Тематическая лекция 3

ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА

В этой лекции мы рассмотрим параболические пространства Гельдера, априорные оценки первой краевой задачи в пространствах Гельдера, называемые априорными оценками Шаудера, и, наконец, используя метод продолжения по параметру мы докажем существование и единственность решения первой краевой задачи в параболических пространствах Гельдера.

§ 1. Параболические пространства Гельдера

В пространстве $(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ изначально определено расстояние между точками $z_1 = (x_1, t_1)$ и $z_2 = (x_2, t_2)$ следующего вида:

$$d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|. \tag{1.1}$$

Однако, для наших дальнейших целей метрическое пространство $(\mathbb{R}^{N+1}, d)$ не удобно. Поэтому введем так называемое параболическое расстояние следующего вида:

$$\rho(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}. \tag{1.2}$$

Нужно только проверить, что функция $\rho(z_1, z_2)$ удовлетворяет аксиомам расстояния. Действительно, нужно только доказать, что

$$\rho(z_1, z_2) \leqslant \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2). \tag{1.3}$$

Для этого заметим, что имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|t_1 - t_2| \leqslant |t_1 - t_3| + |t_3 - t_2| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |t_1 - t_2|^{1/2} \leqslant (|t_1 - t_3| + |t_3 - t_2|)^{1/2} \leqslant |t_1 - t_3|^{1/2} + |t_3 - t_2|^{1/2}.$$

Из этой цепочки неравенств сразу же вытекает неравенство треугольника (1.3).

Замечание 1. Отметим, что параболическое расстояние $\rho(z_1, z_2)$ обладает следующим важным свойством — если $z_1 = (rx_1, r^2 t)$ и $z_2 = (rx_2, r^2 t)$, то

$$\rho(z_1, z_2) = r \left(|x_1 - x_2| + |t_2 - t_1|^{1/2} \right).$$

Это свойство инвариантности относительно указанного растяжения важно для параболических уравнений.

Для функции $u(x,t)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, введем следующие обозначения:

$$[u]_{\delta/2,\delta;D} \stackrel{def}{=} \sup_{z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^\delta(z_1, z_2)}, \tag{1.4}$$

$$|u|_{\delta/2,\delta;D} \stackrel{def}{=} |u|_{0;D} + [u]_{\delta/2,\delta;D}, \quad |u|_{0;D} = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \tag{1.5}$$

для $\delta \in (0,1]$. Через $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ мы обозначаем пространство всех функций $u(x,t)$, для которых конечна *норма* $|u|_{\delta/2,\delta;D} < +\infty$.

Параболическое пространство Гельдера $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ определим как множество всех вещественнозначных функций $u(x,t)$, заданных в D и таких, что

$$|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \stackrel{def}{=} |u|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;D} + [u]_{1+\delta/2;2+\delta;D} < +\infty, \tag{1.6}$$

где

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta;D} \stackrel{def}{=} [u_t]_{\delta/2,\delta;D} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [u_{x_i x_j}]_{\delta/2,\delta;D}. \tag{1.7}$$

Можно доказать, что пространства $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ являются банаховыми, т. е. полными нормированными пространствами относительно норм (1.5) и (1.6). Действительно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пространства $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ являются банаховыми относительно норм $|\cdot|_{\delta/2,\delta;D}$ и $|\cdot|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$ соответственно.*

Доказательство. Доказательство проведем для пространства $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

То, что величина $|\cdot|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$ является нормой очевидно. Поэтому нам нужно доказать полноту пространства $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

Шаг 1. Пусть $\{u_m\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$, т. е.

$$|u_m - u_k|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m,k \to +\infty. \tag{1.8}$$

Отсюда сразу же имеем, что числовая последовательность $|u_m - u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$ является ограниченной для каждого фиксированного

$k_1 \in \mathbb{N}$, поэтому в силу неравенства треугольника справедливо следующее неравенство:

$$|u_m|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant |u_m - u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} + |u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant K, \quad (1.9)$$

где $K > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Шаг 2. В частности, справедливы следующие неравенства [1]:

$$\sup_{(x,t)\in D} \left|D_x^2 u_m\right| \leqslant K, \quad [D_x^2 u_m]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant K. \quad (1.10)$$

Из первого неравенства получим, что последовательность $\{D_x^2 u_m\}$ является равномерно ограниченной, а из второго неравенства имеем

$$\left|D_x^2 u_m(x_1,t_1) - D_x^2 u_m(x_2,t_2)\right| \leqslant K\left[|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}\right]^{\delta},$$

но это означает, что последовательность $\{D_x^2 u_m\}$ является равностепенно непрерывной. По теореме Арцела существует такая подпоследовательность $\{D_x^2 u_{m'}\}$, которая равномерно сходится в $\mathbb{C}(\overline{D})$, т.е. существует такая функция $v^{2x}(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, что

$$\sup_{(x,t)\in D} \left|D_x^2 u_{m'} - v^{2x}(x,t)\right| \to +0 \quad \text{при} \quad m^{'} \to +\infty. \quad (1.11)$$

Аналогичным образом, доказываются аналогичные результаты для самой последовательности $\{u_m\}$, последовательностей $\{D_t u_m\}$, $\{D_{x_i} u_m\}$ и $\{D_{x_i x_j} u_m\}$.

Шаг 3. Нам нужно доказать, что если $\{u_{m''}\}$ — это итоговая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ и при этом

$$u_{m''}(x,t) \rightrightarrows u(x,t) \quad \text{равномерно в} \quad (x,t) \in D \quad \text{при} \quad m^{''} \to +\infty, \quad (1.12)$$

то

$$D_{x_i} u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_{x_i} u(x,t), \quad D_{x_i x_j} u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_{x_i x_j} u(x,t), \quad (1.13)$$

$$D_t u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_t u(x,t) \quad (1.14)$$

равномерно в D. Но это следствие того, что из фундаментальности последовательности $\{u_m\}$ в $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ вытекает ее фундаментальность в $\mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(D) \supset \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$, которое является банаховым пространством.

Шаг 4. Докажем теперь, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$. Для этого достаточно доказать, что

$$[D_t u(x,t)]_{\delta/2,\delta;D} < +\infty, \quad [D_x^2 u(x,t)]_{\delta/2,\delta;D} < +\infty.$$

[1] Здесь мы используем обозначение $D_x^2 u$ для любой частной производной второго порядка от функции u.

Докажем, например, первое неравенство. Действительно, имеем

$$\frac{\left|D_x^2 u_m(P) - D_x^2 u_m(Q)\right|}{\rho^\delta(P,Q)} \leqslant K.$$

Возьмем в этом неравенстве $m = m''$ и устремим $m'' \to +\infty$. В результате получим, что

$$\frac{\left|D_x^2 u(P) - D_x^2 u(Q)\right|}{\rho^\delta(P,Q)} \leqslant K.$$

Итак, $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2, 2+\delta}(D)$.

Шаг 5. Осталось доказать, что $\{u_m\}$ сходится по норме к $u(x,t)$. Заметим, что справедливо неравенство

$$|u_m - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant \\ \leqslant |u_{m''} - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} + |u_m - u_{m''}|_{1+\delta/2,2+\delta;D}, \quad (1.15)$$

а поскольку в силу фундаментальности $\{u_m\}$ имеем

$$|u_m - u_{m''}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m, m'' \to +\infty, \quad (1.16)$$

то нам достаточно доказать, что

$$|u_{m''} - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m'' \to +\infty. \quad (1.17)$$

В силу фундаментальности $\{u_m\}$ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие достаточно большие m'' и k'', что

$$\left[D_x^2 u_{m''} - D_x^2 u_{k''}\right]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \varepsilon. \quad (1.18)$$

Отсюда получаем, что для любых $P, Q \in D$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\rho^\delta(P,Q)} \left|D_x^2 u_{m''}(P) - D_x^2 u_{k''}(P) - D_x^2 u_{m''}(Q) + D_x^2 u_{k''}(Q)\right| \leqslant \varepsilon. \quad (1.19)$$

стремим в этом неравенстве $k'' \to +\infty$ и получим, что имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{\rho^\delta(P,Q)} \left|D_x^2 u_{m''}(P) - D_x^2 u(P) - D_x^2 u_{m''}(Q) + D_x^2 u(Q)\right| \leqslant \varepsilon. \quad (1.20)$$

Взяв supremum от обеих частей этого неравенства $P, Q \in D$, $P \neq Q$, в результате мы получим, что

$$\left[D_x^2 u_{m''} - D_x^2 u(Q)\right]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[D_x^2 u_{m''} - D_x^2 u(Q)\right]_{\delta/2,\delta;D} \to +0 \quad (1.21)$$

при $m'' \to +\infty$. Аналогичным образом можно рассмотреть все слагаемые в выражении (1.17) и доказать его справедливость.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что если область D достаточно «хорошая», например, если область D выпуклая, то рассматриваемые банаховы пространства совпадают с банаховыми пространствами $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(\overline{D})$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{D})$.

Справедливы следующие неравенства:

$$[uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D}, \tag{1.22}$$

$$|uv|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{\delta/2,\delta;D}|v|_{\delta/2,\delta;D} \tag{1.23}$$

для всех $u, v \in \mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$.

□ Действительно, прежде всего справедливо следующее элементарное неравенство:

$$|u(z_1)v(z_1) - u(z_2)v(z_2)| \leqslant |u(z_1)||v(z_1) - v(z_2)| + |v(z_2)||u(z_1) - u(z_2)|,$$

из которого разделив обе части на $\rho^\delta(z_1, z_2)$ мы получим следующее неравенство:

$$[uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D}. \tag{1.24}$$

Теперь заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}|uv|_{\delta/2,\delta;D} &= |uv|_{0;D} + [uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \\ &\leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \\ &\leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D} + [u]_{\delta/2,\delta;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} = \\ &= |u|_{\delta/2,\delta;D}|v|_{\delta/2,\delta;D}. \quad \boxtimes\end{aligned} \tag{1.25}$$

Справедливо следующее важное утверждение:

Л е м м а 1. *Для всякой функции* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ *и для всех* $a_{ij}(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ *найдется такая постоянная* $M > 0$, *не зависящая от* u, *что имеет место следующее неравенство*:

$$|Lu|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant M|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}, \tag{1.26}$$

$$Lu(x,t) \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

где $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *— это ограниченная область.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что в силу неравенства (1.25) имеем

$$\left|a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |a_{ij}|_{\delta/2,\delta;D}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant M_1|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \tag{1.27}$$

Шаг 2. В силу неравенства (1.25) и формулы Тейлора имеем

$$|cu|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |c|_{\delta/2,\delta;D}|u|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant$$

$$\leqslant M_2\left[|u_t|_{0;D}+\sum_{i=1}^{N}|u_{x_i}|_{0;D}\right]\leqslant M_2|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \quad (1.28)$$

Шаг 3. Справедливо неравенство

$$|u_t|_{\delta/2,\delta;D}\leqslant |u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \quad (1.29)$$

Из неравенств (1.27)–(1.27) вытекает оценка (1.26).
Лемма доказана.

§ 2. Эквивалентные полунормы

Отметим, что величины $[u]_{1+\delta/2;2+\delta;D}$ и $[u]_{\delta/2,\delta;D}$ являются *полунормами*, т. е. функциями для которых выполнены все свойства нормы за исключением того свойства, что

$$\|u\|=0\Leftrightarrow u=0,$$

поскольку, например, из равенства $[u]_{\delta/2,\delta;D}=0$ вытекает, что $u = const$. В дальнейшем при выводе априорной оценки Шаудера в $\mathbb{R}^{N+1}$ по методу Сафонова нам нужно ввести эквивалентную полунорму $[u]'_{1+\delta/2;2+\delta;D}$.

Итак, пусть $\mathcal{P}_2$ — это множество всех полиномов вида

$$\mathcal{P}_2\overset{def:}{=}\left\{\alpha t+\sum_{i=1}^{N}\alpha^i x_i+\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\alpha^{ij}x_ix_j+\beta\right\} \quad (2.1)$$

с вещественными коэффициентами относительно переменных $t, x_1, ..., x_N$. Пусть

$$B_\rho(x)=\left\{y\in\mathbb{R}^N:|x-y|<\rho\right\},\quad Q_\rho(z)=(t-\rho^2,t)\otimes B_\rho(x)\subset\mathbb{R}^{N+1}$$

при $z=(t,x)\in\mathbb{R}^{N+1}$. Определим следующую полунорму:

$$[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}\overset{def:}{=}\sup_{z=(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}}\sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^{2+\delta}}\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)|_{0;Q_\rho(z)}. \quad (2.2)$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 2. *Существует константа $c_1=c_1(N)>0$ такая, что для любой функции $u(x,t)\in\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$ справедливы оценки*

$$[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}\leqslant c_1[u]_{1+\delta/2,2+\delta},\quad [u]_{1+\delta/2,2+\delta}\leqslant c_1[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (2.3)$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем первое неравенство в (2.3). Согласно формуле Тейлора для любых точек $z=(t,x)$, $z_0=(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^{N+1}$ имеет место следующее равенство:

$$u(z)=u(t_0,x)+(t-t_0)u_t(\vartheta,x)=$$

$$= u(z_0) + (t - t_0)u_t(\vartheta, x) + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}(t_0, \xi)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}), \quad (2.4)$$

где $\vartheta \in [t, t_0]$ и $\xi \in [x, x_0]$. С другой стороны для полинома Тейлора по определению имеем

$$T_{z_0}u(z) \overset{def:}{=} u(z_0) + (t - t_0)u_t(z_0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}(z_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}). \quad (2.5)$$

Пусть $\rho(z, z_0) \leqslant \rho$, где

$$\rho(z, z_0) = |x - x_0| + |t - t_0|^{1/2}.$$

Тогда получим, в частности,

$$|t - t_0| \leqslant \rho^2, \quad |x - x_0| \leqslant \rho.$$

Из (2.4) и (2.5) получим следующую цепочку неравенств:

$$|u(z) - T_{z_0}u(z)| \leqslant |t - t_0|\, |u_t(\vartheta, x) - u_t(z_0)| +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|u_{x_i x_j}(z_0) - u_{x_i x_j}(t_0, \xi)\right| |x_i - x_{0i}||x_j - x_{0j}| \leqslant$$

$$\leqslant \rho^2 \,|u_t(\vartheta, x) - u_t(z_0)| + \rho^2 \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|u_{x_i x_j}(z_0) - u_{x_i x_j}(t_0, \xi)\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1(N)\rho^2 [u]_{1+\delta/2, 2+\delta} \left(\rho^\delta\left((\vartheta, x), z_0\right) + \rho^\delta\left((t_0, \xi), z_0\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_{11}\rho^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2, 2+\delta}. \quad (2.6)$$

Из этого неравенства вытекает цепочка неравенств

$$\inf_{p(z)\in \mathcal{P}_2} |u(z) - p(z)| \leqslant c_{11}\rho^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2, 2+\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{\rho>0} \frac{1}{\rho^{2+\delta}} \inf_{p(z)\in \mathcal{P}_2} |u(z) - p(z)| \leqslant c_{11}[u]_{1+\delta/2, 2+\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{z\in \mathbb{R}^{N+1}} \sup_{\rho>0} \frac{1}{\rho^{2+\delta}} \inf_{p(z)\in \mathcal{P}_2} |u(z) - p(z)| \leqslant c_{11}[u]_{1+\delta/2, 2+\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [u]'_{1+\delta/2, 2+\delta} \leqslant c_{11}[u]_{1+\delta/2, 2+\delta}. \quad (2.7)$$

Шаг 2. Докажем [1]) теперь второе неравенство в (2.3). Прежде всего обозначим через ∂ один из операторов

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Стандартным образом сопоставим этим операторам следующие конечно–разностные операторы σ_h при $h > 0$:

$$u(t,x) \to \frac{1}{h^2}\left[u(t,x) - u(t-h^2,x)\right], \tag{2.8}$$

$$u(t,x) \to \frac{1}{h^2}\Big[u(t,x+he_i+he_j) - \\ - u(t,x+he_i) - u(t,x+he_j) + u(t,x)\Big]. \tag{2.9}$$

Кроме того, введем операторы σ'_h, следующего вида:

$$u(t,x) \to u_t(t-h^2,x), \tag{2.10}$$

$$u(t,x) \to \frac{1}{2}\Big[u_{x_ix_i}(t,x+he_i+he_j) + u_{x_jx_j}(t,x+he_i+he_j) + \\ + 2u_{x_ix_j}(t,x+he_i+he_j) - u_{x_ix_i}(t,x+he_i) - u_{x_jx_j}(t,x+he_j)\Big] \tag{2.11}$$

Используя формулу Тейлора в выражениях (2.8) и (2.9) мы получим следующее равенство:

$$\sigma_h u(z) = \sigma'_{h'} u(z) \quad \text{при} \quad h' = h'(z) \leqslant h. \tag{2.12}$$

В частности, для любого $p(z) \in \mathcal{P}_2$ выражение $\sigma_h p(z)$ — это константа, не зависящая от h и z. Кроме того, если σ_h соответствует ∂ и $u(z) \in \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$, то справедлива цепочка выражений

$$|\sigma_h u(z) - \partial u(z)| = \left|\sigma'_{h'} u(z) - \partial u(z)\right| \leqslant c_2 h^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta}, \tag{2.13}$$

где c_2 — это абсолютная постоянная.

Теперь возьмем z_1, z_2 и обозначим $\rho = \rho(z_1,z_2)$ и выберем $h = \varepsilon\rho$, где константу $\varepsilon \in (0,1)$ мы выберем позже. Без ограничения общности будем считать, что $t_1 \leqslant t_2$. Тогда все точки

$$(t_n - h^2, t_n), \quad (t_n, x_n + he_i + he_j) \in Q_{3\rho}(z_2), \quad n = 1,2.$$

Следовательно, для любого $p(z) \in \mathcal{P}_2$ имеем

[1]) Эта часть доказательства в силу его сложности доказывается в курсе в том случае, если имеется дополнительное время.

$$|\partial u(z_1) - \partial u(z_2)| \leqslant |\partial u(z_1) - \sigma_h u(z_1)| + |\partial u(z_2) - \sigma_h u(z_2)| + \\ + |\sigma_h(u-p)(z_1) - \sigma_h(u-p)(z_2)| \leqslant 2c_2 h^\delta [u]_{1+\delta/2, 2+\delta} + \\ + |\sigma_h(u-p)(z_1)| + |\sigma_h(u-p)(z_2)|,$$

причем

$$|\sigma_h(u-p)(z_i)| \leqslant \frac{4}{h^2}|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)} \leqslant c_3\varepsilon^{-2}\rho^\delta [u]'_{1+\delta/2,2+\delta},$$

поскольку это верно для любых $p(z) \in \mathcal{P}_2$. Итак, получаем

$$|\partial u(z_1) - \partial u(z_2)| \leqslant 2c_2\varepsilon^\delta \rho^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta} + c_3\varepsilon^{-2}\rho^\delta [u]'_{1+\delta/2,2+\delta}.$$

Отсюда разделив обе части на ρ^δ и взяв supremum от обеих частей неравенства, приходим к следующему неравенству:

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant 2c_2\varepsilon^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta} + c_3\varepsilon^{-2}[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}.$$

Осталось выбрать величину $\varepsilon \in (0,1)$ настолько малым, чтобы

$$2c_2\varepsilon^\delta \leqslant \frac{1}{2}$$

и получим требуемое неравенство.

Теорема доказана.

§ 3. Оценки Бернштейна

В этом параграфе мы рассмотрим очень важные для дальнейших рассмотрений так называемые оценки, полученные методом Бернштейна. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $R > 0$ *и* $Q_R = B_R \otimes (-R^2, 0)$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$. *Предположим, что функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_R)$ *и бесконечное число раз дифференцируема в* Q_R *и удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \text{в} \quad Q_R.$$

Тогда при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ *и целом* $n \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$|D_t^n D_x^\alpha u(0)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha|+2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}}|u|_{0;Q_R}. \tag{3.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что уравнение $\Delta u - u_t = 0$ инвариантно при замене $u(x,t)$ на $u(Rx, R^2t.)$ Следовательно, достаточно доказать (3.1) только для $R = 1$, а затем сделать параболическое растяжение.

Шаг 2. Теперь мы применим метод Бернштейна. Возьмем функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ с носителем в $B_R \otimes (-R^2, R^2)$, предположим, что $\varphi(0) = 1$ и рассмотрим функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \varphi^2(x,t)|D_x u|^2 + \mu^2|u|^2, \quad \mu > 0, \tag{3.2}$$

причем выбор постоянной μ будет сделан ниже. Тогда, поскольку

$$\Delta u - u_t = 0, \quad \Delta u_{x_i} - u_{x_i t} = 0,$$

то имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}\Delta w - w_t = |D_x u|^2 \Delta(\varphi^2) + \varphi^2 \left[2u_{x_i} \Delta u_{x_i} + 2\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_i x_j} \right] + \\ + 8\varphi\varphi_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} + 2\mu|D_x u|^2 + 2\mu u \Delta u - 2\varphi\varphi_t |D_x u|^2 - 2\varphi^2 u_{x_i} u_{x_i t} - \\ - 2\mu u u_t = |D_x u|^2 [2\mu + \Delta(\varphi^2) - 2\varphi\varphi_t] + \\ + 2\varphi^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_i x_j} + 8[\varphi_{x_i} u_{x_j}][\varphi u_{x_i x_j}] \geqslant \\ \geqslant |D_x u|^2 \left[2\mu + \Delta(\varphi^2) - 8|D_x\varphi|^2 - 2\varphi\varphi_t \right],\end{aligned} \tag{3.3}$$

где мы воспользовались следующими неравенствами:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij} b_{ij} \leqslant \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^2_{ij} \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b^2_{ij} \right)^{1/2}, \quad a_{ij}, b_{ij} \geqslant 0,$$

$$\left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^2_{ij} \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b^2_{ij} \right)^{1/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^2_{ij} + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b^2_{ij}, \quad \varepsilon > 0.$$

Взяв

$$a_{ij} = \varphi_{x_i} u_{x_j}, \quad b_{ij} = \varphi u_{x_i x_j}, \quad \varepsilon = 2,$$

мы получим следующую оценку:

$$2\varphi^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_i x_j} + 8[\varphi_{x_i} u_{x_j}][\varphi u_{x_i x_j}] \geqslant -8|D_x u|^2 |D_x \varphi|^2.$$

Шаг 3. Выбирая $\mu > 0$ достаточно большим, из цепочки выражений (3.3) получим неравенство

$$\Delta w - w_t \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Согласно принципу максимума имеем следующую цепочку выражений:

$$|D_x u|^2(0) \leqslant \sup_{(x,t)\in Q_1} w(x,t) \leqslant \sup_{(x,t)\in\partial' Q_1} w(x,t) = \mu \sup_{(x,t)\in\partial' Q_1} |u|^2. \tag{3.5}$$

Отсюда получаем (3.1) для $|\alpha| = 1$, $n = 0$ и $R = 1$ и, следовательно, для всех $R > 0$.

Шаг 4. Для доказательства этого утверждения $|\alpha| = 2$ и $n = 0$ заметим, что

$$\Delta D_j u - (D_j u)_t = 0,$$

поэтому имеем

$$|D_i D_j u(0)| \leqslant \frac{M(N)}{R/2} |D_i u|_{0;Q_{R/2}} \leqslant \frac{M(N)}{R/2} \frac{M(N)}{R/2} |u|_{0;Q_R}.$$

Те же рассуждения справедливы при любом $|\alpha|$. Так что неравенство (3.1) доказано при $n = 0$. При $n \geqslant 1$ достаточно заметить, что

$$D_t D^\alpha u = \Delta D^\alpha u, \cdots, D_t^n D^\alpha u = \Delta^n D^\alpha u,$$

откуда получаем (3.1) для $n \geqslant 1$.

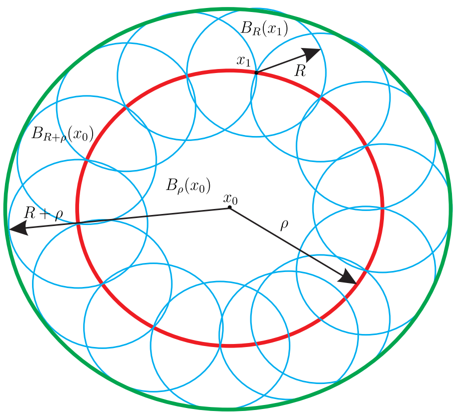
Теорема доказана.

Замечание 3. Отметим, что выбор начала координат является несущественным. Тогда при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ и целом $n \geqslant 0$ справедлива оценка

$$|D_t^n D_x^\alpha u(z)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_R(z)}, \tag{3.6}$$

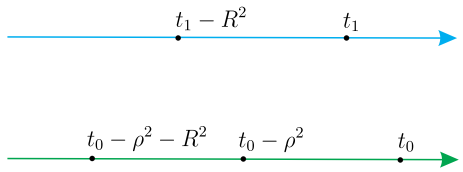
где $Q_R(z) = z + Q_R$. Более того, из оценки (3.6) вытекает следующая оценка:

$$|D_t^n D_x^\alpha u(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_{R+\rho}(z_0)}, \tag{3.7}$$



$$\sup_{x_1 \in B_\rho(x_0)} |u|_{0;B_R(x_1)} = |u|_{0;B_{\rho+R}(x_0)}$$

Рис. 1. К формуле (3.7) «x переменная».



$$\sup_{t_1 \in (t_0-\rho^2, t_0)} |u|_{0;(t_1-R^2,t_1)} = |u|_{0;(t_0-\rho^2-R^2,t_0)}$$

Рис. 2. К формуле (3.7) «t переменная».

Теорема типа Лиувилля. *Решение* $u = u(x,t) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\mathbb{R}^{N+1})$ *уравнения*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^{N+1},$$

удовлетворяющая условию $|u(x,t)| \leqslant M_1$ $(M_1 > 0)$, *является постоянной*

$$u(x,t) = const.$$

Доказательство.

В силу неравенства (3.6) и условия $|u(x,t)| \leqslant M$ мы получим два неравенства

$$|D_t u(z)| \leqslant \frac{M_2}{R^2}, \quad |D^\alpha_x u(z)| \leqslant \frac{M_3}{R}, \quad |\alpha| = 1, \tag{3.8}$$

где постоянные $M_2 > 0$ и $M_3 > 0$ не зависят от $R > 0$. Устремим теперь $R \to +\infty$ в неравенствах (3.8) и получим следующие равенства:

$$|D_t u(z)| = 0, \quad |D^\alpha_x u(z)| = 0, \quad |\alpha| = 1 \Rightarrow u(z) = const$$

для всех $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Теорема доказана.

§ 4. Априорная оценка Шаудера

Прежде чем формулировать теорему об априорных оценках Шаудера нам нужно напомнить некоторые обозначения. Предположим, что $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — ограниченная область. Область D ограничивается замыканием $\overline{B}$ области $B \in \mathbb{R}^N$ при $t = 0$, областью B_T на гиперплоскости $t = T$ и многообразием S (не обязательно связным), лежащим в полосе $0 < t \leqslant T$. Положим

$$B_\tau = D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau = S \cap \{t \leqslant \tau\}, \quad D_\tau = D \cap \{t < \tau\}.$$

Предположим, что B_τ является областью в $\mathbb{R}^N$ для любого $\tau \in (0,T)$. Кроме того, предположим, что существуют некоторая точка Q_1 на нижней крышке B и некоторая точка Q_2 на верхней крышке B_T, которые можно соединить простой непрерывной кривой γ, вдоль которой от Q_1 к Q_2 координата t не убывает.

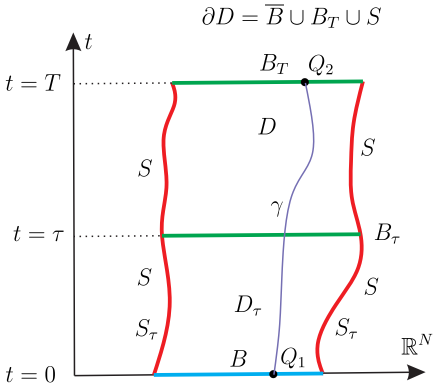


Рис. 3. Область D и некоторые множества.

Определение 1. *Мы скажем, что область D обладает свойством* (E), *если для каждой точки $Q \in \overline{S}$ существует $(N+1)$–мерная окрестность V, такая, что $V \cap \overline{S}$ может быть представлено в виде*

$$x_i = h(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N, t), \tag{4.1}$$

где h, $\partial_x h$, $\partial_x^2 h$, $\partial_t h$ — непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha \in$ $\in (0, 1]$ относительно параболического расстояния (1.2).

Замечание 4. Отметим, что из этого определения вытекает, что касательные гиперплоскости к $\overline{S}$ ни в одной из точек $\overline{S}$ не могут иметь вида $t = const$. Смотри рисунок 38.

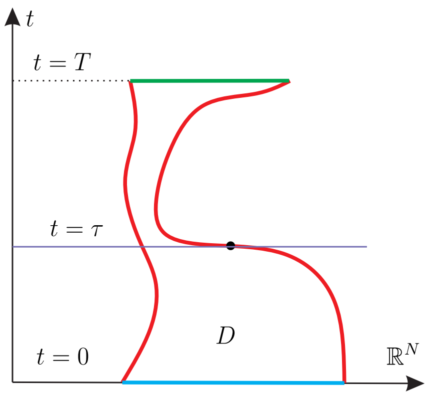


Рис. 4. Область D с точкой касания гиперплоскостью $t = const$.

Теперь нам следует изучить вопрос о возможности существования функции $\Psi(x, t)$, определенной на замыкании $\overline{D}$ всей области D, являющейся продолжением функции $\psi(x, t)$, определенной на нормальной границе $\partial' D = \overline{B} \cup S$ области D. Эта функция напомним возникает при рассмотрении первой краевой задачи при задании граничного условия

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad \partial' D.$$

Дадим следующее определение:

Определение 2. *Говорят, что функция $\psi(x,t)$, определенная на нормальной границе $\partial' D = \overline{B} \cup S$ принадлежит классу $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, если в $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ существует хотя бы одна функция $\Psi(x,t)$, такая, что $\Psi = \psi$ на $\partial' D$.*

При этом введем следующую величину:

$$|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \overset{def:}{=} \inf_{\Psi} |\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}. \tag{4.2}$$

Замечание 5. Отметим, что при выполнении условия (E) и при условии, что $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, то для всякого продолжения $\Psi(x,t)$ функции $\psi(x,t)$ производная

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \Psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$$

однозначно определяется по непрерывности на границе ∂B области B (нижней крышке области D). Соответственно на границе ∂B определена функция

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Аналогичным образом можно определить по непрерывности все слагаемые в выражении $L\psi$.

Наконец, сделаем следующие предположения:

($\overline{\text{A}}$) Коэффициенты параболического оператора L принадлежат классу $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$, причем

$$|a_{ij}|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1, \quad |b_i|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1, \quad |c|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1. \tag{4.3}$$

($\overline{\text{B}}$) Для любой точки $(x,t) \in D$ и любого действительного вектора ξ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant K_2|\xi|^2, \quad K_2 > 0. \tag{4.4}$$

($\overline{\text{C}}$) Функция $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$.

Теперь мы в состоянии рассмотреть вопрос об априорных оценках вблизи границы для решения $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ первой краевой задачи следующего вида:

$$Lu(x,t) \overset{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t), \tag{4.5}$$

при $(x,t) \in D \cup B_T$,

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на нормальной границе} \quad \partial' D = \overline{B} \cup S. \tag{4.6}$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 4. *Если выполняются условия* ($\overline{\mathrm{A}}$), ($\overline{\mathrm{B}}$) *и* ($\overline{\mathrm{C}}$), *область* D *удовлетворяет свойству* (E) *и* $\psi \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, *то существует постоянная* $K_3 = K_3(K_1, K_2, \alpha, D)$, *такая, что для решения* $u(x,t)$ *класса* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ *задачи* (4.5), (4.6) *имеет место следующая априорная оценка Шаудера*:

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3 \left(|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |f|_{\alpha/2,\alpha;D}\right). \tag{4.7}$$

Доказательство.
Доказательство этой сложной теоремы будет частично доказано в следующем параграфе.
Теорема доказана.

§ 5. Доказательство априорной оценки Шаудера в $\mathbb{R}^{N+1}$ по методу Сафонова [1)]

В этом разделе мы приведем доказательство основной априорной оценки в параболических пространствах Гельдера, доказанная оригинальным методом Сафоновым примерно в 1984 г. Пусть $\delta \in (0,1)$.
Теорема 5. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. *Положим* $f = \Delta u - u_t$. *Тогда существует константа* $M = M(N,\delta)$ *такая, что*

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}. \tag{5.1}$$

Доказательство.
Шаг 1. Возьмем $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\rho > 0$ и константу $K \geqslant 1$, которую уточним ниже. Выберем также функцию $\varphi(z) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ такую, что

$$\varphi(z) = 1 \quad \text{в} \quad z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0) = B_R(x_0) \otimes (t_0 - (K+1)^2\rho^2, t_0).$$

Определим теперь следующую величину:

$$T_{z_0}u(z) \overset{def:}{=} u(z_0) + (t - t_0)u_t(z_0) + \\ + u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2}u_{x_i x_j}(z_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}), \tag{5.2}$$

где $\rho(z, z_0) \leqslant \rho$ и поэтому, в частности, $|t - t_0| \leqslant \rho^2$ и $|x - x_0| \leqslant \rho$. Пусть

$$g(z) \overset{def:}{=} \Delta\left(\varphi(z)T_{z_0}u(z)\right) - \left(\varphi(z)T_{z_0}u(z)\right)_t, \quad z = (x,t). \tag{5.3}$$

[1)] Этот параграф не входит в практический курс лекций.

Справедливо следующее равенство:

$$g(z) = \Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) - \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = f(z_0) \tag{5.4}$$

при $z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$.

$\square$ Действительно, непосредственным вычислением с учетом определения (5.2) величины $T_{z_0}u(z)$ получим равенство

$$\begin{aligned}\Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) = \Delta u(z_0), \quad \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = u_t(z_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) - \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = \Delta u(z_0) - u_t(z_0) = f(z_0). \quad \boxtimes\end{aligned}$$

Шаг 2. Прежде всего заметим, что в силу того, что $u(x,t) \in \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, то имеет место следующее равенство:

$$u(x,t) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s, x-y) f(y,s)\,dy\,ds = -G_0 * f, \quad f = \Delta u - u_t, \tag{5.5}$$

где

$$G_0(x,t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right].$$

И, аналогично, в силу (5.3) имеем

$$\varphi(z)T_{z_0}u(z) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s, x-y) g(y,s)\,dy\,ds = -G_0 * g. \tag{5.6}$$

Поэтому при $z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$ в силу (5.4) имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}u(z) - T_{z_0}u(z) = u(z) - \varphi(z)T_{z_0}u(z) = -G_0 * (f - g) = \\ = G_0 * \left[(f(z_0) - f(z)) I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}\right] + G_0 * \left[(g - f) I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}\right] = \\ = r(z) + h(z),\end{aligned} \tag{5.7}$$

где

$$I_D(z) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad z \in D; \\ 0, & \text{если} \quad z \notin D, \end{cases} \quad D^c = \mathbb{R}^N \backslash D.$$

Шаг 3. Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned}h(z) = G_0 * \left[(g - f) I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}\right] = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s, x-y)\left[(g(y,s) - f(y,s)) I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}(y,s)\right] dy\,ds,\end{aligned} \tag{5.8}$$

то при $z=(x,t)\in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$ особенности у подынтегрального выражения нет — она просто равно нулю при $(y,s)\in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$, а особенность фундаментального решения $G(t-s,x-y)$ имеется как раз при $t=s$ и $x=y$, а при $t>s$ и $x\neq y$ фундаментальное решение бесконечное число раз дифференцируемо по (x,t). Следовательно,

$$h(z)\in\mathbb{C}^{\infty}(Q_{(K+1)\rho}(z_0)), \tag{5.9}$$

$$\Delta h(z)-(h(z))_t=0 \quad \text{при} \quad z=(x,t)\in Q_{(K+1)\rho}(z_0). \tag{5.10}$$

Шаг 4. Применим теперь к функции $h(z)$ процедуру (2.6), которую мы для удобства воспроизведем. Прежде всего заметим, что для $z= =(x,t)\in Q_\rho(z_0)$ в силу формулы Тейлора имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|h_t(\vartheta,x)-h_t(z_0)|\leqslant\rho^2\left|D_t^2h\right|_{0;Q_\rho(z_0)}+\rho\left|D_xD_th\right|_{0;Q_\rho(z_0)}. \tag{5.11}$$

Наконец, в силу (2.6) и оценок Бернштейна (3.7) справедлива следующая оценка (2.6)

$$\begin{aligned}|h(z)-T_{z_0}h(z)|&\leqslant|t-t_0|\,|h_t(\vartheta,x)-h_t(z_0)|+\\&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\left|h_{x_ix_j}(z_0)-h_{x_ix_j}(t_0,\xi)\right||x_i-x_{0i}||x_j-x_{0j}|\leqslant\\&\leqslant\rho^4\left|D_t^2h\right|_{0;Q_\rho(z_0)}+\rho^3\left|D_xD_th\right|_{0;Q_\rho(z_0)}+\\&+\rho^3\sum_{i,j,k=1,1,1}^{N,N,N}|D_iD_jD_kh(z)|_{0;Q_\rho(z_0)}\leqslant\\&\leqslant M\left(K^{-4}+K^{-3}\right)|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)}\leqslant MK^{-3}|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Шаг 5. Теперь оценим функцию $r(z)$ из (5.7). Действительно,

$$\begin{aligned}|r(z)|&=\left|G_0*\left[(f(z_0)-f(z))I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\right]\right|=\\&=\left|G_0*\left[\left(\frac{f(z_0)-f(z)}{\rho^\delta(z,z_0)}\right)I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\rho^\delta(z,z_0)\right]\right|\leqslant\\&\leqslant[f]_{\delta/2,\delta}\,[(K+1)\rho]^\delta\left|G_0*I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\right|\leqslant\\&\leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}\,[(K+1)\rho]^{2+\delta},\end{aligned} \tag{5.13}$$

где мы воспользовались легко доказываемым неравенством

$$|G_0*I_{Q_R}|\leqslant MR^2.$$

□ Действительно,

$$G_0 * I_{Q_R(z_0)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, G_0(x-y, t-s) I_{Q_R(z_0)}(y,s) =$$
$$= \int\limits_{t_0-R^2}^{t_0} ds \int\limits_{B_R(x_0)} dy \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right]. \quad (5.14)$$

Теперь сделаем следующую замену переменных
$$s = R^2 s_1, \quad y = Ry^1$$
в результате которой получим

$$G_0 * I_{Q_R(z_0)} =$$
$$= R^2 \int\limits_{t_0/R^2-1}^{t_0/R^2} ds^1 \int\limits_{|y^1-x_0/R|\leqslant 1} dy^1 \frac{R^N}{(4\pi(t-R^2s^1))^{N/2}} \exp\left[-\frac{|x-y^1R|^2}{4(t-R^2s^1)}\right] \leqslant$$
$$\leqslant MR^2,$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от $R > 1$. ⊠

Теперь мы можем воспользоваться снова неравенством (2.6), которое имеет следующий вид:
$$|u(z) - T_{z_0}u(z)|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant M[(K+1)\rho]^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (5.15)$$

Наконец, в силу (5.13) и (5.15) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} = |u - T_{z_0}u - r|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant$$
$$\leqslant |u - T_{z_0}u|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} + |r|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant$$
$$\leqslant M(K+1)^{2+\delta}\rho^{2+\delta}\left([f]_{\delta/2,\delta} + [u]_{1+\delta/2,2+\delta}\right) \quad (5.16)$$

Шаг 6. В силу неравенств (5.12), (5.13) и (5.16) имеем

$$\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z) - p(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant |u(z) - T_{z_0}u(z) - T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant$$
$$\leqslant |u(z) - T_{z_0}u(z) - h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} + |h(z) - T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} =$$
$$= |r|_{0;Q_\rho(z_0)} + |h(z) - T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant$$
$$\leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}\,[(K+1)\rho]^{2+\delta} +$$
$$+ K^{-3}M(K+1)^{2+\delta}\rho^{2+\delta}\left([f]_{\delta/2,\delta} + [u]_{1+\delta/2,2+\delta}\right) \quad (5.17)$$

Разделим обе части последнего неравенства на $\rho^{2+\delta}$ и взяв supremum от обеих частей по всем $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ и $\rho > 0$ в силу эквивалентности полунорм $[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}$ и $[u]_{1+\delta/2,2+\delta}$ получим следующее неравенство:

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant$$
$$\leqslant MK^{-3}(K+1)^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta} + M(K+1)^{2+\delta}[f]_{\delta/2,\delta}. \quad (5.18)$$

Осталось выбрать $K > 0$ настолько большим, чтобы величина

$$MK^{-3}(K+1)^{2+\delta} \leqslant \frac{1}{2},$$

поскольку по условию $\delta \in (0,1)$.

Теорема доказана.

Теперь мы можем продолжить результат теоремы 5 на случай функций класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$. Действительно, справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть* $u \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$. *Определим* $f = \Delta u - u_t$. *Тогда существует константа* $M = M(N,\delta)$ *такая, что*

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}. \quad (5.19)$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала предположим, что $u(x,t)$ бесконечное число раз дифференцируема. Пусть $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ — это такая функция, что $|\varphi(x)| \leqslant 1$ и $\varphi(0) = 1$. По этой функции определим

$$\varphi_R(z) = \varphi\left(\frac{z}{R}\right) \quad \text{и} \quad u_R(z) = u(z)\varphi_R(z). \quad (5.20)$$

Тогда в силу теоремы 5 имеем

$$[u_R]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M[\Delta u_R - u_{Rt}]_{\delta/2,\delta}. \quad (5.21)$$

Заметим, что

$$\Delta u_R(z) - u_{Rt} =$$
$$= \varphi_R(z)f(z) + \frac{1}{R^2}u(z)\left(\Delta\varphi\right)(z/R) - \frac{1}{R}u(z)\varphi_t(z/R) + \frac{2}{R}u_{x_i}(z)\varphi_{x_i}(z/R),$$

причем

$$[\varphi_R]_{\delta/2,\delta} = \sup_{z_1\neq z_2}\frac{|\varphi_R(z_1)-\varphi_R(z_2)|}{\rho^\delta(z_1,z_2)} \leqslant \frac{M}{R^{\delta/2}}.$$

Теперь, воспользовавшись неравенством (1.22):

$$[uv]_{\delta/2,\delta} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta}, \quad (5.22)$$

получим

$$[\Delta u_R(z) - u_{Rt}]_{\delta/2,\delta} \leqslant |f|_{0;D}[\varphi_R]_{\delta/2,\delta} + |\varphi_R|_{0;D}[f]_{\delta/2,\delta} +$$
$$+ \frac{1}{R^2}[u(z)\left(\Delta\varphi\right)(z/R)]_{\delta/2,\delta} + \frac{1}{R}[u(z)\varphi_t(z/R)]_{\delta/2,\delta} +$$
$$+ \frac{2}{R}[u_{x_i}(z)\varphi_{x_i}(z/R)]_{\delta/2,\delta} \leqslant \frac{M}{R^{\delta/2}} + [f]_{\delta/2,\delta} \quad (5.23)$$

Шаг 2. В силу определения функции u_R имеем и результата (5.23)

$$|u_R|_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M, \tag{5.24}$$

где постоянная $M>0$ не зависит от $R \geqslant 1$. Возьмем теперь $R = m \in \in \mathbb{N}$. Используя известный результат теории банаховых пространств мы получим, что существует такая подпоследовательность $\{u_{m'}\} \subset \{u_m\}$, что

$$|u|_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant \liminf_{m' \to +\infty} |u_{m'}|_{1+\delta/2,2+\delta}, \tag{5.25}$$

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1}) \quad \text{при} \quad m' \to +\infty, \tag{5.26}$$

причем в силу вполне непрерывного вложения $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K)$ в $\mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(K)$ для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$ имеем

$$D_t u_{m'}(x,t) \rightrightarrows D_t u(x,t), \quad D^\alpha_x u_{m'}(x,t) \rightrightarrows D^\alpha_x u(x,t), \quad |\alpha| \leqslant 2 \tag{5.27}$$

равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Полунорма $[\cdot]_{1+\delta/2,2+\delta;K}$ является слабо полунепрерывной снизу на банаховом пространстве $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K)$ для любого компакта $K \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

$\square$ Действительно, пусть $\{u_{m'}\} \subset \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K)$ и

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K) \quad \text{при} \quad m' \to +\infty,$$

тогда в силу вполне непрерывного вложения $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K) \hookrightarrow \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(K)$ имеем

$$u_{m'} \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(K) \quad \text{при} \quad m' \to +\infty.$$

Поскольку полунорму $[\cdot]_{1+\delta/2,2+\delta;K}$ можно представить в следующем виде:

$$[u]_{1+\delta/2;2+\delta;K} = \\ = |u|_{1+\delta/2,2+\delta;K} - |u|_{0;K} - \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;K} + |u_t|_{0;K} - \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;K}, \tag{5.28}$$

где норма $|u|_{1+\delta/2,2+\delta;K}$ является слабо полунепрерывной снизу на $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K)$, а норма

$$\|u\| \stackrel{def:}{=} |u|_{0;K} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;K} + |u_t|_{0;K} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;K}$$

слабо непрерывна на $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K) \hookrightarrow \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(K)$, то в силу (5.28) полунорма $[\cdot]_{1+\delta/2,2+\delta;K}$ является слабо полунепрерывной снизу на банаховом пространстве $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K)$. $\boxtimes$

Поэтому в силу (5.21), (5.23) и (5.25) мы получим, что

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta;K} \leqslant \liminf_{m'\to+\infty} [u_{m'}]_{1+\delta/2,2+\delta;K} \leqslant \\ \leqslant \liminf_{m'\to+\infty} [u_{m'}]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}, \quad (5.29)$$

где константа M не зависит от выбора компакта $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Следовательно,

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} = \sup_{K\subset\mathbb{R}^N} [u]_{1+\delta/2,2+\delta;K} \leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}. \quad (5.30)$$

Шаг 3. Рассмотрим функцию $\omega_\varepsilon(z) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ следующего явного вида:

$$\omega(z) \stackrel{def:}{=} \begin{cases} c_1 \exp\left\{-\frac{1}{1-|z|^2}\right\}, & \text{если} \quad |z| \leqslant 1; \\ 0, & \text{если} \quad |z| \geqslant 1, \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\omega_\varepsilon(z) \stackrel{def:}{=} \frac{1}{\varepsilon^{N+1}}\omega\left(\frac{z}{\varepsilon}\right), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^{N+1}} \omega(z)\,dz = 1.$$

Теперь мы можем ввести срезку функции $u(z) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$

$$u_\varepsilon(z) = \omega_\varepsilon * u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x-y,t-s)u(y,s)\,dy\,ds. \quad (5.32)$$

Известен следующий результат:

$$u_\varepsilon(z) \in \mathbb{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{N+1}). \quad (5.33)$$

Кроме того, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} = \lim_{\varepsilon\downarrow+0}[u^\varepsilon]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M \limsup_{\varepsilon\downarrow+0} [\Delta u_\varepsilon - u_{\varepsilon t}]_{\delta/2,\delta} = \\ = M \limsup_{\varepsilon\downarrow+0} \left[(\Delta u - u_t)_\varepsilon\right]_{\delta/2,\delta} \leqslant M \left[\Delta u - u_t\right]_{\delta/2,\delta}. \quad (5.34)$$

Лемма доказана.

Замечание 6. Заметим, что если полная граница ∂D (нормальная граница + верхняя крышка — $\partial' D \cup B_T$) является гладкой, то применяя срезку решения можно получить априорную оценку Шаудера в области D.

Однако, многочисленные разумные задачи таковы, что полная граница области не обладает свойством гладкости. Кроме того, краевые условия задаются только на нормальной границе $\partial' D$ и поэтому мы apriori не знаем значение решения на верхней крышке B_T. Поэтому в отличие от эллиптического случая мы не можем так просто получить априорную оценку Шаудера в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

§ 6. Решение первой краевой задачи

Для того чтобы провести редукцию первой краевой задачи (4.5), (4.6) к случаю $\psi(x,t) \equiv 0$ нужно в дополнение привести следующее определение:

Определение 3. *Если область D обладает свойством* (E) *и, кроме того, производные $\partial_x\partial_t h$ и $\partial_t^2 h$ от функций h, локально представляющих $\overline{S}$, являются непрерывными, то мы скажем, что D обладает свойством* ($\overline{\mathrm{E}}$).

Теорема 6. *Если выполняются условия* ($\overline{\mathrm{A}}$), ($\overline{\mathrm{B}}$), ($\overline{\mathrm{C}}$), *область D обладает свойством* ($\overline{\mathrm{E}}$), $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, $L\psi = f$ *на* ∂B, [1] *то существует единственное решение $u(x,t)$ первой краевой задачи* (4.5), (4.6) *класса* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$.

Доказательство.

Шаг 1. Единственность была ранее доказана с помощью принципа максимума.

Шаг 2. Проведем редукцию исходной задачи (4.5), (4.6) к случаю $\psi(x,t)$. Если $\Psi \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, то в силу свойства ($\overline{\mathrm{A}}$) получим, что

$$|L\Psi|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant c_1|\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}.$$

Таким образом, мы можем ввести новую функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - \Psi(x,t)$$

с какой–нибудь функцией $\Psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, совпадающей с ψ на нормальной границе $\partial' D = \overline{B} \cup S$ и учесть, что

$$|Lv|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + |L\Psi|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \\ \leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + c_1|\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + 2c_1|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$$

А далее нужно использовать эту априорную оценку вместо (4.7).

Шаг 3. Изложим схему доказательства *метода продолжения по параметру*. Рассмотрим однопараметрическое семейство параболических операторов

$$L_\lambda = \lambda L + (1-\lambda)L_0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{6.1}$$

где

$$L_0 \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Обозначим через Σ множество всех значений λ, для которых задача

$$L_\lambda u_\lambda(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.2}$$

$$u_\lambda(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S \tag{6.3}$$

[1] Это естественное условие согласования.

имеет единственное решение $u_\lambda(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$ такой, что $f(x,t) = 0$ на ∂B.

Нам нужно доказать следующие свойства:

(i) Σ содержит $\lambda = 0$, т. е. множество Σ не пусто;

(ii) Σ — открытое множество в сегменте $[0,1]$, т. е. если $\lambda_0 \in \Sigma$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что все λ такие, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ содержатся в Σ;

(iii) Σ — замкнутое множество, т. е. для любой последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Sigma$ таких, что $\lambda_n \to \overline{\lambda}$ следует, что $\overline{\lambda} \in \Sigma$.

Если $\Sigma \subset [0,1]$ удовлетворяет свойствам (i)–(iii), то это множество является непустым открыто–замкнутым множеством в метрическом пространстве $([0,1], d(a,b) = |a-b|)$. Но известно, что в этом метрическом пространстве имеется только два открыто–замкнутых множества — это пустое множество $\varnothing$ и сам отрезок $[0,1]$. Поскольку в силу (i) множество $\Sigma \neq \varnothing$, то следовательно $\Sigma = [0,1]$, а, значит, краевая задача

$$L_1 u_1(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.4}$$

$$u_1(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S \tag{6.5}$$

имеет единственное решение $u_1(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$ такой, что $f(x,t) = 0$ на ∂B. Это и есть решение первой краевой задачи для параболического оператора L.

Теперь приступим к реализации этой схемы.

Шаг 4. Прежде всего заметим, что доказательство свойства (i) довольно сложное, однако гораздо проще, чем непосредственное доказательство однозначной разрешимости первой краевой задачи для общего параболического уравнения. Тем самым, считаем результат (i) известным.

Шаг 5. Запишем $L_\lambda u_\lambda = f$ в следующем эквивалентном виде:

$$L_{\lambda_0} u_\lambda = (L_{\lambda_0} u_\lambda - L_\lambda u_\lambda) + f = F(u_\lambda). \tag{6.6}$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$v = A(u),$$

определенное следующим образом: для функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, равной нулю на $\overline{B} \cup S$, возьмем в качестве $A(u)$ (единственное) решение задачи

$$L_{\lambda_0} v = F(u) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S. \tag{6.7}$$

Так как $\lambda_0 \in \Sigma$ и $F(u) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, $F = 0$ на ∂B, то преобразование $v = Au$ определено для всех $u \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, равных нулю на $\overline{B} \cup S$.

Если мы докажем, что для некоторой функции $u(x,t)$ выполняется равенство $Au = u$, то u будет единственным решением задачи (6.2), (6.3) и, следовательно, $\lambda \in \Sigma$.

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$F(u) = f + [\lambda_0 L + (1-\lambda_0)L_0]\, u - [\lambda L + (1-\lambda)L_0]\, u = \\ = f + (\lambda_0 - \lambda)Lu + (\lambda - \lambda_0)L_0 u, \quad (6.8)$$

из которой вытекает следующая оценка:

$$|F(u)|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_4|\lambda - \lambda_0||u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \quad (6.9)$$

где K_4 — это постоянная, не зависящая от λ, u и f. Здесь мы воспользовались следующими неравенствами:

$$|Lu|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant M|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}, \quad |L_0 u|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant M_0|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D},$$

справедливость которых вытекает из оценки (1.26).

Применяя априорную оценку Шаудера (4.7), получим из (6.7 и (6.9) следующее неравенство:

$$|v|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3K_4|\lambda - \lambda_0||u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \quad (6.10)$$

где K_3 не зависит от λ, u и f. Теперь воспользуемся снова априорной оценкой Шаудера (4.7) и получим, что, в частности,

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \quad (6.11)$$

С другой стороны, если потребовать, чтобы

$$K_3K_4|\lambda - \lambda_0| \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |v|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \quad (6.12)$$

Обозначая теперь через X_0 замкнутое в $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ множество, определенное следующим образом:

$$X_0 \stackrel{def:}{=} \left\{u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D) : \, |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}\right\} \bigcap \\ \bigcap \left\{u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad (x,t) \in \overline{B} \cup S\right\}. \quad (6.13)$$

Из (6.11) и (6.12) приходим к выводу о том, что линейный оператор A отображает X_0 в X_0.

Докажем, что оператор A сжимающий на X_0. Действительно, пусть

$$v_1 = Au_1, \quad v_2 = Au_2, \quad u_1, u_2 \in X_0.$$

Тогда

$$L_{\lambda_0}(v_1 - v_2) = L_{\lambda_0}(u_1 - u_2) - L_\lambda(u_1 - u_2) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \\ v_1 - v_2 = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S.$$

Аналогичными рассуждениями при помощи априорной оценки Шаудера (4.7) получим неравенство

$$|v_1 - v_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant$$

$$\leqslant K_3K_4|\lambda-\lambda_0||u_1-u_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}\leqslant\frac{1}{2}|u_1-u_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$$

при условии

$$K_3K_4|\lambda-\lambda_0|\leqslant\frac{1}{2}.$$

Таким образом, оператор при таких λ является сжимающим на X_0 —замкнутом, выпуклом и ограниченном множестве из $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$. Следовательно, в силу теоремы о сжимающем отображении мы приходим к выводу о существовании единственной неподвижной точки $u(x,t)\in X_0$.

Шаг 6. Пусть $\lambda_m\in\Sigma$ и

$$\lambda_m\to\sigma\quad\text{при}\quad m\to+\infty.$$

Нам нужно доказать, что $\sigma\in\Sigma$, т.е. для любой $f(x,t)\in\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$, равной нулю на ∂B, существует функция $u(x,t)\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, такая, что

$$L_\sigma u=f\quad\text{при}\quad(x,t)\in D\cup B_T,\tag{6.14}$$

$$u=0\quad\text{на}\quad\overline{B}\cup S.\tag{6.15}$$

По предположению для каждого m существует функция $u_m(x,t)\in$ $\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, такая, что

$$L_{\lambda_m}u_m=f\quad\text{при}\quad(x,t)\in D\cup B_T,\tag{6.16}$$

$$u_m=0\quad\text{на}\quad\overline{B}\cup S.\tag{6.17}$$

Заметим, что коэффициенты семейства операторов L_λ удовлетворяют условиям $(\overline{\text{A}})$ и $(\overline{\text{B}})$ с константами K_1 и K_2, не зависящими от λ. Поэтому применяя априорную оценку Шаудера (4.7), мы получим следующее неравенство

$$|u_m|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}\leqslant K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D},\tag{6.18}$$

где K_3 не зависит от $m\in\mathbb{N}$. Далее используя теорему Асколи–Арцела, как при доказательстве теоремы 1, докажем, что существует подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, которую мы снова обозначим через $\{u_m\}$, такая, что

$$\{u_m\},\quad\{D_xu_m\},\quad\{D_x^2u_m\},\quad\{D_tu_m\}\tag{6.19}$$

равномерно сходятся в D. Кроме того, если $u_m\to u$ равномерно в D, то соответствующие последовательности производных сходится равномерно к соответствующим производным u, причем

$$u(x,t)\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D).$$

Переходя к пределу при $m\to+\infty$ в равенствах (6.16) и (6.17), записанных для соответствующей подпоследовательности $\{u_m\}$, получим равенства

$$L_\sigma u=f\quad\text{при}\quad(x,t)\in D\cup B_T,\tag{6.20}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S. \tag{6.21}$$

Следовательно, $\sigma \in \Sigma$ — множество Σ замкнуто.

Теорема доказана.