии, что начальная функция не зависит от переменной $y$. Таким образом, приходим к начальной задаче для одномерного уравнения теплопроводности на бесконечной прямой:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad z \in R^1, \\ &v_x(z,0) = F(z), \quad z \in R^1. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Частные решения уравнения (4.40) ищем в виде

$$v_x(z,t) = Z(z)T(t). \tag{4.41}$$

Подставляя (4.41) в уравнение (4.40), находим

$$\frac{T'}{\nu T} = \frac{Z''}{Z} = -\lambda,$$

где $\lambda$ - произвольная константа. Для определения функции $Z(z)$ получаем задачу Штурма-Лиувилля на бесконечной прямой:

$$\begin{aligned} &Z'' + \lambda Z = 0, \quad z \in R^1, \\ &|Z| < M, \quad M > 0. \end{aligned} \tag{4.42}$$

При $\lambda > 0$ задача (4.42) имеет систему ограниченных линейно независимых решений: $e^{\pm i\sqrt{\lambda} z}, \quad z \in R^1$. Пусть $\lambda = k^2, \quad -\infty < k < \infty$. Тогда совокупность частных решений системы (4.42) можно представить в виде

$$Z_k(z) = e^{ikz}, \quad \lambda_k = k^2, \quad z \in R^1, \quad k \in R^1.$$

Функция $T(t)$ удовлетворяет уравнению

$$T' + \nu\lambda_k T = 0,$$

общее решение которого

$$T_k(t) = Ce^{-\nu k^2 t} \tag{4.43}$$

стремится к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, ограниченные частные решения уравнения из системы (4.40) представимы как

$$v_{xk}(z,t) = C(k)e^{-\nu k^2 t + ikz}.$$

Поскольку спектр задачи (4.42) непрерывен, то решение задачи (4.40) будем искать в виде интеграла:

$$v_x(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{-\nu k^2 t + ikz} dk \,. \tag{4.44}$$

Неизвестный коэффициент $C(k)$ определяется в соответствии с начальным условием:

$$v_x(z,0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikz} dk = F(z) \,.$$

Отсюда, используя обратное преобразование Фурье, имеем

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \,.$$

Итак,

$$v_x(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{-\nu k^2 t + ikz} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(z,\xi,t) F(\xi) d\xi \,, \tag{4.45}$$

где $G(z,\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu k^2 t + ik(z-\xi)} dk$. Определим функцию $G(z,\xi,t)$, вычислив соответствующий интеграл. Введем обозначения:

$$I(\beta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2 + ik\beta} dk, \quad \alpha^2 = \nu t > 0, \quad \beta = z - \xi \,.$$

Тогда

$$\frac{dI}{d\beta} = i \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-\alpha^2 k^2 + ik\beta} dk = -\frac{i}{2\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\beta} de^{-\alpha^2 k^2} = -\frac{i}{2\alpha^2} \left( e^{ik\beta} e^{-\alpha^2 k^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2} de^{ik\beta} \right) =$$

$$= -\frac{\beta}{2\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2 + ik\beta} dk = -\frac{\beta}{2\alpha^2} I(\beta).$$

Следовательно, функция $I(\beta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dI}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha^2} I(\beta).$$

Отсюда

$$I(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \,,$$

где

$$C = I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2} dk = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

Итак,

$$G(z,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4\nu t}}.$$

В соответствии с формулой (4.45) для решения задачи (4.40) получаем представление

$$v_x(z,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4\nu t}} F(\xi) d\xi, \qquad (4.46)$$

называемое *интегралом Пуассона.*

Заметим, что интеграл Пуассона был получен в предположении непрерывности и ограниченности начальной функции $F(z)$. Однако, в приложениях нередко встречаются случаи, для которых начальная функция является кусочно непрерывной и ограниченной с конечным числом точек разрыва. Здесь формула (4.46) также применима, но решение соответствующей задачи непрерывно примыкает к начальной функции только в точках ее непрерывности, оставаясь при этом везде ограниченным при конечных $t$.

**4.6.1. Тангенциальный разрыв.** *(Тема: "Задача Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.").* Пусть в начальный момент времени задано распределение скоростей, отвечающее тангенциальному разрыву в плоскости $z = 0$:

$$v_x(z,0) = \begin{cases} v_0, & z > 0, \\ -v_0, & z < 0. \end{cases}$$

Найдем распределение скоростей при $t > 0$, пользуясь представлением (4.46). Подставляя начальное распределение в (4.46), имеем

$$v_x(z,t) = -\frac{v_0}{2\sqrt{\pi \nu t}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4\nu t}} d\xi + \frac{v_0}{2\sqrt{\pi \nu t}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4\nu t}} d\xi.$$

Делая замену переменной интегрирования

$$\lambda = \frac{-z+\xi}{2\sqrt{\nu t}}, \quad d\lambda = \frac{d\xi}{2\sqrt{\nu t}},$$

$$-\infty < \xi < 0 \Rightarrow \quad -\infty < \lambda < -\frac{z}{2\sqrt{\nu t}},$$

$$0 < \xi < \infty \Rightarrow \quad -\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} < \lambda < \infty,$$

приходим к следующему результату

$$v_x(z,t) = -\int\limits_{-\infty}^{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\lambda^2}\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}d\lambda + \int\limits_{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}d\lambda = -\left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\lambda^2}\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\lambda^2}\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}d\lambda\right] + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2}\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}d\lambda + \int\limits_{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}^{0} e^{-\lambda^2}\frac{v_0}{\sqrt{\pi}}d\lambda = v_0\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right), \tag{4.47}$$

где $\Phi(u) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^u e^{-\lambda^2}d\lambda$ - функция ошибок. Так как $\Phi(\pm\infty) = \pm 1, \quad \Phi(0) = 0$, то скорость в любой точке пространства изменяется по абсолютной величине от $v_0$ при $t = 0$ до $0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим решение (4.47). Вычислим следующие пределы

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ z>0}} v_x(z,t) = v_0 \text{ так как } z/2\sqrt{\nu t} \to +\infty, \quad \Phi \to 1,$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ z<0}} v_x(z,t) = -v_0 \text{ так как } z/2\sqrt{\nu t} \to -\infty, \quad \Phi \to -1.$$

Более того, если рассмотреть одновременный переход при $z \to 0, \quad t \to 0$ вдоль кривой $z/2\sqrt{\nu t} = \alpha,$ где $\alpha -$ произвольная величина, $-\infty < \alpha < +\infty$, то значение предела будет зависеть от вида кривой:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ z\to 0}} v_x(z,t) = v_0\Phi(\alpha).$$

Таким образом, решение (4.47), оставаясь везде ограниченным, при $z \to 0, \quad t \to 0$ предела не имеет, что связано с разрывными свойствами начальной функции на плоскости $z = 0$ при $t = 0$.

**4.6.2. Движение твердой поверхности.** *(Тема: “Начально-краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой.”).* Пусть неподвижная непроницаемая стенка $z = 0$, ограничивающая жидкость снизу, в момент времени $t = 0$ начинает движение с постоянной скоростью $U_0$ в своей плоскости. Будем считать, что направление движения совпадает с направлением оси $X$. Тогда

$$v_x(z,0) = \begin{cases} U_0, & z = 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases} \qquad v_x(0,t) = U_0, \quad t \ge 0. \tag{4.48}$$

В силу симметрии задачи $v_y = v_z = 0, \quad v_x = v_x(z)$, причем $v_x(z)$ удовлетворяет уравнению из системы (4.40). Однако, представлением (4.46) воспользоваться нельзя, так как исследуемая задача является начально-краевой.

Рассмотрим функцию

$$v_x(z,t) = U_0\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right], \quad z \ge 0, \quad t \ge 0. \tag{4.49}$$

Функция (4.49) удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности при $z > 0, \quad t > 0$. Если $z > 0, \quad t \to 0$, то $z/2\sqrt{\nu t} \to +\infty$. Поэтому $\Phi\left(z/2\sqrt{\nu t}\right) \to 1$, и

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ z > 0}} v_x(z,t) = 0.$$

Если рассмотреть одновременный переход к пределу при $z \to +0, \quad t \to 0$, например, вдоль кривой $\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} = \alpha, \quad 0 \le \alpha < \infty$, то в результате получим

$$\lim_{\substack{z \to 0+0 \\ t \to 0 \\ \frac{z}{2\sqrt{\nu t}} = \alpha}} v_x(z,t) = U_0[1 - \Phi(\alpha)].$$

Таким образом, значение искомого предела зависит от значения $\alpha$. Итак, функция (4.49) является решением уравнения (4.40) при $z > 0$ с дополнительными условиями (4.48). Это решение не имеет предела при $z \to +0, \quad t \to 0$.

Заметим, что решение задачи о движении твердой поверхности, как решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой, может быть получено при помощи общего метода исследования данного класса линейных начально-краевых задач, известного под названием принципа Дюамеля [5].

**4.6.3. Течение под действием касательного напряжения.** *(Тема: “Начально-краевая задача Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой”.).* Исследуем проблему возникновения морских течений под действием ветра постоянной силы с помощью простейшей математической модели, описывающей это явление.

Пусть жидкость, занимающая полупространство $z \le 0$, в начальный момент времени покоится:

$$v_x(z,0) = 0, \quad z \le 0. \tag{4.50}$$

При $t = 0$ на свободную поверхность жидкости в направлении оси $X$ начинает действовать постоянное касательное напряжение величины $\tau$, которое остается постоянным в последующие моменты времени, так что $p_{zx}\big|_{z=0} = \tau, \quad t \ge 0$, где $p_{zx}$ – соответствующая компонента тензора напряжений (см. (3.4)). Поскольку $v_y = v_z = 0, \quad v_x = v_x(z)$, то на границе выполняется условие

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \tau, \quad t \ge 0. \qquad (4.51))$$

Определим распределение скоростей в жидкости, течение которой описывается одномерным уравнением теплопроводности с дополнительными условиями (4.50), (4.51).

Выполним замену неизвестной функции:

$$w(z,t)=\mu\frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Очевидно, что новая неизвестная функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0,$$

причем

$$\begin{aligned}&w(z,0)=0, \quad z\le 0,\\ &w(0,t)=\tau, \quad t\ge 0.\end{aligned}$$

Решение этой задачи представимо формулой (4.49) с заменой $U_0$ на $\tau$, $z$ на $-z$:

$$w(z,t)=\tau\left[1-\Phi\left(-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right], \quad z\le 0, \quad t\ge 0.$$

Итак,

$$\mu\frac{\partial v_x}{\partial z}=\tau\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}e^{-\xi^2}d\xi\right)=\tau\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\xi^2}d\xi+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}e^{-\xi^2}d\xi\right)=\frac{2\tau}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}e^{-\xi^2}d\xi.$$

Дифференцируя это выражение по $z$, находим производную $\partial^2 v_x\big/\partial z^2$:

$$\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}=\frac{2\tau}{\sqrt{\pi}}\lim_{a\to-\infty}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_a^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}e^{-\xi^2}d\xi=\frac{2\tau}{\sqrt{\pi}}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}-e^{-a^2}\frac{da}{dz}\right)=\frac{\tau}{\sqrt{\pi\nu t}}e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}=\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}$$

в силу выполнения уравнения $\partial v_x\big/\partial t-\nu\,\partial^2 v_x\big/\partial z^2=0$. Следовательно,

$$v_x(z,t)=\int\limits_0^t\frac{\tau}{\sqrt{\pi\mu\rho\bar t}}e^{-\frac{z^2}{4\nu\bar t}}d\bar t,$$

где учтено, что $v_x(z,0)=0$. Полагая $z\big/2\sqrt{\nu\bar t}=\lambda$, находим

$$\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{z}{2\sqrt{\nu}}\lambda^{-2}d\lambda, \quad 0\le\bar t\le t\Rightarrow-\infty<\lambda\le\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Поэтому

$$v_x(z,t)=\frac{z\tau}{\mu\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}}e^{-\lambda^2}d\,\frac{1}{\lambda}.$$

Интегрируя полученное выражение по частям, окончательно имеем

$$v_x(z,t) = \frac{\tau}{\mu}\left[2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} + z + z\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right], \quad z \le 0.$$

Отсюда видим, что скорость на свободной поверхности равна

$$v_x(0,t) = \frac{2\tau}{\mu}\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}.$$

При больших временах $(t >> 1)$ и фиксированных $z$ оказываются справедливыми оценки: $\Phi\left(z/2\sqrt{\nu t}\right) \approx 0$, $\sqrt{\nu t/\pi}e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} = ze^{-\lambda^2}/2\sqrt{\pi}\lambda \approx z/2\sqrt{\pi}\lambda >> z$, где $\lambda = z/2\sqrt{\nu t} << 1$. Следовательно,

$$v_x(z,t) = \frac{2\tau}{\mu}\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}, \quad z \le 0, \quad t >> 1,$$

и, значит, жидкость стремится принять скорость свободной поверхности. Определим, за какое время скорость на фиксированной глубине $z$ будет равна $v_x(0,t)/2$. Для этого нужно решить уравнение:

$$\frac{\tau}{\mu}\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} = \frac{\tau}{\mu}\left[2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} + z + z\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right], \quad z < 0.$$

Если положить $z/2\sqrt{\nu t} = \lambda$, то численное решение алгебраического уравнения

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\lambda^2} + \lambda + \lambda\Phi(\lambda)\right]$$

дает значение $\lambda \approx 0.35$. Отсюда,

$$z \approx 0.7\sqrt{\nu t}.$$

В соответствии с полученной формулой на глубине в $100\,\text{м}$ частицы воды будут двигаться со скоростью свободной поверхности только спустя 359 лет. Такое описание является примером простейшего моделирования течения жидкости в приповерхностном слое под действием ветра постоянной силы.

Методическое пособие составлено по материалам учебного пособия [2].

*ЛИТЕРАТУРА*


1. *Т.Г. Елизарова.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений.-М: Научный мир, 2007.

2. *М.А. Давыдрва.* Лекции по гидродинамике. М.: Наука. Физматлит . (Принято к печати).
3. *Б.М. Будак, С.В. Фомин.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука. Физматлит, 2002.
4. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Гидродинамика. М.: Наука. Физматлит, 2001.
5. *А. Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993.
6. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1, 2. М.: ФМГИЗ, 1963.
7. *Г. Ламб.* Гидродинамика. М.: Ижевск: РХД., 2003.
8. *Л. Г. Лойцянский.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
9. *В.Я. Шкадов, З.Д. Запрянов.* Течения вязкой жидкости. – М.: Изд-во МГУ, 1984.