Тематическая лекция 2

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В этой лекции мы докажем слабый принцип максимума и рассмотрим его приложения.

§ 1. Области

Прежде всего рассмотрим основные понятия, связанные с рассматриваемыми областями $D \subset \mathbb{R}^N$. Заметим, что при рассмотрении эллиптических операторов, например, оператора Лапласа в некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, мы имели дело приблизительно с такой областью (ограниченной):

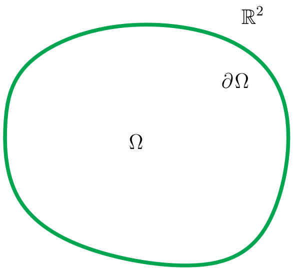

Рис. 1. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Область Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega$ и граничные условия ставятся на полной границе $\partial\Omega$. Например, можно поставить задачу Дирихле

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad x \in \Omega, \quad u = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.1}$$

В отличие от эллиптического случая, как правило, область $D \subset \subset \mathbb{R}^N_x \otimes \mathbb{R}^1_t$ имеет не гладкую границу ∂D. Действительно, она имеет угловые точки. Классический пример приведен на рисунке 7. Кроме того, в отличие от эллиптических уравнений граничные условия для параболических уравнений ставятся не на полной границе ∂D области D, а только на так называемой *параболической границе* $\partial^{'} D$.

Например, можно предъявить такую постановку краевой задачи:

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t \in (0,t_0], \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [a,b], \tag{1.3}$$

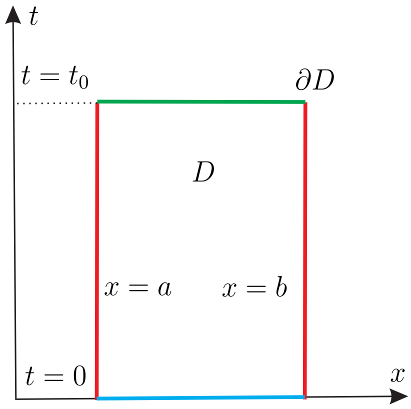

Рис. 2. Цилиндрическая область $D = (a, b) \otimes (0, t_0)$ с негладкой границей ∂D.

$$u|_{x=a} = \varphi_1(t), \quad u|_{x=b} = \varphi_2(t), \quad t \in [0, t_0]. \tag{1.4}$$

В краевой задаче (1.2)–(1.4) отсутствует граничное условие при $t = t_0$. Согласно нашим сформировавшимся после курса лекций ММФ А. Н. Боголюбова [?] представлениям это граничное условие не нужно, поскольку значение решения $u(x, t)$ в момент времени $t = t_0$ вполне определяется уже заданными граничными условиями (1.3), (1.4) и правой частью $f(x, t)$. И это связано с тем, что параболический оператор содержит производную по времени первого порядка, а не второго как в случае, например, волнового уравнения. Более того, можно создать такое уравнение второго порядка по t

$$u_{tt} + u_{xx} = f(x, t), \tag{1.5}$$

для корректной постановки которого в принципе нужно задание граничного условия при $t = t_0$. Правда, такое уравнение в физике не встречается.

Теперь заметим, что мы используем несколько другую терминологию, чем в курсе ММФ. Мы называем условие (1.3) не начальным условием, а граничным. Хотя можно это условие называть как начальным условием, так и граничным условием. В связи с этим задачу (1.2)–(1.4) называют или задача Коши–Дирихле или называют первая краевая задача. При чтении научной литературы по дифференциальным уравнениям используется второе название, а при чтении научной литературы по математической физики используется первое название.

Давайте сформулируем некоторые понятия и определения, связанные с рассмотрением областей $D \subset \mathbb{R}^N$, где изучаются параболические уравнения.

Итак, ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, изображенная на следующем рисунке имеет границу ∂D, состоящую из следующих частей: из

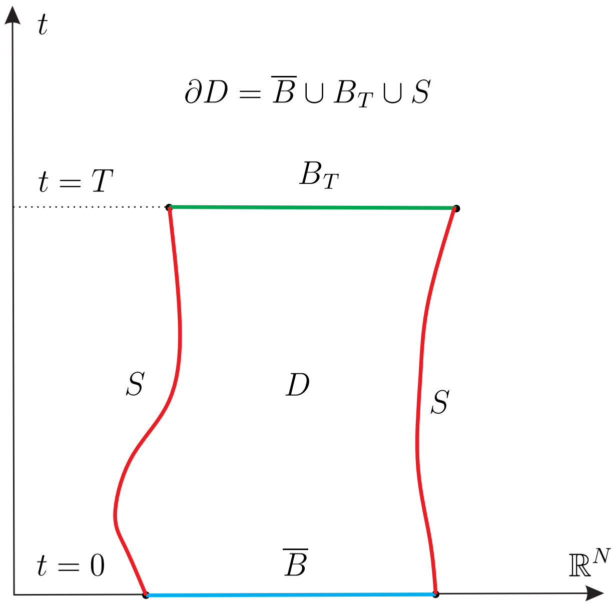

Рис. 3. Граница ∂D области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

основания при $t = 0$, называемая нижней крышкой

$$\overline{B} \stackrel{def:}{=} \partial D \cap \{t = 0\}, \quad \overline{B} = B \cup \partial B,$$

из верхней крышки

$$\overline{B}_T \stackrel{def:}{=} \partial D \cap \{t = T\}, \quad \overline{B}_T = B_T \cup \partial B_T,$$

и из боковой поверхности

$$S \stackrel{def:}{=} \partial D \cap \{0 < t < T\} \cup \partial B_T.$$

При этом мы в основном рассматриваем такие области $D \subset \mathbb{R}^N$, что множества

$$B \quad \text{и} \quad B_T$$

являются областями в соответствующих гиперплоскостях $t = 0$ и $t = T$. Символом $\overline{B}$ мы обозначили замыкание области B, $\overline{B}_T$ — замыкание области B_T, а символами ∂B и ∂B_T мы обозначили границы областей B и B_T, соответственно.

Отметим, что граничные условия решения параболического уравнения, как мы уже отметили, задаются не на всей границе ∂D области D, а только на ее части

$$\partial' D \stackrel{def:}{=} \overline{B} \cup S,$$

называемой нормальной границей или параболической границей. Отметим, что на практике довольно часто область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ может быть представлена в виде цилиндра $D = \Omega \otimes (0,T)$ или в более общем случае $D = \Omega \otimes (T_0,T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Такую область называют цилиндрической областью. Пример цилиндрической области приведен на рисунке 7. С другой стороны, много практических примеров, так называемых областей с подвижной границей, когда область D является нецилиндрической. Пример, нецилиндрической области изображен на рисунке 8. Кроме того, введем обозначение

$$\overline{\partial' D} \stackrel{def:}{=} \overline{B} \cup \overline{S}.$$

Кроме того, используют следующие обозначения (см. рисунок 9):

$$B_\tau \stackrel{def:}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad D_\tau \stackrel{def:}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{def:}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}$$

для любого $\tau \in (0,T)$. Мы будем в дальнейшем рассматривать в ос-

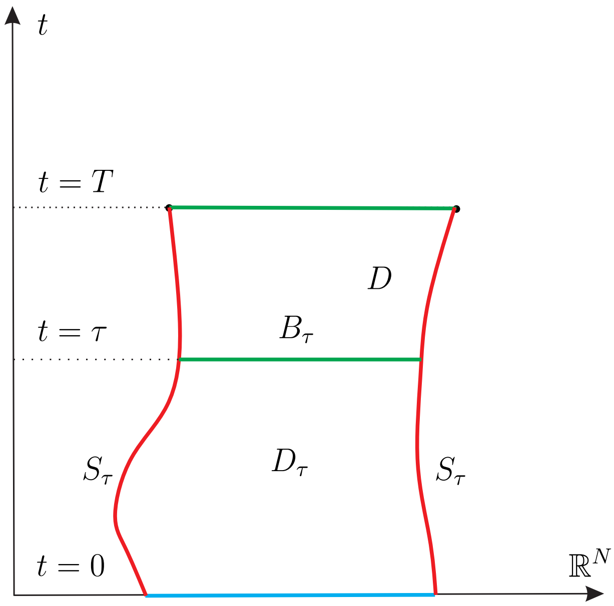

Рис. 4. Множества D_τ, B_τ и S_τ.

новном такие области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, что множества B_τ для всех $\tau \in$ $\in [0,T]$ являются областями (связными и открытыми множествами) на соответствующих гиперплоскостях $t = \tau$.

§ 2. Постановка задач для параболических операторов

В курсе лекций мы будем рассматривать не только задачу Коши и первую краевую задачу, а также вторую и третью краевые задачи. Итак, последовательно дадим постановки указанных задач. Прежде всего дадим определение параболического уравнения в области $D \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Рассмотрим следующее уравнение:

$$Lu(x,t) \stackrel{def:}{=} \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t). \tag{2.1}$$

Оператор L, определенный равенством (2.1), называется параболическим в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, если для всех $(x,t) \in D$ и для каждого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0. \tag{2.2}$$

Иначе говоря, оператор L называется параболическим в области D, если его часть

$$L_0 u \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u \tag{2.3}$$

для всех $(x,t) \in D$ является эллиптическим оператором по переменным x_i, $i = \overline{1,N}$ с параметром t.

О п р е д е л е н и е р е ш е н и я п а р а б о л и ч е с к о г о у р а в н е н и я. *Функция $u = u(x,t)$ непрерывная вместе со всеми своими производными*

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

входящими в оператор L, в области D называется классическим решением уравнения (2.1).

З а д а ч а К о ш и. *Найти классическое решение $u(x,t)$ уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+ \stackrel{def:}{=} \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{2.4}$$

удовлетворяющего начальному (граничному при $t = 0$) условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.5}$$

З а м е ч а н и е 1. Сразу же заметим, что задача Коши имеет, вообще говоря, неединственное решение. Для того чтобы классическое решение задачи Коши было единственным достаточно потребовать выполнения следующих неравенств:

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right), \quad |f(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right) \tag{2.6}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t \geqslant 0$ для некоторых постоянных $M > 0$ и $\beta > 0$.

Первая краевая задача. *Найти классическое решение $u(x,t)$ непрерывное на замыкании $\overline{D}$ области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, удовлетворяющее уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.7}$$

начальному условию на нижней крышке (*граничному при* $t = 0$)

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B}, \tag{2.8}$$

а также граничному условию на поверхности на боковой границе S

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S \stackrel{def:}{=} (\partial D \cap \{0 < t < T\}) \cup \partial B_T. \tag{2.9}$$

Замечание 2. Отметим, что граничные условия (2.8) и (2.9) можно объединить в одно граничное условие на параболической границе $\partial' D = \overline{B} \cup S$ полной границы ∂D имеющее вид:

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{2.10}$$

Как мы видим специфика первой краевой задачи для параболического оператора L — это отсутствие граничного условия на верхней крышке B_T области D.

Для того чтобы сформулировать вторую краевую задачу для параболического оператора L в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ нам нужно ввести *производную по внутренней нормали* $\partial/\partial n_{x,t}$ и *производную по внутренней конормали* $\partial/\partial \nu_{x,t}$ к боковой поверхности S. Пусть в каждой точке $(x,t) \in S$ определено непрерывное векторное поле внутренних нормалей $n_{x,t}$, лежащее для любого $t = \tau \in [0,T]$ в случае цилиндрической области D на гиперплоскости $t = \tau$ и определенное своими углами $\cos(n_{x,t}, e_i)$. Тогда вектор внутренней конормали $\nu_{x,t}$ определен следующим образом:

$$\nu_{x,t} = \left(\sum_{i=1}^N a_{i1}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_i), \cdots, \sum_{i=1}^N a_{iN}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_i)\right),$$

лежащий тоже на гиперплоскости $t = \tau$ в случае цилиндрической области D. Оператором нормальной производной называется следующая величина:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_{x,t}}\Big|_S \stackrel{def:}{=} \sum_{i=1}^N \cos(n_{x,t}, e_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_S, \tag{2.11}$$

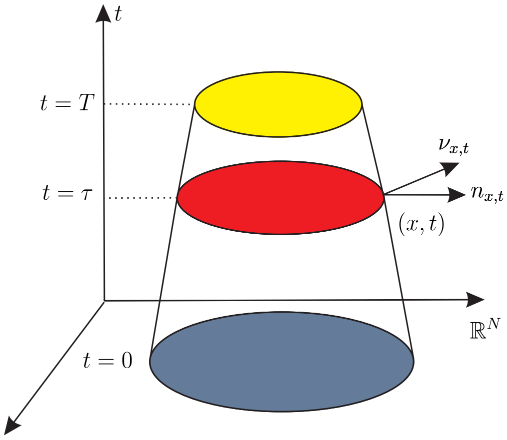

Рис. 5. Векторы внешней нормали $n_{x,t}$ и внешней конормали $\nu_{x,t}$.

а оператором конормальной производной в случае оператора L с матрицей $(a_{ij}(x,t))$ является величина

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}}\Big|_S \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_i)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_S. \qquad (2.12)$$

Вторая краевая задача. *Найти классическое решение $u(x,t)$ уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \qquad (2.13)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \qquad (2.14)$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \qquad (2.15)$$

Третья краевая задача. *Найти классическое решение $u(x,t)$ уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \qquad (2.16)$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \qquad (2.17)$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \qquad (2.18)$$

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что можно задать на боковой поверхности S также общее граничное условие следующего вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial l_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S, \tag{2.19}$$

где векторное внутреннее поле $l_{x,t}$ является непрерывным векторным полем на S нигде не совпадающее с касательным направлением к поверхности S.

Помимо перечисленных задач можно рассматривать также з а д а ч у С т е ф а н а со свободной границей (см. подробное рассмотрение этой задачи в книге [**?**]), когда заранее граница области D полностью неизвестна. Однако, эту задачу мы рассматривать не будем и поэтому не формулируем.

§ 3. Определения

Рассмотрим оператор

$$Lu \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.1}$$

в $(N+1)$–мерной области (связное, открытое множество) $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют следующим условиям:

(A) Оператор L — параболический в D, т. е. для каждой точки $(x,t) \in$ $\in D$ и для любого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0;$$

(B) коэффициенты оператора L — непрерывные функции в D;

(C) $c(x,t) \leqslant 0$ в D.

Дадим определение классического решения уравнения (3.1) в области D.

О п р е д е л е н и е к л а с с и ч е с к о г о р е ш е н и я. *Непрерывная в D функция $u(x,t)$ называется классическим решением уравнения $Lu = 0$ в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, если все слагаемые входящие в оператор Lu, т.е.*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial t},$$

являются непрерывными функциями в области D и уравнение $Lu(x,t) = 0$ выполнено в каждой точке $(x,t) \in D$.

З а м е ч а н и е 4. В этом определении мы не накладываем на решение условие ограниченности, т. е. решение может иметь особенность на границе области.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы понимаем решение в смысле этого определения.

§ 4. Слабый принцип максимума

Справедливо важное утверждение, называемое *слабым принципом максимума.*

Лемма 1. *Предположим, что либо* $Lu > 0$ *всюду в* D, *либо* $Lu \geqslant 0$ *и* $c(x,t) < 0$ *всюду в* D. *Тогда* $u(x,t)$ *не может иметь положительного локального максимума в* D.

Доказательство.

Пусть $u = u(x,t)$ имеет положительный локальный максимум в точке $P_0 = z_0 = (x_0, t_0) \in D$. Докажем, что

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0)\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0. \qquad (4.1)$$

В самом деле, линейным преобразованием $y = \widehat{C}z$ область D преобразуется в область D^*, а неравенство (4.1) преобразуется в неравенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}\frac{\partial^2 v(y_0)}{\partial y_i \partial y_j} \leqslant 0, \qquad (4.2)$$

где

$$v(y) = u(z), \quad y_0 = \widehat{C}z_0, \quad (b_{ij}) = \widehat{C}(a_{ij})\widehat{C}^T,$$
$$z = (x,t), \quad z_0 = (x_0,t_0), \quad y = (x^*,t^*), \quad y_0 = (x_0^*, t_0^*).$$

Если выбрать матрицу $\widehat{C}$ так, чтобы b_{ij} была единичной матрицей,

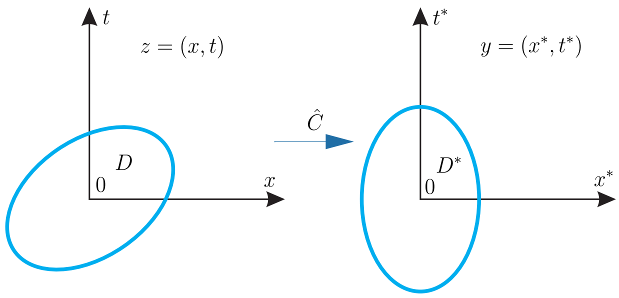

Рис. 6. Отображение области D в область D^*.

и замечая, что $v(y_0)$ тоже положительный максимум $v(y)$ в D^* и, следовательно, выполнено неравенство

$$\frac{\partial^2 v(y_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}\frac{\partial^2 v(y_0)}{\partial y_i \partial y_j} \leqslant 0.$$

Следовательно, выполнено неравенство (4.1). Наконец, в точке $P_0 = (x_0, t_0)$ выполнены необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$Lu(x_0,t_0) \leqslant c(x_0,t_0)u(x_0,t_0). \tag{4.3}$$

Поскольку $u(x_0,t_0) > 0$, то мы приходим к противоречию в неравенстве (4.3) в каждом из двух случаев

$$Lu > 0 \quad \text{и} \quad c(x,t) \leqslant 0 \quad \text{либо} \quad Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad c(x,t) < 0.$$

Лемма доказана.

Приложение слабого принципа максимума. В качестве приложения слабого принципа максимума рассмотрим вопрос о *единственности решения следующей первой краевой задачи*:

$$Lu(x,t) = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{4.4}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S, \tag{4.5}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. Будем предполагать, что функция $f = f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ определена на множестве $(D \cup B_T) \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N$. Справедлива следующая теорема единственности:

Теорема 1. *Пусть L — это параболический оператор с коэффициентами $a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}_b(D \cup B_T)$ (непрерывные и ограниченные на множестве $D \cup B_T$), и пусть $f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ является неубывающей по переменной $p \in \mathbb{R}^1$ функцией. Тогда существует не более одного решения задачи* (4.4), (4.5).

Доказательство.

Шаг 1. Сначала мы рассмотрим случай $c(x,t) \leqslant 0$ и функция $f = f(x,t,p,p_1,....,p_N)$ является строго возрастающей по $p \in \mathbb{R}^1$.

Предположим, что $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — это два решения задачи (4.4) и (4.5). Если

$$u_1(x,t) \not\equiv u_2(x,t),$$

то можно предположить, что

$$u_1(x,t) > u_2(x,t) \quad \text{в некоторых точках} \quad D.$$

Поэтому функция

$$u(x,t) \stackrel{def:}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

будет иметь положительный максимум в $D \cup B_T$. Обозначим через $P_0 = (x_0,t_0)$ точку, где достигается максимум. Ясно, что

$$D_x u_1(P_0) = D_x u_2(P_0), \quad u_1(P_0) > u_2(P_0).$$

Поэтому мы получаем, что

$$Lu(P_0) = f(x_0, t_0, u_1(x_0, t_0), D_x u_1(x_0, t_0)) - \\ - f(x_0, t_0, u_2(x_0, t_0), D_x u_2(x_0, t_0)) > 0.$$

С другой стороны, при доказательстве слабого принципа максимума мы доказали, что

$$Lu(P_0) \leqslant 0$$

в каждой точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup B_T$, в которой $u(x,t)$ имеет положительный максимум. Пришли к противоречию.

Шаг 2. Чтобы доказать теорему в общем случае, сделаем преобразование

$$v(x,t) = e^{-\lambda t} u(x,t),$$

которое переводит уравнение (4.4) в следующее:

$$(L - c(x,t)I)v(x,t) = \widehat{f}(x,t,v,D_x v) \stackrel{def:}{=} \\ = f(x,t,ve^{\lambda t}, e^{\lambda t} D_x v)e^{-\lambda t} + (\lambda - c(x,t))v.$$

Выберем

$$\lambda > \sup_{(x,t)\in D} c(x,t),$$

тогда функция $\widehat{f}(x,t,v,D_x v)$ будет строго возрастающей по v, а коэффициент при $v(x,t)$ в выражении

$$(L - c(x,t)I)v(x,t)$$

равен нулю. Таким образом, осталось применить результат, полученный на первом шаге.

Теорема доказана.

§ 5. Слабый принцип максимума ограниченного решения в цилиндрической области

Рассмотрим частный случай цилиндрической ограниченной области $D = \Omega \otimes (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Кроме того, сделаем существенное предположение относительно решения $u(x,t)$.

Определение ограниченного решения. *Назовем функцию $u(x,t)$ ограниченным решением, если она является ограниченной и непрерывной в $\overline{D} = \overline{\Omega} \otimes [0,T]$, функции $u_{x_i}(x,t)$ и $u_{x_i x_j}(x,t)$ для каждого $t \in [0,T]$ являются непрерывными в Ω и в любой точке D существует производная $u_t(x,t)$.*

Справедлив следующий принцип максимума:

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, выполнены условия* (A), (B) *и* (C) *относительно коэффициентов параболического оператора L в области D. Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in D, \tag{5.1}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial'' D \equiv \overline{\Omega} \otimes \{t=0\} \cup \partial\Omega \otimes (0,T)\ ^{1)}. \tag{5.2}$$

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ *в* D.

Доказательство.

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}. \tag{5.3}$$

Пусть z_γ — это точка в $\overline{D}$, в которой $v(x,t)$ принимает максимальное значение. Прежде всего заметим, что в силу ограниченности решения $u(x,t)$ в D

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to B_T = \{x \in \Omega,\ t = T\}.$$

Поэтому $z_\gamma \notin B_T$ и $z_\gamma \in D \cup \partial' D$.

Шаг 2. Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D, т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D.

□ Действительно, в противном случае (как и ранее при доказательстве слабого принципа максимума в лемме 1) имеем

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma) \frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = v_{x_i}(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Поэтому в точке z_γ выполнена следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant Lu(x,t) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma) \frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(z_\gamma) \frac{\partial v(z_\gamma)}{\partial x_i} + \\ + c(z_\gamma) u(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant c(z_\gamma) u(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant \\ \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} + c(z_\gamma) v(z_\gamma) + c(z_\gamma) \frac{\gamma}{T-t} \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} + c(z_\gamma) \frac{\gamma}{T-t} < 0. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Шаг 3. Полученное противоречие доказывает, что либо $v(z_\gamma) < 0$ в D либо $z_\gamma \in \partial' D$ и тогда в силу (5.2) имеем $v(z_\gamma) \leqslant 0$. Итак, в любом случае имеем

$$v(x,t) \leqslant v(z_\gamma) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Поскольку $u(x,t)$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D$ устремим $\gamma \to +0$ и получим неравенство

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Теорема доказана.

[1)] Граница $\partial'' D \subset \partial' D$ и поэтому отличается от параболической или нормальной границы $\partial' D$.

Теперь рассмотрим обобщение этой теоремы на случай неограниченной области. Итак, справедлива следующая теорема:
Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A), (B), (C) *и коэффициенты оператора L являются ограниченными функциями в D. Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in D, \tag{5.4}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial^{''} D \equiv \{x \in \overline{\Omega},\ t=0\} \cup \{x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)\}. \tag{5.5}$$

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ в D.

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим следующую функцию:

$$v_0(x,t) = \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t), \quad \lambda > 0. \tag{5.6}$$

Непосредственно можно проверить, что выполнено неравенство

$$Lv_0(x,t) \leqslant 0 \tag{5.7}$$

для достаточно большой константы $\lambda > 0$.

Шаг 2. Положим

$$m = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)|, \quad D_{T,R} \stackrel{def:}{=} [\Omega \cap B_R] \otimes (0,T), \tag{5.8}$$

где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < R\}$. Тогда функция

$$w_R(x,t) = u(x,t) - v_0(x,t)\frac{m}{\operatorname{ch}(R)} \tag{5.9}$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \tag{5.10}$$

для всех

$$(x,t) \in \partial^{'} D_{T,R} = \{\overline{\Omega} \cap \overline{B}_R,\ t=0\} \cup \{\partial\Omega \cap \partial B_R,\ t \in (0,T)\}.$$

□ Действительно, в силу условия (5.5) $u(x,t) \leqslant 0$ на $\partial^{'} D$, а при $x \in \partial B_R$ имеем

$$w_R(x,t)\Big|_{|x|=R} = (u(x,t) - m)\Big|_{|x|=R} \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

С другой стороны, в силу условия (5.4) и (5.7) имеем

$$Lw_R(x,t) \geqslant 0. \tag{5.11}$$

В силу ограниченности области $D_{T,R}$ выполнен результат теоремы 2

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_{T,R} \Rightarrow u(x,t) \leqslant v_0(x,t)\frac{m}{\operatorname{ch} R}.$$

Переходя к пределу при $R \to +\infty$ получим результат теоремы.

Теорема доказана.

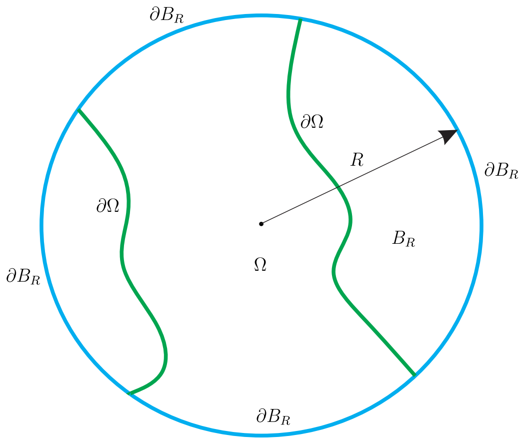

Рис. 7. Множество $\Omega \cap B_R$.

З а м е ч а н и е 5. Заметим, что в формулировке теорем 2 и 3 мы используем понятие ограниченного решения, а именно условие, что решение $u(x,t)$ ограничено в рассматриваемой цилиндрической области. Тем самым, если решение только непрерывно в области и может иметь особенность на границе области исключен из рассмотрения.

§ 6. Сильный принцип максимума

Доказательство основного утверждения этого параграфа — принципа максимума, мы будем проводить для произвольной области $D \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Нам потребуются новые понятия. Поэтому введем обозначения.

О б о з н а ч е н и я. Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — любая точка из D. Обозначим через $S(P_0)$ множество всех точек $Q = \{(x,t)\}$ в D, таких, что их можно соединить с P_0 простой непрерывной кривой, лежащей в D, вдоль которой координата t не убывает от Q к P_0. Через $C(P_0)$ мы обозначим компоненту пересечения $D \cap \{t = t_0\}$, которая содержит P_0. Заметим, что $S(P_0) \supset C(P_0)$.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение этой лекции, называемое сильным принципом максимума.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* D *и если* $u(x,t)$ *имеет в* D *положительный локальный максимум* (*отрицательный локальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S(P_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Для того чтобы доказать эту важную теорему нам нужно доказать ряд вспомогательных лемм.

Э т а п I. Докажем следующее утверждение:

Л е м м а 2. *Пусть* $Lu \geqslant 0$ *в* D, *и пусть* $u(x,t)$ *имеет положительный локальный максимум* M *в* D. *Предположим, что* D *содержит*

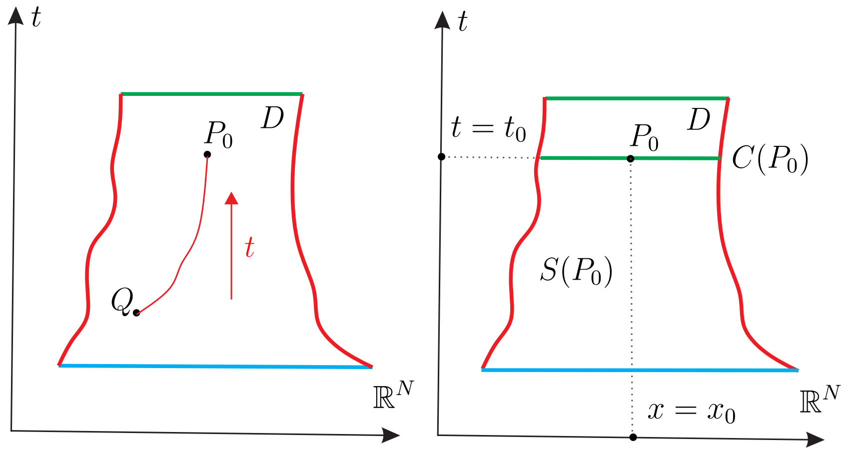

Рис. 8. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$.

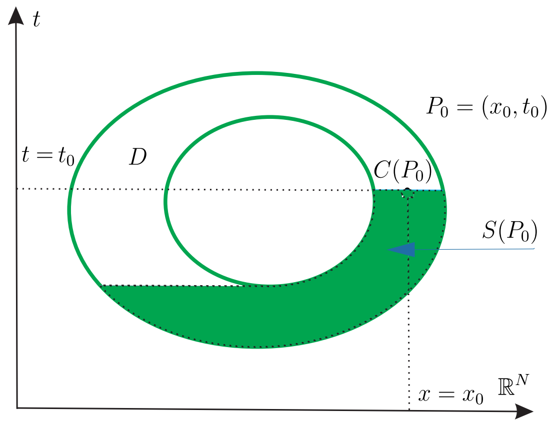

Рис. 9. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$ в случае «гладкой» двусвязной области D.

замкнутый эллипсоид E :

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2 \leqslant R^2, \quad \lambda_i > 0, \quad R > 0, \quad i = \overline{1, N}$$

и что $u(x,t) < M$ *во внутренних точках* $(x,t) \in E$ *и* $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$ *в некоторой точке* $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ *на границе* ∂E *эллипсоида* E. *Тогда* $\overline{x} = x^*$, *где* $x^* = (x_1^*, ..., x_N^*)$.

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ — это единственная точка на ∂E, в которой $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$, так как в

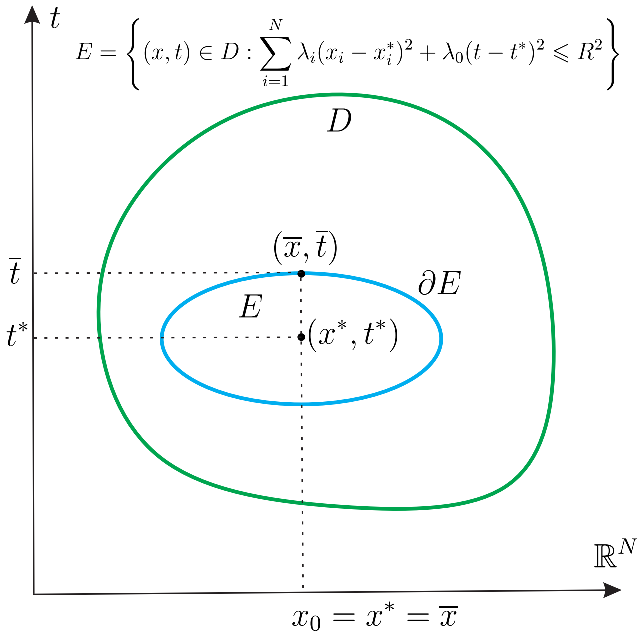

Рис. 10. Эллипсоид E в формулировке леммы 2.

противном случае [1)] мы можем взять меньший замкнутый эллипсоид e, лежащий в E и имеющий единственную общую точку $\overline{P}$ с ∂E (см. рисунок 15).

Шаг 2. Предположим, что $\overline{x} \neq x^*$, и пусть C — замкнутый $(N + 1)$–мерный шар, содержащийся в D с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ и радиусом меньшим, чем $|\overline{x} - x^*|$. Тогда

$$|x - x^*| \geqslant const > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in C. \tag{6.1}$$

Граница шара C состоит из части $\partial C_1 \subset E$, и части ∂C_2, лежащей вне эллипсоида E (см. рисунок 16). Очевидно, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$u(x,t) < M - \delta \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial C_1, \tag{6.2}$$

поскольку по построению эллипсоида $E \subset D$ максимум M функции $u(x,t)$ достигается только в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \partial E$ (см. шаг 1).

Шаг 3. Введем следующую функцию:

$$h(x,t) = \exp\left\{ -\alpha \left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0 \left(t - t^*\right)^2 \right] \right\} -$$

[1)] Заметим, что $u(x,t) < M$ во всех внутренних точках эллипсоида E.

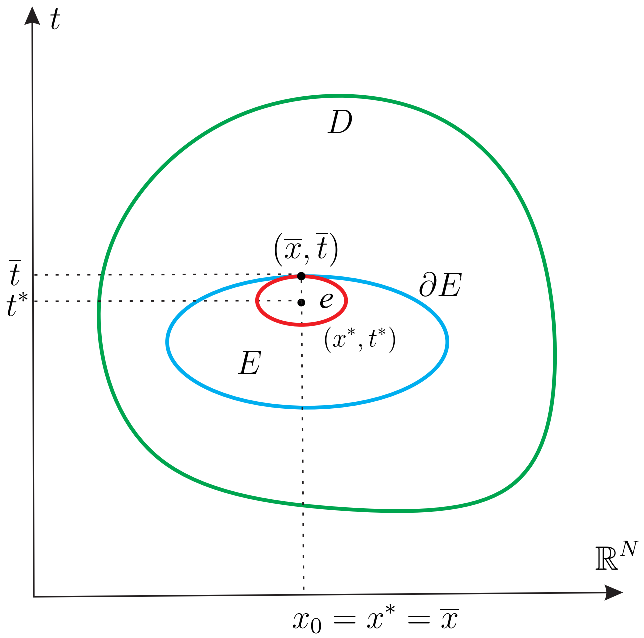

Рис. 11. Вложенный эллипсоид e.

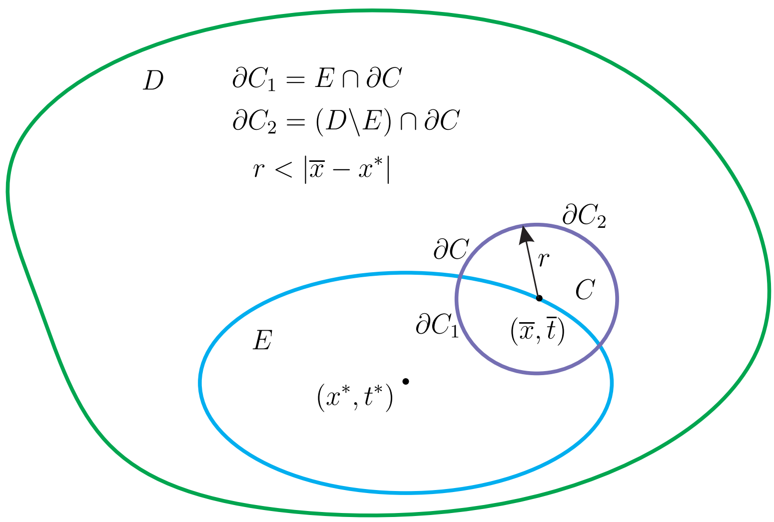

Рис. 12. Шар C.

$$- \exp\left[-\alpha R^2\right], \quad \alpha > 0. \quad (6.3)$$

Заметим, что по построению функция $h = h(x,t) > 0$ внутри E и равна нулю на границе ∂E и меньше нуля при $(x,t) \in D \backslash E$, т. е. вне замкнутого эллипсоида E. Кроме того, заметим, что

$$\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0\left(t - t^*\right)^2\right]\right\} Lh(x,t) =$$
$$= \left\{4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j\left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) - \right.$$
$$\left. - 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{N} a_{ij}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0\left(t - t^*\right)\right] + c(x,t)\right\} -$$
$$- c(x,t)\exp\left[-\alpha R^2\right]\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0\left(t - t^*\right)^2\right]\right\}. \qquad (6.4)$$

Поскольку в шаре C выполнено неравенство (6.1), то первое слагаемое в фигурных скобках в равенстве (6.4) положительно при достаточно большом $\alpha > 0$ будет больше нуля. Последний член больше или равен нуля, так как $c(x,t) \leqslant 0$. Итак,

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad C. \qquad (6.5)$$

Шаг 4. Рассмотрим теперь в шаре C функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon h(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \qquad (6.6)$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое, то $v(x,t) < M$ на ∂C_1 в силу (6.2). На ∂C_2 функция $u(x,t) \leqslant M$ [1]) и $h(x,t) < 0$, поэтому $v(x,t) < M$. Таким образом,

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad \partial C \qquad (6.7)$$

при малом $\varepsilon > 0$. Кроме того,

$$h(\overline{P}) = 0 \Rightarrow v(\overline{P}) = u(\overline{P}) = M. \qquad (6.8)$$

Отсюда заключаем, что $v(x,t) < M$ на границе шара C и принимает максимальное положительное значение M в центре шара $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$. При этом выполнено неравенство (6.5). Следовательно, мы пришли в противоречие со слабым принципом максимума (см. лемму 1). Значит, имеет место равенство $\overline{x} = x^*$.

Лемма доказана.

Этап II. Теперь мы докажем следующую лемму:

---

[1]) Это справедливо, поскольку, с одной стороны, $M > 0$ — это локальный максимум в области D, а с другой стороны, радиус $r > 0$ шара C может быть выбран малым.

Лемма 3. *Если* $Lu \geqslant 0$ *в области* D *и если* $u(x,t)$ *имеет положительный максимум в* D*, который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D$*, то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in C(P_0)$*.*

Доказательство.

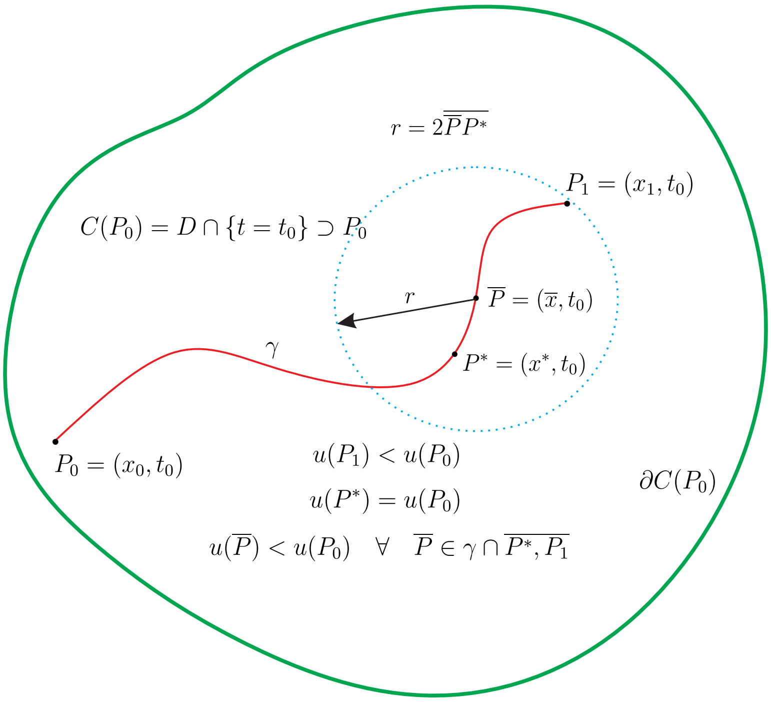

Рис. 13. Кривая $\gamma \in C(P_0)$.

Шаг 1. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда в $C(P_0)$ найдется точка $P_1 = (x_1, t_0)$, в которой $u(P_1) < u(P_0)$. Соединим P_1 с P_0 простой непрерывной кривой $\gamma \subset C(P_0)$. На γ существует точка $P^* = (x^*, t_0)$, в которой $u(P^*) = u(P_0)$, и такая, что $u(\overline{P}) < u(P_0)$ для всех $\overline{P} = (\overline{x}, t)$, лежащих на γ между P_1 и P^*.

Возьмем точку $\overline{P}$ на γ между P_1 и P^* так [1], чтобы расстояние $d(\overline{P}, \partial C(P_0))$ до границы $\partial C(P_0)$ удовлетворяло неравенству

$$d(\overline{P}, \partial C(P_0)) \geqslant 2\overline{\overline{P}P^*}. \tag{6.9}$$

Шаг 2. Поскольку $u(\overline{P}) < u(P^*)$, существует достаточно малый замкнутый интервал σ_0, определяемый соотношениями

$$\sigma_0 \stackrel{def:}{=} \{x = \overline{x}, \quad t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon\}, \tag{6.10}$$

[1] Просто нужно взять точку $\overline{P}$ достаточно близкой к точке P^*.

для всех точек $P \in \sigma_0$ которого

$$u(P) < u(P^*). \tag{6.11}$$

Рассмотрим семейство эллипсоидов E_λ:

$$|x - \overline{x}|^2 + \lambda(t - t_0)^2 \leqslant \lambda\varepsilon^2. \tag{6.12}$$

Прежде всего заметим, что концы интервала σ_0 будут лежать на границе эллипсоида E_λ.

☐ Действительно, положим $x = \overline{x}$ в уравнении эллипсоида E_λ и получим неравенство

$$|t - t_0| \leqslant \varepsilon \Rightarrow (x = \overline{x}, t) \in \sigma_0. \quad \boxtimes$$

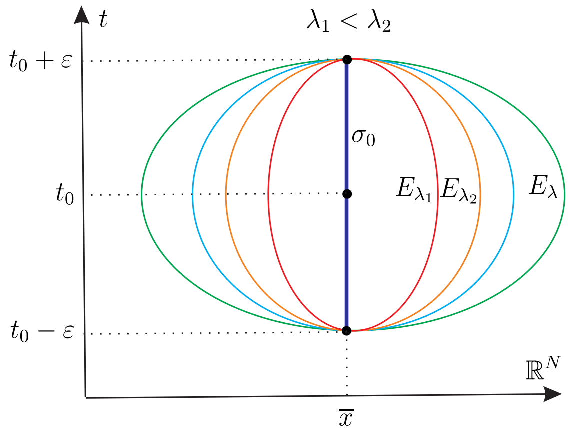

Рис. 14. Семейство E_λ и интервал σ_0.

Кроме того, нетрудно убедиться в том, что справедливо предельное свойство (см. рисунок 18)

$$E_\lambda \to \sigma_0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +0. \tag{6.13}$$

С другой стороны, при $t = t_0$ имеем

$$E_\lambda \cap \{t = t_0\} = \left\{(x, t_0) : \, x \in \mathbb{R}^N, \quad |x - \overline{x}| \leqslant \lambda\varepsilon^2\right\}.$$

Поэтому при возрастании $\lambda > 0$ пересечение $E_\lambda \cap \{t = t_0\}$ неограниченно возрастает.

Следовательно, в силу неравенства (6.11) существует такое минимальное $\lambda = \lambda_0 > 0$, что $u < u(P^*)$ внутри E_{λ_0} и $u = u(P^*)$ в некоторой точке $Q = (y, t_0) \in \partial E_{\lambda_0}$.

В силу (6.11) точка Q не может принадлежать интервалу σ_0 и поэтому $y \neq \overline{x}$, но это противоречит результату леммы 2

Лемма доказана.

Этап III. Докажем теперь следующее утверждение:

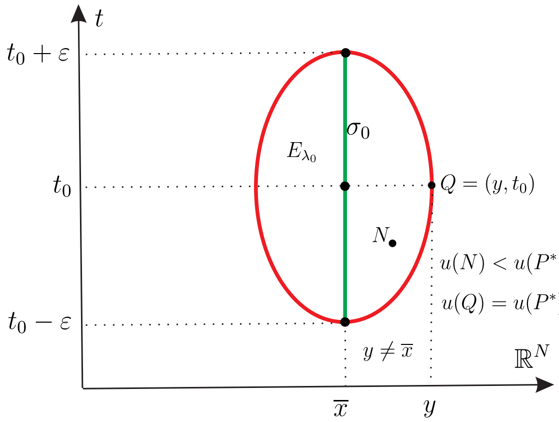

Рис. 15. Минимальный эллипсоид E_{λ_0}.

Лемма 4. *Пусть R — параллелепипед*

$$x_{0i}-a_i\leqslant x_i\leqslant x_{0i}+a_i,\quad t_0-a_0\leqslant t\leqslant t_0,\quad i=1,2,...,N, \tag{6.14}$$

содержащийся в D, [1] *и пусть $Lu\geqslant 0$ в D. Если $u(x,t)$ имеет положительный максимум в R, который достигается в точке $P_0=(x_0,t_0)\in D$, где $x_0=(x_{10},...,x_{N0})$, тогда $u(P)=u(P_0)$ для всех $P\in R$.*

Доказательство.

Шаг 1. Предположим, что лемма неверна. Тогда в параллелепипеде R должна найтись точка $Q\in R$, такая, что $u(Q)<u(P_0)$. Поскольку $u(x,t)<u(P_0)$ также и в некоторой окрестности Q, можно предполагать, что точка Q не лежит на гиперплоскости $t=t_0$.

На отрезке γ, соединяющем Q с P_0 существует точка P_1, такая, что $u(P_1)=u(P_0)$ и

$$u(\overline{P})<u(P_1)\quad \text{для всех}\quad \overline{P}\in\gamma_{Q,P_1}$$

Можно считать, что $P_1=P_0$ и точка Q лежит на гиперплоскости $t=t_0-a_0$, поскольку в противном случае можно взять меньший параллелепипед.

Шаг 2. Пусть R_0 обозначается параллелепипед R без верхней грани $t=t_0$. Для каждой точки $Q^{'}\in R_0$ компонента $C(Q^{'})$ содержит некоторую точку из γ, но $u<u(P_0)$ в точках γ. Поэтому если в некоторой точке $Q^{'}$ будет выполнено равенство $u(Q^{'})=u(P_0)$, то в силу предыдущей леммы мы бы имели, что $u(Q^{'})=u(P_0)$ для всех $Q^{'}\in C(Q^{'})$.

[1] Для этого достаточно взять числа $a_i>0$ и $a_0>0$ достаточно малыми, поскольку точка P_0 внутренняя в D.

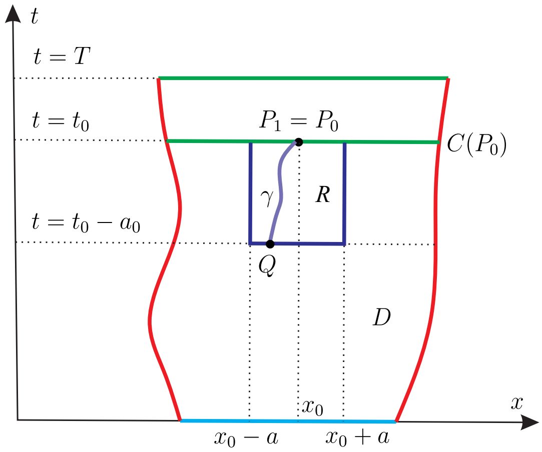

Рис. 16. Кривая γ и точка Q.

Следовательно, в каждой точке $Q^{'} \in R_0$ выполнено следующее неравенство:

$$u(Q^{'}) < u(P_0) \quad \text{для всех} \quad Q^{'} \in R_0. \tag{6.15}$$

Шаг 3. Введем функцию

$$h(x,t) = t_0 - t - K|x - x_0|^2, \quad K > 0. \tag{6.16}$$

На параболоиде

$$M: \quad t_0 - t = K|x - x_0|^2$$

имеем $h(x,t) = 0$; выше параболоида M функция $h(x,t) < 0$, а ниже параболоида M имеем $h(x,t) > 0$. Кроме того, непосредственным вы-

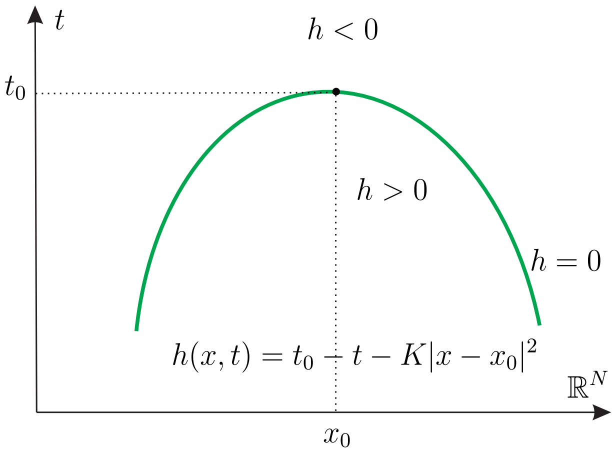

Рис. 17. Параболоид $h(x,t) = 0$.

числением получим, что

$$Lh(x,t) = -2K\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) - 2K\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i - x_{0i}) + \\ + c(x,t)\left[t_0 - t - K|x-x_0|^2\right] + 1 > 0 \quad \text{в} \quad R, \qquad (6.17)$$

если потребовать, чтобы $K > 0$ было мало настолько, что

$$4K\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leqslant 1 \quad \text{в} \quad R$$

и размеры параллелепипеда R достаточно малы.

Шаг 4. Параболоид M разбивает параллелепипед R на две части. Обозначим часть, лежащую ниже параболоида M $(h > 0)$ через R'. Верхняя граница B' множества R' касается гиперплоскости $t = t_0$ только в точке $P_0 = (x_0, t_0)$. Поэтому на остальной части B'' границы

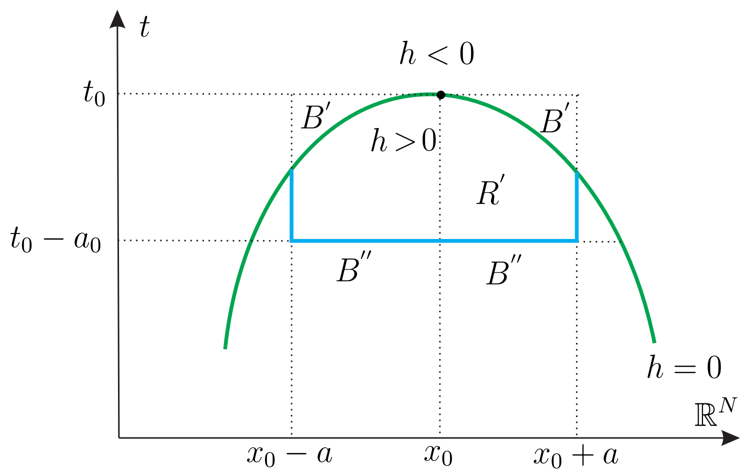

Рис. 18. Множество R'.

R' получим

$$u(x,t) \leqslant u(P_0) - \delta \quad \text{для некоторого} \quad \delta > 0.$$

Отсюда следует, что для функции

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t) \qquad (6.18)$$

имеем

$$v(x,t) < u(P_0) \quad \text{при} \quad (x,t) \in B'' \qquad (6.19)$$

для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Далее во всех точках верхней границы $B^{'}$ за исключением точки P_0, имеем

$$v(x,t) = u(x,t) < u(P_0), \quad v(P_0) = u(P_0). \tag{6.20}$$

Поскольку

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in R^{'},$$

то в силу леммы 1 заключаем, что положительный максимум функции $v(x,t)$ достигается в точке P_0. Следовательно [1],

$$\frac{\partial v(P_0)}{\partial t} \geqslant 0, \quad \frac{\partial h(P_0)}{\partial t} = -1 < 0 \Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} > 0. \tag{6.21}$$

З а м е ч а н и е 6. Докажем неравенство

$$\frac{\partial v(P_0)}{\partial t} \geqslant 0.$$

Действительно, поскольку функция $v(x,t)$ дифференцируема в окрестности точки P_0 и в этой точке у функции $v(x,t)$ строгий максимум, то при $t < t_0$ выполнено неравенство

$$\frac{v(x_0,t_0) - v(x_0,t)}{t_0 - t} > 0 \Rightarrow \frac{\partial v(P_0)}{\partial t} \geqslant 0.$$

С другой стороны, из предположения, что $u(x,t)$ достигает положительного максимума в точке P_0 находим, что

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_i} = 0, \quad c(P_0)u(P_0) \leqslant 0, \quad \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0)\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant Lu(P_0) \leqslant -\frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \leqslant 0,$$

что противоречит неравенству (6.21).

Л е м м а д о к а з а н а.

Э т а п IV. Теперь мы можем доказать утверждение теоремы 4.

Шаг 1. Предположим, что

$$u(x,t) \not\equiv u(P_0) \quad \text{в} \quad S(P_0).$$

Тогда найдется такая точка $Q \in S(P_0)$, что $u(Q) < u(P_0)$. Соединим точки Q и P_0 простой непрерывной кривой γ, расположенной в $S(P_0)$ так, чтобы t–координата не убывает от точки Q к точке P_0 (такая кри-

[1] Неравенство $\partial v(P_0)/\partial t \geqslant 0$ выполнено, поскольку производная берется по времени в сторону возрастания времени, а в точке P_0 у функции $v(x,t)$ максимум.

вая существует согласно определению $S(P_0)$). На кривой γ существует точка P_1, в которой $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех точек} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1},$$

где мы обозначили через γ_{Q,P_1} часть кривой γ между Q и P_1.

Шаг 2. Теперь построим параллелепипед

$$x_{1i} - a \leqslant x_i \leqslant x_{1i} + a, \quad t_1 - a < t \leqslant t_1, \quad i = \overline{1, N},$$

где $P_1 = (x_{11}, ..., x_{1N}, t_1)$ и постоянная $a > 0$ настолько мала, что параллелепипед лежит в D. Из леммы 4 вытекает, что $u \equiv u(P_1)$ в этом параллелепипеде, а поэтому и на части кривой γ_{Q,P_1}, попадающей в параллелепипед. Пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Замечание 7. Заметим, что если в операторе L коэффициент $c(x,t) = 0$, то слова положительный максимум и отрицательный минимум можно заменить на максимум и минимум соответственно.

Задача 1. Изобразить множества $C(P_1)$, $C(P_2)$ и $C(P_3)$ (см. рисунок 25).

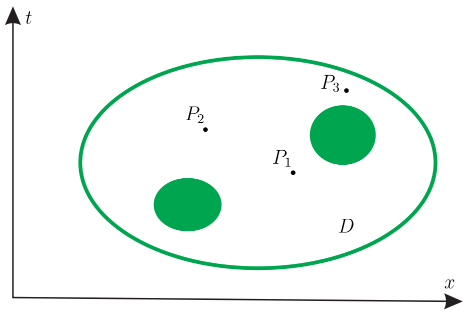

Рис. 19. К задаче 1.

Решение. На рисунке 26 изображено множество $C(P_1)$.

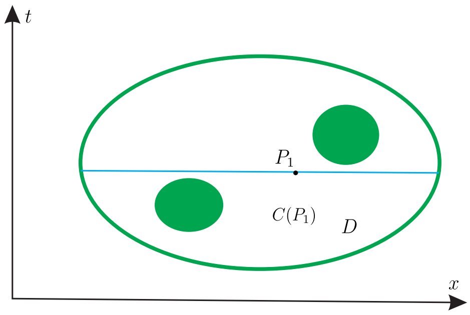

Рис. 20. Множество $C(P_1)$.

На рисунке 27 изображено множество $C(P_2)$.

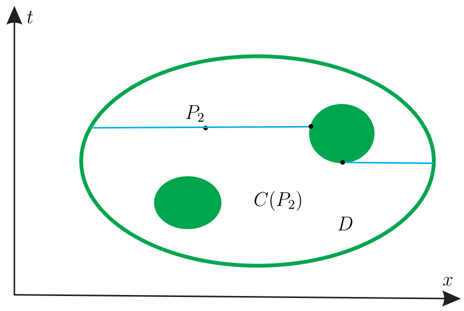

Рис. 21. Множество $C(P_2)$.

На рисунке 28 изображено множество $C(P_3)$.

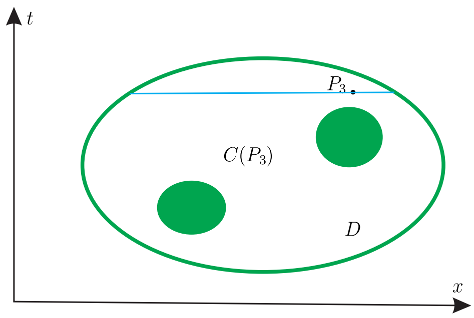

Рис. 22. Множество $C(P_3)$.

§ 7. Первая краевая задача

Напомним снова ряд обозначений, используемых в дальнейшем. Пусть D — ограниченная $(N+1)$–мерная область в $\mathbb{R}^{N+1}$, и пусть $(x,t)=(x_1,...,x_N,t)$ — переменная точка в $\mathbb{R}^{N+1}$. Предположим, что граница ∂D области D состоит из замыкания области B, лежащей на гиперплоскости $t=0$, области B_T, лежащей на гиперплоскости $t=T>$ >0, и многообразия S (не обязательно связного), лежащего в полосе $0<t\leqslant T$.

Определение 1. *Множество $\partial' D \equiv S \cup \overline{B}$ называется нормальной границей области D.*

Введем обозначения

$$D_\tau = D\cap\{0<t<\tau\}, \quad B_\tau = D\cap\{t=\tau\}, \quad S_\tau = S\cap\{0<t\leqslant\tau\}.$$

Допустим, что для каждого τ, $0<\tau<T$, B_τ — область (связное открытое множество). В частности, на рисунке 23 область D не удо-

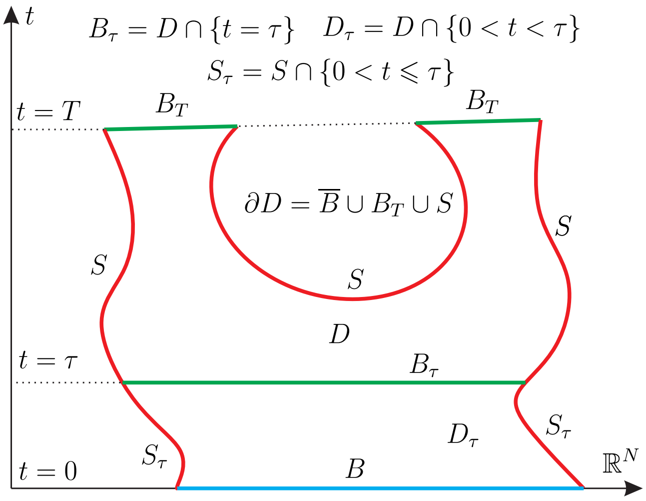

Рис. 23. Область D и ее подмножества.

влетворяет этому условию, поскольку для некоторого τ_0 множество B_{τ_0} — не связно. А область, изображенная на рисунке 9, удовлетворяет этому условию.

Напомним постановку первой краевой задачи.

Определение 2. *Первая краевая задача состоит в нахождении решения уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{в} \quad D \cup B_T, \tag{7.1}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \textit{на} \quad \overline{B} \tag{7.2}$$

и граничным условиям

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{на} \quad S, \tag{7.3}$$

где f, φ, g — это заданные функции и L — параболический оператор.

Замечание 8. Условия (7.2) и (7.3) можно объединить в одно

$$u(x,t) = h(x,t) \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S. \tag{7.4}$$

Функцию $h(x,t)$ мы будем считать непрерывной на множестве $\overline{B} \cup S$, а решение $u(x,t)$ — непрерывной на $\overline{D}$, имеющей в $D \cup B_T$ непрерывные производные по x до второго порядка включительно, по t — первого порядка.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (A) *и* (B). *Тогда может существовать не более одного решения первой краевой задачи.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть сначала $c(x,t) \leqslant 0$ и $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ — это два решения первой краевой задачи (7.1)—(7.3). Тогда для функции

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

мы получим соответствующую однородную задачу. Следовательно, одновременно

$$Lv(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D \quad \text{и} \quad v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D, \tag{7.5}$$

$$Lv(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \quad \text{и} \quad v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D. \tag{7.6}$$

Следовательно, в силу теоремы 2 из (7.5) имеем $v(x,t) \leqslant 0$ в D, а из (7.6) в силу той же теоремы мы получим, что $v(x,t) \geqslant 0$ в D. Значит, $v(x,t) = 0$ в D.

Шаг 2. Пусть теперь функция $c(x,t)$ может быть положительной в области D. Положим по определению

$$c_0 \stackrel{def:}{=} \sup_{(x,t)\in D} c(x,t) > 0.$$

Тогда перейдем к новой функции $w(x,t)$ следующего вида:

$$w(x,t) = e^{-c_0 t} u(x,t).$$

При этом уравнение $Lu(x,t) = 0$ перейдет в уравнение $(L - c_0)w(x,t) = 0$, в котором уже новый коэффициент $c(x,t) - c_0 \leqslant 0$. Далее рассуждаем как на шаге 1.

Теорема доказана.

Пример неединственности. [?] Заметим, что требование ограниченности коэффициентов параболического оператора L является существенным для применения принципа максимума с целью доказательства единственности решения первой краевой задачи. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{1}{t}u_{xx} + \frac{2}{t}u - u_t = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in (0,\pi), \tag{7.7}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{7.8}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{7.9}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$u(x,t) = at\sin x \quad \text{для любой постоянной} \quad a \in \mathbb{R}^1$$

является решением однородной первой краевой задачи (7.7)–(7.9).

Нелинейный параболический оператор. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$Lu(x,t) \stackrel{def:}{=} F\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{7.10}$$

где $F = F(x, t, p, p_i, p_{ij})$ — это нелинейная функция своих аргументов.

Определение 3. *Нелинейный оператор L, определенный формулой* (7.4), *называется параболическим в точке $(x_0, t_0) \in D$, если для любых $p, p_1, ..., p_N, p_{11}, ..., p_{NN}$ матрица*

$$\left(\frac{\partial F(x_0, t_0, p, p_i, p_{ij})}{\partial p_{hk}}\right) \tag{7.11}$$

является положительно определенной.

Заметим, что если функция $F = F(x, t, p, p_i, p_{ij})$ является непрерывно дифференцируемой по переменным (p, p_i, p_{ij}), то справедлива формула Адамара среднего значения следующего вида:

$$F(x, t, u, u_i, u_{ij}) - F(x, t, v, v_i, v_{ij}) = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(u_{ij} - v_{ij}) + \sum_{i=1}^{N} b_i(u_i - v_i) + c(u - v), \tag{7.12}$$

где

$$(a_{ij}, b_i, c) = \\ = \int_0^1 \left(F_{p_{ij}}, F_{p_i}, F_p\right)(x, t, su + (1-s)v, su_i + (1-s)v_i, su_{ij} + (1-s)v_{ij})\, ds. \tag{7.13}$$

Воспользовавшись формулой (7.12) мы можем распространить результат теоремы 5 на нелинейный случай.

Следствия из принципа максимума. Справедливы следующие утверждения:

Следствие 1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, справедливы свойства* (A), (B) *и* (C) *и выполнено равенство $Lu(x,t) = 0$ при $(x,t) \in D$, тогда справедлива следующая оценка*:

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |u(x,t)| \tag{7.14}$$

Доказательство.

Шаг 1. Введем следующее обозначение:

$$M = \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |u(x,t)|. \tag{7.15}$$

Тогда для новой функции

$$v(x,t) = u(x,t) - M$$

имеем

$$Lv(x,t) = -c(x,t)M \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \quad v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Таким образом, в силу теоремы 2 получим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup \partial' D \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Шаг 2. Поскольку функция $-u(x,t)$ является решением уравнения $L(-u) = 0$, то применяя результат шага 1 для функции $-u(x,t)$ мы получим оценку

$$-u(x,t) \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup \partial' D.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* $c(x,t) \leqslant c_0$ *при* $c_0 > 0$. *Если* $Lu(x,t) = 0$ *в* D, *то*

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant e^{c_0 T} \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |u(x,t)|. \tag{7.16}$$

Доказательство.

Достаточно применить результат следствия 1 к функции

$$v(x,t) = u(x,t)e^{-c_0 t} \Rightarrow (L - c_0)v(x,t) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \max_{(x,t)\in\overline{D}} |v(x,t)| \leqslant \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |v(x,t)| \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-c_0 T} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |u(x,t)|$$

и получить неравенство.

Следствие доказано.

§ 8. Некоторые обобщения принципа максимума

Справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 6. *Пусть выполнены условия сильного принципа максимума 4, но без требования* $c(x,t) \leqslant 0$. *Если* $u(x,t) \leqslant 0$ $(u(x,t) \geqslant 0)$ *в области* D *и* $u(P_0) = 0$ *в точке* $P_0 \in D$ *и если* $Lu(x,t) \leqslant 0$ $(Lu(x,t) \leqslant 0)$ *в* D, *то* $u(x,t) \equiv 0$ *в* $C(P_0)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $u(x,t) \leqslant 0$ и $Lu(x,t) \geqslant 0$ в D.

Шаг 1. Функция

$$v(x,t) = u(x,t)\exp\left[-\alpha x_1\right] \quad \text{при} \quad \alpha > 0$$

удовлетворяет следующему неравенству:

$$\widetilde{L}v(x,t) \stackrel{def:}{=} (L - c(x,t)I)v(x,t) + 2\alpha \sum_{i=1}^{N} a_{1i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} \geqslant \\ \geqslant -\Big(a_{11}(x,t)\alpha^2 + b_1(x,t)\alpha + c(x,t)\Big)\, v(x,t). \tag{8.1}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} = e^{-\alpha x_1}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} - \alpha b_1(x,t)v(x,t),$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = e^{-\alpha x_1}\sum_{i,j=2,2}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + a_{11}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_1^2} + 2\sum_{i=2}^{N} a_{1i}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_1 \partial x_i},$$

$$a_{11}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_1^2} = -\alpha^2 a_{11}(x,t)v(x,t) + \\ + e^{-\alpha x_1}a_{11}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2} - 2\alpha a_{11}(x,t)e^{-\alpha x_1}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1},$$

$$2\sum_{i=2}^{N} a_{1i}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_1 \partial x_i} = 2e^{-\alpha x_1}\sum_{i=2}^{N} a_{1i}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1 \partial x_i} - \\ - 2\alpha\sum_{i=2}^{N} a_{1i}(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i},$$

$$2\alpha\sum_{i=1}^{N} a_{1i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} = 2\alpha\sum_{i=2}^{N} a_{1i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + 2\alpha a_{11}(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_1} = \\ = 2\alpha\sum_{i=2}^{N} a_{1i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + 2\alpha a_{11}(x,t)e^{-\alpha x_1}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1} - 2\alpha a_{11}(x,t)v(x,t).$$

Заметим, что

$$-2\alpha a_{11}(x,t)v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Собирая вместе полученные равенства, получим (8.1). ⊠

Шаг 2. В силу равномерной параболичности оператора L найдется такое $\vartheta > 0$, что

$$a_{11}(x,t) \geqslant \vartheta > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Поэтому при достаточно большом $\alpha > 0$ получим неравенство

$$a_{11}(x,t)\alpha^2 + b_1(x,t)\alpha + c(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{8.2}$$

Пусть $N \subset D$ — это произвольная окрестность точки P_0. Тогда

$$v(x,t) = u(x,t)\exp\left[-\alpha x_1\right] \leqslant 0 \quad \text{в} \quad N, \tag{8.3}$$

то из (8.2), (8.3) и (8.1) получим неравенство

$$\widetilde{L}v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad N. \tag{8.4}$$

Причем в операторе $\widetilde{L}$ отсутствует свободное слагаемое вида $\widetilde{c}(x,t)I$. Поэтому мы можем применить теорему 4 к функции

$$v(x,t)+1, \quad \widetilde{L}[v(x,t)+1] = \widetilde{L}v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad N$$

и заключить, что эта функция достигает положительного максимума в точке $P_0 \in D$.

Шаг 3. Следовательно,

$$v(x,t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad N \cap C(P_0) \Rightarrow u(x,t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad N \cap C(P_0). \tag{8.5}$$

Введем следующее множество:

$$\mathfrak{N} \equiv \{x \in C(P_0): \ u(x,t) = 0\}. \tag{8.6}$$

В силу свойства (8.5) и произвольности окрестности $N \subset D$ точки $P_0 \in \in D$ множество $\mathfrak{N}$ открыто в $C(P_0)$. С другой стороны, в силу того, что $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ это множество замкнуто в $C(P_0)$. Поскольку множество $C(P_0)$ связно, то $\mathfrak{N} = C(P_0)$.

Теорема доказана.

Непосредственным следствием этой теоремы является следующая:

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* (A) *и* (B). *Если* $u(x,t) \leqslant 0$ *и* $Lu(x,t) \geqslant 0$ *в* $S(P_0)$ *или* $u(x,t) \geqslant 0$ *и* $Lu(x,t) \leqslant 0$ *в* $S(P_0)$ *и* $u(P_0) = = 0$, *то*

$$u(x,t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad S(P_0). \tag{8.7}$$

§ 9. Положительные решения задачи Коши

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения:

$$\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \quad \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

При этом функции $u(x,t)$ мы будем считать непрерывными в Ω.

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 5. *Пусть оператор* L *удовлетворяет предположениям* (A) *и* (B) *в* Ω_0, *и пусть* $c(x,t)$ *ограничено сверху. Если* $Lu(x,t) \leqslant 0$ *в* Ω_0, $u(x,0) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^N$ *и равномерно по* $t \in [0,T]$ *существует*

$$\liminf_{|x|\to+\infty} u(x,t) \geqslant 0,$$

то $u(x,t) \geqslant 0$ *в* Ω.

Доказательство.

Шаг 1. Можно считать, что $c(x,t) \leqslant 0$, в противном случае мы бы сделали преобразование $v = ue^{-\gamma t}$ при $\gamma \geqslant c(x,t)$. Далее для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$u(x,t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

а также
$$u(x,t)+\varepsilon>0 \quad \text{при} \quad |x|=R, \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$
причем
$$L(u(x,t)+\varepsilon)=c(x,t)\varepsilon\leqslant 0\Rightarrow u(x,t)+\varepsilon>0,$$
если $|x|\leqslant R$ и $t\in[0,T]$ в силу принципа максимума (см. теорему 2).

Шаг 2. Устремляя $\varepsilon\to+0$ мы получим утверждение этой леммы.

Лемма доказана.

Сделаем следующие предположения относительно коэффициентов параболического оператора L:
$$|a_{ij}(x,t)|\leqslant M, \quad |b_i(x,t)|\leqslant M(1+|x|), \quad |c(x,t)|\leqslant M(1+|x|^2) \tag{9.1}$$
при $(x,t)\in\Omega_0$ и $i,j=\overline{1,N}$. Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 8. *Пусть L — параболический оператор с коэффициентами, непрерывными в Ω_0 и удовлетворяющими условиям (9.1). Предположим, что $Lu(x,t)\leqslant 0$ в Ω_0 и*
$$u(x,t)\geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t)\in\Omega \tag{9.2}$$
для некоторых положительных постоянных[1] *B и β. Если $u(x,0)\geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$, то $u(x,t)\geqslant 0$ в Ω.*

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим функцию
$$H(x,t)=\exp\left[\frac{k|x|^2}{1-\mu t}+\nu t\right], \quad t\in[0,1/(2\mu)], \tag{9.3}$$
удовлетворяющую равенству
$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)}=\frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}a_{ij}(x,t)x_ix_j+\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N}a_{ii}(x,t)+ \\ +\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N}b_i(x,t)x_i+c(x,t)-\frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2}-\nu. \tag{9.4}$$
С помощью оценок (9.1) получаем следующую оценку:
$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)}\leqslant\left(16k^2N^2M^2+8kNM+M-\mu k\right)|x|^2+(8kNM+M-\nu). \tag{9.5}$$
Таким образом, для любого $k>0$ найдутся такие достаточно большие постоянные $\mu>0$ и $\nu>0$, что будет выполнено неравенство
$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)}\leqslant 0. \tag{9.6}$$

[1] Здесь мы снова сталкиваемся с необходимостью рассматривать решения в классе растущих функций А. Н. Тихонова.

Шаг 2. Рассмотрим теперь функцию $v(x,t)$, определенную равенством
$$u(x,t) = H(x,t)v(x,t),$$
где $H(x,t)$ — это функция (9.3) с фиксированными $k > \beta$ и с $\mu > 0$ и $\nu > 0$, при которых выполняется неравенство (9.6) для $0 \leqslant t \leqslant 1/(2\mu)$. Заметим, что выполнены следующие неравенства:
$$v(x,t) \geqslant -B\frac{\exp\left\{\beta|x|^2\right\}}{H(x,t)} \geqslant -B\exp\left[-(k-\beta)|x|^2\right]e^{-\nu t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \liminf_{|x|\to+\infty} v(x,t) \geqslant 0$$
равномерно по $t \in [0, 1/(2\mu)]$.

Шаг 3. Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению
$$\overline{L}v(x,t) \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \overline{b}_i\frac{\partial v}{\partial x_i} + \overline{c}v - \frac{\partial v}{\partial t} = \overline{f},$$
где
$$\overline{f} = \frac{Lu(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0, \quad \overline{b}_i = b_i + 2\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \overline{c} = \frac{LH}{H} \leqslant 0.$$
При помощи леммы 5 мы приходим к выводу о том, что
$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0, 1/(2\mu)].$$

Шаг 4. Далее повторяем рассуждения из шагов 1–3 но для области $\mathbb{R}^N \otimes [1/(2\mu), 1/\mu]$ с функцией
$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{2-\mu t} + \nu t\right].$$
Далее по индукции.

Теорема доказана.

Замечание 9. Отметим, что доказанная теорема иногда носит название *теорема Фрагмена–Линделёфа.*

Задача 2. Пусть L — параболический в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T)$ оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими (9.1). Предположим, кроме того, $c(x,t) \geqslant 0$ и
$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$
при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$, и
$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0.$$
Доказать, что из условия
$$u(x,0) \geqslant M > 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - M.$$

Поскольку $c(x,t) \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) - Mc(x,t) \leqslant 0.$$

Кроме того,

$$v(x,t) \geqslant -M - B\exp\left[\beta|x|^2\right] \geqslant -(M+B)\exp\left[\beta|x|^2\right], \quad v(x,0) \geqslant 0.$$

Следовательно, из теоремы 8, примененный к функции $v(x,t)$ мы получим, что

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Задача 3. [?] Пусть L — это параболический оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими условиям (9.1). Пусть, кроме того,

$$c(x,t) \geqslant \alpha|x|^2 + \gamma, \quad \alpha > 0, \tag{9.7}$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию роста

$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$. Предположим, что

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,0) \geqslant M_1 > 0.$$

Доказать, что выполнено неравенство

$$u(x,t) \geqslant M_1\exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right], \quad \lambda > 0.$$

Решение. Рассмотрим [1] следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - M_1\exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right].$$

Справедливы следующие вычисления:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = 2\lambda x_i t\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = \left(\lambda|x|^2 + \nu\right)\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = \left(2\lambda t\delta_{ij} + 4\lambda^2 t^2 x_i x_j\right)\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right).$$

Поэтому имеем

[1] Переводчиками в этом месте в книге [?] допущена опечатка в выборе вспомогательной функции.

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) - M_1 L \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) \leqslant$$
$$\leqslant -M_1\Biggl(4\lambda^2 t^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} + 2\lambda t \sum_{i=1}^{N} a_{ii} +$$
$$+ 2\lambda t \sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c - (\lambda|x|^2 + \nu)\Biggr) \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right).$$

Заметим, что в силу равномерной параболичности оператора L вытекают неравенства

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} \geqslant \vartheta|x|^2, \quad a_{ii} \geqslant \vartheta.$$

Кроме того, в силу условий (9.1) и (9.7) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$Lv(x,t) \leqslant -M_1\Biggl(4\lambda^2 t^2 \vartheta|x|^2 + 2\lambda t N\vartheta -$$
$$- 2\lambda t M|x|(1+|x|) + (\alpha - \lambda)|x|^2 + \gamma - \nu\Biggr) \leqslant 0.$$

при достаточно большом $\alpha > \lambda$ и при $\gamma > \nu$. Теперь заметим, что

$$v(x,t) \geqslant -B\exp\left(\beta|x|^2\right) - M_1 \exp\left(\lambda|x|^2 T + \nu T\right) \geqslant$$
$$\geqslant -B_1(T)\exp\left(\beta_1(T)|x|^2\right)$$

при некоторых $B_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Кроме того,

$$v(x,0) \geqslant 0.$$

В силу теоремы 8 мы приходим к утверждению задачи.

З а д а ч а 4. [?] Пусть L — это параболический в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ оператор с непрерывными коэффициентами и для некоторой постоянной $M > 0$ выполнены неравенства

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(|x|^2+1), \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(|x|+1), \quad c(x,t) \leqslant M. \tag{9.8}$$

Доказать, что если

$$u(x,t) \geqslant -m(|x|^q + 1) \quad \text{при} \quad \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T] \tag{9.9}$$

для некоторых положительных постоянных A и q, то из условия

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{9.10}$$

вытекает неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]. \tag{9.11}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [?].) Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \frac{2m}{r_0^{2p-q}}(|x|^2+Kt)^p e^{\alpha t}, \quad 2p > q. \tag{9.12}$$

Выберем постоянные $K > 0$ и $\alpha > 0$ таким образом, чтобы для всех $r_0 > 0$ величина $Lw(x,t)$ была отрицательной. Действительно,

$$a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{4mp}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[\frac{2x_i x_j}{|x|^2+Kt}+\delta_{ij}\right] a_{ij}(x,t),$$

$$b_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{4mp}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} x_i b_i(x,t),$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[pK+\alpha\left(|x|^2+Kt\right)\right].$$

Следовательно,

$$Lw(x,t) = \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\Bigg[4p\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\frac{x_i x_j}{|x|^2+Kt}+2p\sum_{i=1}^{N} a_{ii}+$$

$$+2p\sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c\left(|x|^2+Kt\right) - pK - \alpha\left(|x|^2+Kt\right)\Bigg].$$

Рассмотрим два случая — $|x| \geqslant 1$ и $|x| < 1$. В первом случае с учетом неравенств (9.8) получим следующую оценку:

$$Lw(x,t) \leqslant \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\times$$

$$\times\left[\left(4pN^2+2p(N+1)+1\right)M-\alpha\right]|x|^2-$$

$$-pK+K(M-\alpha)t < 0, \tag{9.13}$$

если

$$\alpha > M\left(4pN^2+2p(N+1)+1\right). \tag{9.14}$$

Во втором случае заметим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant 2M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant 2M, \quad c(x,t) \leqslant M. \tag{9.15}$$

Поэтому при $|x| < 1$ справедлива оценка

$$Lw(x,t) = \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\times$$

$$\times\left[16pM+M-pK+(M-\alpha)Kt\right] < 0 \tag{9.16}$$

при выполнении условия (9.14) на $\alpha > 0$ и условия на $K > 0$

$$16pM + M < pK. \tag{9.17}$$

Таким образом, имеем при выполнении неравенств (9.14) и (9.17)

$$L(w(x,t) + u(x,t)) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \tag{9.18}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t) + u(x,t) \tag{9.19}$$

в цилиндре $D_{r_0,T} = \{|x| \leqslant r_0\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant T\}$. При $t = 0$ имеем

$$v(x,0) = u_0(x) + 2mr_0^q \geqslant 0, \tag{9.20}$$

а при $r = r_0$ имеем

$$v(x,t) \geqslant \frac{2m}{r_0^{2p-q}} \left(r_0^q + Kt\right)^p e^{\alpha t} - m\left(r_0^q + 1\right) \geqslant \\ \geqslant 2mr_0^q - m(r_0^q + 1) = m(r_0^q - 1) > 0 \tag{9.21}$$

при $r_0 > 1$. Согласно принципу максимума имеем

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) + w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_{r_0,T}. \tag{9.22}$$

Осталось при фиксированном $(x,t) \in D_{r_0,T}$ перейти к пределу при $r_0 \to \to +\infty$ и из явного вида (9.12) функции $w(x,t)$ получить следующее неравенство:

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

Контрпример к задаче 4. Условия (9.8), налагаемые на коэффициенты оператора L, нельзя ослабить, если ограничиться оценками коэффициентов через степени $|x|$. Действительно, при любом $\delta > 0$ функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{F_\delta(x,t)}^{+\infty} \exp\{-y^2\}\,dy & \text{для} \quad 0 < t \leqslant T, \\ 0 & \text{для} \quad t = 0, \end{cases}$$

где

$$F_\delta(x,t) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^\delta}{2\sqrt{t}},$$

является непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^1 \otimes [0,T]$, обращается в нуль при $t = 0$ и удовлетворяет при $t > 0$ уравнению

$$\frac{1}{\delta^2}\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) u_{xx} + \\ + \frac{1}{\delta^2}\left(x - \delta\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) u_x - u_t = 0.$$

В этом уравнении коэффициент при u_{xx} растет не быстрее, чем $M|x|^{2+2\delta}$, а коэффициент при u_x растет не быстрее, чем $M|x|^{1+2\delta.}$ Следовательно, при таком росте коэффициентов нарушается единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций.

Задача 5. [?] Пусть коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ ограничены в $\Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$:

$$|a_{ij}(x,t)| < M, \quad |b_i(x,t)| < M, \quad |c(x,t)| < M, \tag{9.23}$$

а функция $u(x,t)$ непрерывна в Ω и удовлетворяет в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ неравенствам

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,t) \geqslant -\exp\left[\beta(|x|^2+1)\right], \tag{9.24}$$

где $\beta > 0$ — некоторая постоянная. Доказать, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T] \tag{9.25}$$

при условии

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{9.26}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [?].)

Для получения утверждения задачи нужно рассмотреть вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \exp\left[2\beta(|x|^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] \tag{9.27}$$

и повторить рассуждения при решении предыдущей задачи и проверить, что при надлежащим образом выбранной постоянной $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$Lw(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \tag{9.28}$$

Действительно, имеем

$$Lw(x,t) = w(x,t)e^{\alpha t}\left[4\beta\sum_{i=1}^{N} a_{ii} + 16\beta^2 e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}x_ix_j + \right.$$
$$\left. + 4\beta\sum_{i=1}^{N} b_i x_i + ce^{-\alpha t} - 2\beta\alpha(|x|^2+1)\right] < 0$$

при условии

$$t \leqslant t_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = M\left(\frac{1}{\beta} + 8N + 48\beta N\right).$$

Теперь рассмотрим новую функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t) + u(x,t). \tag{9.29}$$

В цилиндре $D_{r_0,t_0} = \{|x| \leqslant r_0\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ при $t = 0$ имеем

$$v(x,0) = u_0(x) + w(x,0) \geqslant \exp\left[2\beta(|x|^2+1) - \beta(r_0^2+1)\right] \geqslant 0,$$

а при $r = r_0$ имеем

$$v(x,t) = \exp\left[2\beta(r_0^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] + u_0(x) \geqslant \\ \geqslant \exp\left[\beta(r_0^2+1)\right] - \exp\left[\beta(r_0^2+1)\right] = 0. \quad (9.30)$$

В силу принципа максимума в цилиндре D_{r_0,t_0} мы получим, что

$$v(x,t) = u(x,t) + w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_{r_0,t_0}.$$

Переходя к пределу при $r_0 \to +\infty$ мы получим, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,t_0].$$

Далее нужно повторить рассуждения последовательно в полосах

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{2}{\alpha}, \quad \frac{2}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{3}{\alpha}, \cdots \frac{n}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{n+1}{\alpha}, \cdots$$

и в результате получим, что утверждение задачи выполнено для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$.

Замечание к задаче 5. Для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

известны более сильные результаты, чем результат задачи 4. В частности, в работе С. Тэклинда **[?]** доказано, что решение задачи Коши единственно в классе функций, удовлетворяющих условию

$$|u(x,t)| \leqslant \exp\left[\delta|x|h(|x|)\right] \quad \text{при} \quad |x| > 1,$$

где $\delta > 0$ — это произвольная постоянная, $h(r)$ — положительная неубывающая функция и

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dr}{h(r)} = +\infty.$$

Причем в случае сходимости последнего интеграла единственность решения задачи Коши нарушается.

Задача 6. **[?]** Пусть непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \quad (9.31)$$

причем

$$|u(x,0)| \leqslant M_1, \quad |f(x,t)| \leqslant M_2, \quad c(x,t) \leqslant M_3, \quad (9.32)$$

коэффициенты a_{ij} и b_i подчинены условиям (9.8). Тогда всюду в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ выполнено неравенство

$$|u(x,t)| \leqslant e^{M_3 t}\,(M_1 + M_2 t)\,. \tag{9.33}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [?].)

Для доказательства рассмотрим вспомогательные функции

$$w_\pm(x,t) \stackrel{def:}{=} e^{M_3 t}\,(M_1 + M_2 t) \pm u(x,t).$$

По условию задачи имеем

$$w_\pm(x,0) \geqslant 0.$$

Вычислим $Lw_\pm(x,t)$. Имеем

$$Lw_\pm(x,t) = e^{M_3 t}\,[(c - M_3)(M_1 + M_2 t) - M_2] \pm f \leqslant -M_2 e^{M_3 t} \pm f \leqslant 0$$

Отметим, что в силу ограниченности в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ решения $u(x,t)$ найдется такая постоянная $m > 0$, что

$$u(x,t) \geqslant -m \Rightarrow u(x,t) \geqslant -m(|x|^q + 1).$$

В силу результата задачи 3 получим

$$w_\pm(x,t) \geqslant 0 \quad \text{всюду в} \quad \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает, что справедлива следующая теорема:

Теорема 9. *Пусть L — это параболический оператор с непрерывными в $\mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ коэффициенами и выполняются условия* (9.1). *Тогда существует не более одного решения задачи Коши*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \tag{9.34}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^N, \tag{9.35}$$

удовлетворяющего условию роста А. Н. Тихонова

$$|u(x,t)| \leqslant B \exp\left[\beta |x|^2\right] \tag{9.36}$$

при некоторых положительных константах B и β.

Доказательство.

Пусть $f(x,t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$. Из условия (9.36) вытекает, что

$$u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta |x|^2\right] \quad \text{либо} \quad -u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta |x|^2\right].$$

в первом случае из теоремы 8 получим, что $u(x,t) \geqslant 0$, а во втором случае получим, что $-u(x,t) \geqslant 0$. Итак, $u(x,t) \equiv 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема Виддера. [?] Отметим, что имеет место следующий важный результат: *любая неотрицательная функция,* *непрерывная в* $\mathbb{R}^1 \otimes [0, +\infty)$, *равная нулю при* $t = 0$ *и удовлетворяющая уравнению теплопроводности*

$$u_{xx} - u_t = 0 \quad \textit{в} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^1 \otimes [0, +\infty),$$

равна нулю тождественно.

С другой стороны, А. Н. Тихонов предложил следующий пример:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \quad g(t) = \exp(-t^2) \quad t > 0, \quad g(0) = 0, \tag{9.37}$$

который показывает, что условие знакоположительности существенно. Кроме того, ясно, что функция (9.37) не удовлетворяет условию роста А. Н. Тихонова.

Пример неединственности. [?] Заметим, что во всех теоремах единственности мы требовали, чтобы функция $u(x,t)$ была непрерывна вплоть до границы области D. Например, нельзя потребовать, чтобы функция была непрерывна по t для каждого x. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{9.38}$$

$$\lim_{t \to +0} u(x,t) = 0 \quad \text{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{9.39}$$

Решение этой задачи в классе А. Н. Тихонова имеет следующий явный вид:

$$u(x,t) = \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right]. \tag{9.40}$$

Отметим, что построенное решение является неограниченным в любой окрестности точки $(0,0)$. Действительно, запишем функцию (9.40) в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{2}{t} \frac{x}{2\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right].$$

Будем стремить точку (x,t) к точке $(0,0)$ по параболе

$$x = a2\sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \to +0, \quad a > 0,$$

тогда

$$u(x(t),t) = \frac{2}{t} a e^{-a^2} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

§ 10. Теорема типа Жиро

Для того, чтобы исследовать вопрос о единственности решения *второй* и *третьей краевой задачи* нам необходимо доказать так называемую *теорему* типа Жиро о знаке косой производной. Предварительно дадим определение *свойства строгой сферичности изнутри.*

Определение 4. *Пусть* $P_0 = (x_0, t_0)$ *— это точка на границе* ∂D *области* D. *Если существует такой замкнутый шар* B *с цен-*

тром в точке $(\overline{x}, \overline{t})$, что $B \subset \overline{D}$, $B \cap \partial D = \{P_0\}$, и если $\overline{x} \neq x_0$, то мы скажем что P_0 обладает свойством строгой сферичности изнутри.

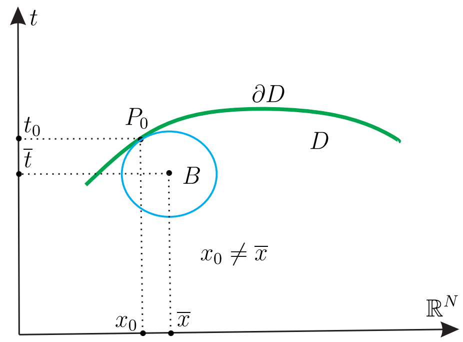

Рис. 24. К определению 4 строгой сферичности.

З а м е ч а н и е 10. Отметим, что если убрать требование $\overline{x} \neq x_0$ в определении 4, то мы получим *свойство сферичности изнутри*.
З а м е ч а н и е 11. Отметим, что свойство строгой сферичности не выполняется для многих естественных областей. Смотри рисунок 26. На этом рисунке, во–первых, отмечены точки A_0, B_0, C_0 и D_0, которые не обладают даже свойством сферичности (не строгой) изнутри, поскольку не существует малого шара, который коснулся бы этих точек оставаясь внутри области D. Далее, нижняя крышка $\overline{D} \cap \{t = 0\}$ цилиндра D обладает свойством сферичности изнутри, но никакая точка нижней крышки не обладает свойством строгой сферичности изнутри. Аналогичным образом верхняя крышка B_T цилиндра D также обладает лишь свойством сферичности изнутри, а не строгой сферичности изнутри. Наконец, лишь боковая поверхность $\overline{D} \cap \{0 < t < T\}$ обладает свойством строгой сферичности изнутри. Хотя, именно на боковой поверхности в случае второй и третьей краевых задач ставится условия с косой производной.

Предположим теперь, что $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и выполнены, стало быть, все условия теоремы 4, причем $u(x,t) \neq const$ в области D. Пусть, кроме того,

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{10.1}$$

Если $u(x,t)$ имеет положительный максимум $M > 0$ в $\overline{D}$, то в силу условия теоремы 4 функция $u(x,t)$ в некоторой точке $P_0 \in \partial' D = S \cup \overline{B}$ (на параболической границе области D) достигает максимума

$$u(P_0) = M \quad \text{в точке} \quad P_0 \in \partial' D. \tag{10.2}$$

При этих условиях справедлива следующая *теорема типа Жиро*:

Т е о р е м а т и п а Ж и р о. *Если выполняются высказанные выше условия, точка P_0 обладает свойством строгой сферичности из-*

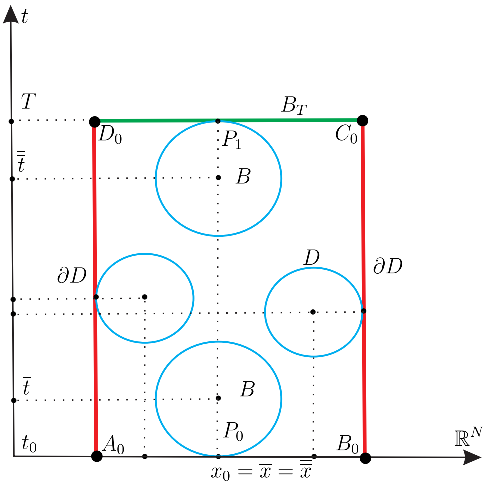

Рис. 25. К замечанию 11.

нутри и существует окрестность V *точки* P_0, *такая, что*

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad D \cap V, \tag{10.3}$$

то для любого некасательного внутреннего направления l_{P_0} *выполнено неравенство*

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) \stackrel{def}{=} \liminf_{|(x,t)-(x_0,t_0)|\to+0,\ (x,t)\in B} (l_{P_0}, D_{x,t})\, u(x,t) < 0, \tag{10.4}$$

где

$$D_{x,t} = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}, \partial_t)\,.$$

З а м е ч а н и е 12. Некасательным внутренним направлением мы называем направление из точки P_0 внутрь шара B, граница которого касается ∂D в точке P_0.

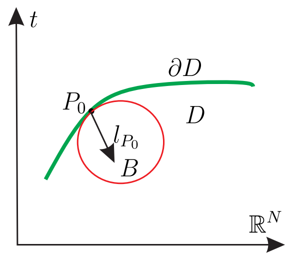

Рис. 26. Некасательное внутреннее направление и шар B.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Можно считать, что внутренность замкнутого шара B лежит в $D \cap V$ [1]. Обозначим границу B через ∂B.

Пусть π — это гиперплоскость, которая делит пространство $(x,t) \in \in \mathbb{R}^{N+1}$ на два полупространства π^- и π^+ так, что

$$\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \pi^-, \quad P_0 = (x_0, t_0) \in \pi^+.$$

Так как $\overline{x} \neq x_0$, мы можем выбрать гиперплоскость π таким образом, чтобы

$$B^+ \stackrel{def:}{=} \pi^+ \cap B \neq \varnothing \quad \text{и} \quad |x - \overline{x}| \geqslant a > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in B^+.$$

При этом граница B^+ состоит из части $C_1 \in \partial B$ и другой части $C_2 \in \in B \cap \pi$.

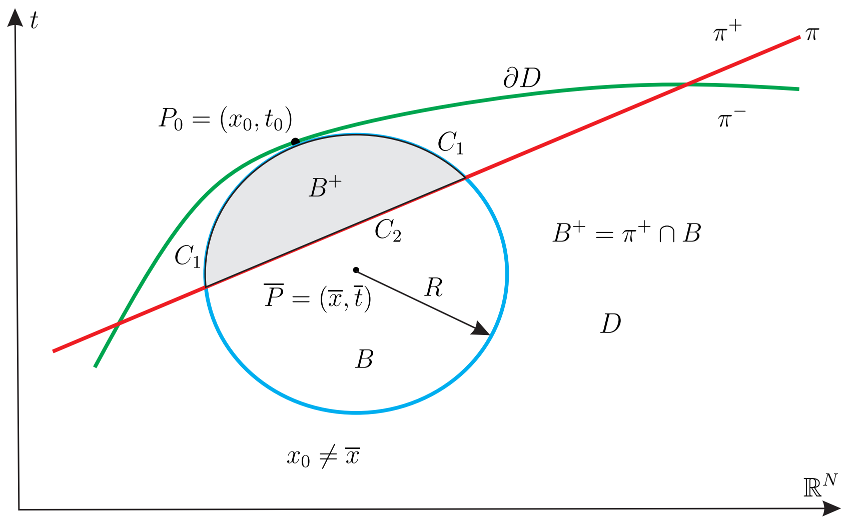

Рис. 27. Множество B^+ и его граница $C_1 \cup C_2$.

Шаг 2. Введем функцию

$$h(x,t) \stackrel{def:}{=} \exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2 + |t-\overline{t}|^2\right]\right\} - \exp\left\{-\alpha R^2\right\}, \tag{10.5}$$

где R — это радиус сферы ∂B (граница шара B). Имеем

$$h(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in C_1, \quad h(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B^+}, \tag{10.6}$$

причем можно проверить, что [2]

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+ \tag{10.7}$$

[1] Можно просто выбрать шар B достаточно малым.

[2] Здесь существенно, что $x_0 \neq \overline{x}$ и поэтому выполнено следующее неравенство: $|x - \overline{x}| \geqslant a > 0$ для всех $(x,t) \in B^+$.

при достаточно большом $\alpha > 0$.

Шаг 3. Введем следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t), \quad \varepsilon > 0. \tag{10.8}$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $v(x,t)$ будет удовлетворять условиям

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_2, \quad v(x,t) = u(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_1 \backslash \{P_0\}, \tag{10.9}$$

причем

$$v(P_0) = u(P_0) = M. \tag{10.10}$$

Поскольку

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+, \tag{10.11}$$

то функция $v(x,t)$ в силу принципа максимума не может принимать своего максимального значения $M > 0$ во внутренней точке B^+. Итак,

$$v(x,t) < M \quad \text{внутри} \quad B^+. \tag{10.12}$$

Шаг 4. Из (10.10) и (10.12) вытекает, что [1)]

$$\frac{\partial v}{\partial l_{P_0}}(P_0) \leqslant 0. \tag{10.13}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial n_{x,t}} > 0, \quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial \tau_{x,t}} = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) = P_0, \tag{10.14}$$

где $n_{x,t}$ — это внутренняя нормаль к сфере ∂B в точке P_0, а $\tau_{x,t}$ — это касательная к сфере ∂B в той же точке P_0. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial l_{P_0}} = \cos(l_{P_0}, n_{P_0})\frac{\partial}{\partial n_{P_0}} + \cos(l_{P_0}, \tau_{P_0})\frac{\partial}{\partial \tau_{P_0}},$$
$$\cos(l_{P_0}, n_{P_0}) > 0, \quad \cos(l_{P_0}, \tau_{P_0}) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}}(P_0) > 0. \tag{10.15}$$

Итак, из (10.13) и (10.15) вытекает, что

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = \frac{\partial v}{\partial l_{P_0}}(P_0) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}}(P_0) < 0. \tag{10.16}$$

Лемма доказана.

[1)] Ниже следующее неравенство выполнено, поскольку l_{P_0} — это внутреннее направление, а поскольку в граничной точке P_0 у функции $u(x,t)$ строгий максимум, то по любому внешнему направлению τ к точке P_0 выполнено неравенство $\partial v(P_0)/\partial\tau \geqslant 0$.

Замечание 13. Предположение, что

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad D \cap V,$$

является, конечно, существенным, так как в противном случае $u(x,t)$ могла бы быть постоянной в $D \cap V$ и тогда бы

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}\,(P_0) = 0.$$

Контрпример к теореме типа Жиро 1. Заметим, что если P_0 — это угловая точка границы ∂D, то теорема типа Жиро может оказаться неверной. Например, если определить область D неравенствами

$$x^2 + t^2 < R^2, \quad t < \gamma_1 x, \quad t < \gamma_2 x, \quad \gamma_1 > 0 > \gamma_2,$$

и положить, что

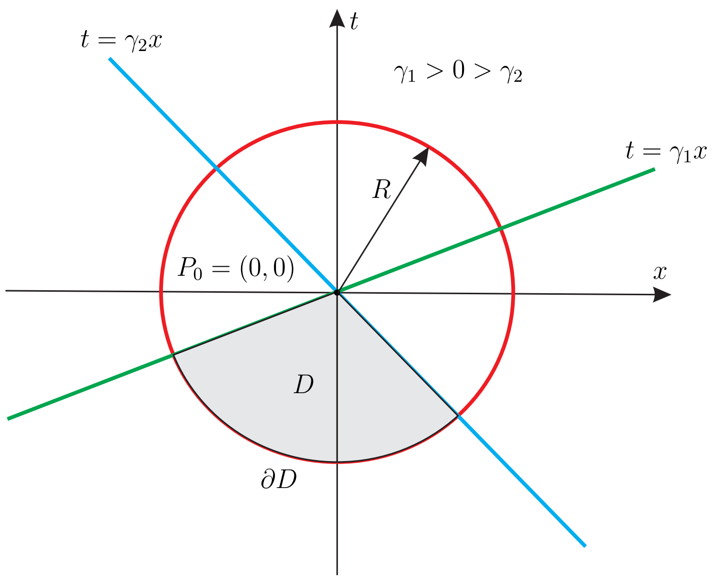

Рис. 28. Область D с угловой точкой $P_0 = (0,0)$.

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

$$u(x,t) = (t - \gamma_1 x)(\gamma_2 x - t) + 1,$$

то

$$u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D, \quad u(x,t) = 1 \quad \text{в} \quad P_0,$$

$$Lu(x,t) = -2\gamma_1\gamma_2 + \overline{\overline{o}}(|x| + |t|) > 0,$$

если $R > 0$ достаточно малое. Однако,

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0$$

для любого направления l_{P_0}.

Контрпример к теореме типа Жиро 2. Заметим, что условие строгой сферичности изнутри нельзя заменить на условие сферичности изнутри, т. е. условие $x_0 \neq \overline{x}$ существенно. Действительно, рассмотрим область $D = \{(x,t):\ x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0\}$. Пусть

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad u(x,t) = 1 - t^2.$$

Отметим, что для заданной функции $u(x,t)$ имеем

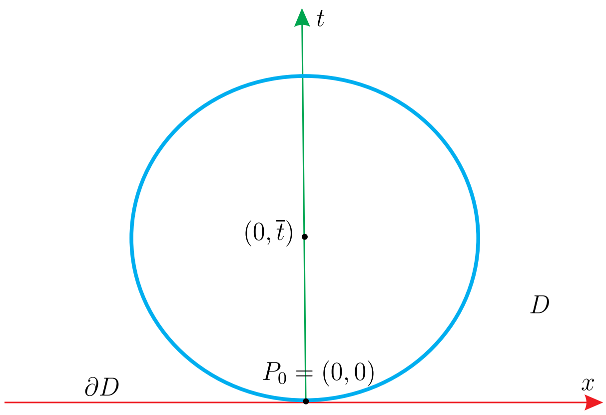

Рис. 29. Область D с условием нестрогой сферичности всей границы ∂D.

$$Lu(x,t) = 2t > 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u(P_0) = 1, \quad u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D,$$

но при этом

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0$$

для любого направления l_{P_0}.

§ 11. Вторая и третья краевые задачи

Будем пользоваться обозначениями первого параграфа. Пусть $\beta = \beta(x,t) \in \mathbb{C}(S)$, где S — это боковая граница области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ и пусть $\tau = \tau(x,t)$ — это вектор эвклидова пространства $\mathbb{E}^{N+1}$, определенный на S и непрерывно меняющийся на S. Пусть заданы любые функции $f(x,t)$ на $D \cup B_T$, $\varphi(x)$ на $\overline{B}$ и $\psi(x,t)$ на S.

Напомним постановку *третьей краевой задачи*.

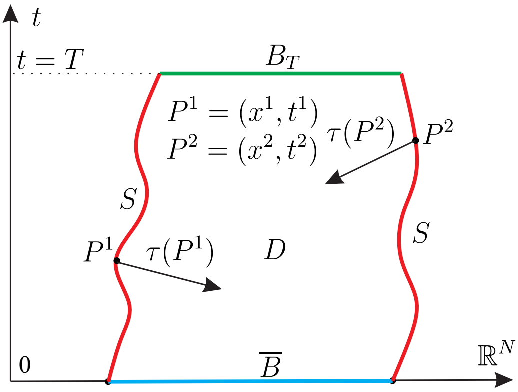

Рис. 30. Векторное поле на границе S.

П о с т а н о в к а т р е т ь е й к р а е в о й з а д а ч и. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{11.1}$$

удовлетворяющую начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \tag{11.2}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x,t)u(x,t) = \psi(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \tag{11.3}$$

З а м е ч а н и е 14. Заметим, что если направление $\tau = \tau(x,t)$ нигде не касается поверхности S, то задача называется *регулярной*.

Пусть D цилиндр с основанием B и боковой границей S. Пусть, кроме того,

$$n_{x,t} = (n_{x,t,1}, ..., n_{x,t,N}, 0)$$

внутренняя нормаль к $(x,t) \in S$, тогда, напомним, *внутренней конормалью* называется величина

$$\nu_{x,t} = (\nu_{x,t,1}, ..., \nu_{x,t,N}, 0), \quad \nu_{x,t,i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x,t) n_{x,t,j}.$$

В частном случае, когда $a_{ij} = \delta_{ij}$ внутренняя нормаль и внутренняя конормаль совпадают.

Заметим, что в некоторых учебных пособиях (см., например, [**?**]) используется такое определение второй краевой задачи:

П о с т а н о в к а в т о р о й к р а е в о й з а д а ч и. *Третья краевая задача* (11.1)–(11.3) *в случае когда* $\tau(x,t) = \nu_{x,t}$ *— направление внутренней конормали — называется* <u>*вторая краевая задача.*</u>

Справедлива следующая теорема:

Теорема единственности решения третьей краевой задачи. *Пусть L — параболический оператор с непрерывными в D коэффициентами. Предположим, что $c(x,t) \leqslant 0$, $\beta(x,t) \leqslant 0$ и каждая точка $P \in S$ обладает свойством строгой сферичности изнутри. Тогда существует не более одного решения третьей краевой задачи* (11.1)–(11.3). *Если τ не зависит от t, то предположение $c(x,t) \leqslant 0$ можно опустить.*

Доказательство. В силу линейности задачи нам нужно доказать, что если $f(x,t) \equiv 0$ в $D \cup B_T$, $\varphi(x) \equiv 0$ в $\overline{B}$ и $\psi(x,t) \equiv 0$ на S, то $u(x,t) \equiv 0$ в D.

Шаг 1. Последнее утверждение теоремы доказывается стандартным образом при помощи замены функции

$$v(x,t) = e^{-\gamma t} u(x,t), \quad \gamma \geqslant \max_{(x,t) \in \overline{D}} c(x,t).$$

Шаг 2. Допустим, что тем не менее $u(x,t) \not\equiv 0$. Можно считать, что $u(x,t)$ имеет положительный максимум $M > 0$ в $\overline{D}$. Если

$$u(P_0) = M,$$

то $P_0 \notin B_t$ при $0 < t \leqslant T$, так как из сильного принципа максимума следовало бы, что

$$u(x,t) \equiv M \quad \text{при} \quad (x,t) \in S(P_0),$$

а поскольку в силу наших исходных предположений существует кривая $\gamma \in D \cup B \cup B_T$, соединяющая некоторую точку $P^1 \in B_T$ с некоторой точкой $P^2 \in B$, вдоль которой координата t не возрастает.

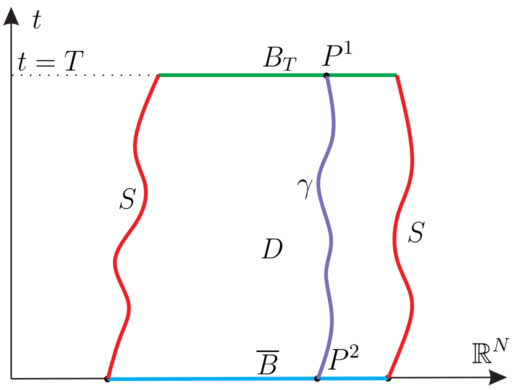

Рис. 31. Точки $P^1 \in B_T$ и $P^2 \in B$ и кривая γ, их соединяющая.

Но тогда

$$u(x,0) = M > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in B,$$

но это противоречит нашему исходному предположению $\varphi(x) = 0$ на $\overline{B}$. Следовательно, $u(x,t)$ может достигать положительного максимума только на боковой границе S, на которой как раз и задано граничное условие с производной по направлению.

Шаг 3. Таким образом, имеем

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в некоторой точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S,$$

причем в силу шага 2 имеем [1])

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. Поскольку точка P_0 удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри, то мы можем применить теорему типа Жиро и получить, что

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(P_0) < 0 \Rightarrow 0 > \frac{\partial u}{\partial \tau}(P_0) = -\beta(P_0)u(P_0) \geqslant 0$$

и получить противоречие. Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ в $D \cup B_T$.

Теорема доказана.

Замечание 15. Заметим, что требование строгой сферичности на множестве $S \cap \{t = T\}$ является очень ограничительным — это означает, что область D должная выглядеть «приблизительно» так:

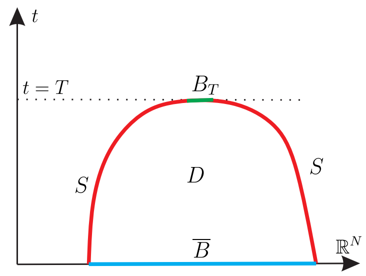

Рис. 32. Область D с условием сферичности точек множества $S \cap \{t = T\}$.

Однако, условие строгой сферичности множества точек $S \cap \{t = T\}$ можно заменить требованием $\beta(x,T) < 0$. Более того, имеет место следующее утверждение:

Задача 7. Доказать, что можно опустить требование строгой сферичности всех точек боковой границы S, заменив его требованием

$$\beta(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S.$$

Указание. В качестве наводящих соображений отметим, что если не требовать условия строгой сферичности изнутри множества точек боковой границы S, то и нельзя применить теорему Жиро — это означает, что в данном случае можно доказать единственность третьей краевой задачи без теоремы типа Жиро.

[1]) Внутри области D не может достигаться положительный относительный максимум в силу принципа максимума, если $u(x,t)$ не постоянная в $S(P_0)$.

Решение. В модификации нуждается только доказательство теоремы единственности третьей краевой задачи на шаге 3. Таким образом, имеем

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в некоторой точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S,$$

причем в силу шага 2 имеем [1])

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. Тогда в этой точке выполнено противоречивые неравенства:

$$0 \geqslant \frac{\partial u}{\partial \tau_{P_0}}(P_0) = -\beta(P_0)u(P_0) > 0.$$

§ 12. Теоремы сравнения — нелинейный случай

В этом параграфе мы рассмотрим теоремы сравнения для *нелинейных краевых задач* достаточно общего вида. Именно сначала рассмотрим следующую *первую краевую задачу*:

$$u_t - \Delta u = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{12.1}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S, \tag{12.2}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. В этом параграфе мы будем использовать введенные в первом параграфе обозначения D, S, B, а также

$$D_\tau \stackrel{def:}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau \stackrel{def:}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{def:}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}.$$

При этом мы будем предполагать, что $D \subset \mathbb{R}^N$ — это область и $B_\tau \subset \subset \mathbb{R}^N$ — это область для каждого $\tau \in (0,T)$.

В дальнейшем в спецкурсе профессора Н. Н. Нефедова студентам кафедры математики будет изложен *метод верхних и нижних решений* доказательства разрешимости краевых задач для нелинейных уравнений параболического и эллиптического типов [**?**]. Метод основан на признаке сравнения для соответствующих нелинейных краевых задач. Поэтому мы докажем признак сравнения регулярных решений первой краевой задачи (12.1), (12.2).

Справедлива следующая теорема:

Теорема 10. *Пусть $v(x,t)$ и $w(x,t)$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$. Пусть, кроме того, функция $f(x,t,p,p_i)$ при $i = \overline{1,N}$ является непрерывной по всем переменным (x,t,p,p_i) в области*

$$E \stackrel{def:}{=} D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N.$$

---

[1]) Внутри области D не может достигаться положительный относительный максимум в силу принципа максимума, если $u(x,t)$ не постоянная в $S(P_0)$.

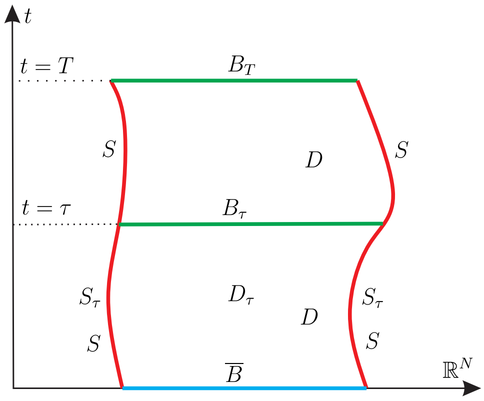

Рис. 33. Область D и множества D_τ, B_τ и S_τ.

Если

$$v_t - \Delta v > f(x, t, v, D_x v) \quad \text{в} \quad D, \tag{12.3}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x, t, w, D_x w) \quad \text{в} \quad D, \tag{12.4}$$

и если

$$v(x, t) > w(x, t) \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S, \tag{12.5}$$

тогда

$$v(x, t) > w(x, t) \quad \text{в} \quad D. \tag{12.6}$$

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим следующее множество точек $\sigma \in \mathfrak{M} \subset (0, T)$ таких, что

$$v(x, t) > w(x, t) \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{B_t} \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant t < \sigma.$$

Если мы докажем, что

$$\sup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \{\sigma\} = T,$$

то теорема будет доказана.

Шаг 2. Пусть

$$t_0 \stackrel{def:}{=} \sup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \{\sigma\}. \tag{12.7}$$

В силу (12.5) и того, что по условию теоремы $v(x, t), w(x, t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, выполнено неравенство $t_0 > 0$. Если $t_0 < T$, то функция

$$z(x, t) \stackrel{def:}{=} v(x, t) - w(x, t) > 0 \quad \text{в} \quad D_{t_0}, \quad z(x, t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad B_{t_0}, \tag{12.8}$$

причем найдется такая точка $P_0 = (x_0, t_0) \in \overline{B_{t_0}}$, в которой

$$z(P_0) = 0. \tag{12.9}$$

С другой стороны, в силу того, что $\partial B_{t_0} \in S$ и выполнено строгое неравенство (12.5) точка $P_0 \notin \partial B_{t_0}$. Следовательно, $P_0 \in B_{t_0}$ и является точкой минимума функции $z(x,t)$ в области B_{t_0}. Итак, в точке P_0 выполнены необходимое и достаточное условие минимума

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(P_0) = 0, \quad \Delta z(P_0) \geqslant 0. \tag{12.10}$$

Шаг 3. В силу равенств (12.9) и (12.10) и неравенств (12.12), (12.13) выполнено равенство

$$\begin{aligned} &f(x_0, t_0, D_x v(P_0)) = f(x_0, t_0, D_x w(P_0)) \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow v_t(P_0) - \Delta v(P_0) > w_t(P_0) - \Delta w(P_0) \Rightarrow \\ &\qquad\quad \Rightarrow z_t(P_0) > \Delta z(P_0) \geqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) > w_t(P_0). \end{aligned} \tag{12.11}$$

С другой стороны, в силу определения (12.7) имеем [1]

$$0 = z(P_0) < z(P) \quad \text{для всех} \quad D_{t_0}.$$

Следовательно,

$$z_t(P_0) \leqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) \leqslant w_t(P_0),$$

что противоречит неравенству (12.11).

Полученное противоречие доказывает, что $t_0 = T$

Теорема доказана.

Замечание 16. Заметим, что серия из двух условий (12.12) и (12.13) может быть заменена на следующую серию:

$$v_t - \Delta v \geqslant f(x, t, v, D_x v) \quad \text{в} \quad D, \tag{12.12}$$

$$w_t - \Delta w < f(x, t, w, D_x w) \quad \text{в} \quad D, \tag{12.13}$$

Теперь мы рассмотрим примеры применения теоремы 10 сравнения решений.

Задача 8. [?] Пусть

$$\frac{\partial v}{\partial t} > \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + av^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0, 4M), \quad a > 0, \tag{12.14}$$

$$v(x,0) > \frac{\mu}{M}, \quad v(0,t) > \frac{\mu}{M}, \quad v(1,t) > \frac{\mu}{N} \tag{12.15}$$

при $(x,t) \in [0,1] \otimes [0, 4M]$, а константы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$a\mu > 2M + \frac{1}{4}, \quad a > 0, \quad M > 0, \quad \mu > 0, \tag{12.16}$$

тогда

$$v(1/2, t) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to 4M. \tag{12.17}$$

Решение. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \frac{\mu}{M - tx(1-x)}. \tag{12.18}$$

[1] Заметим, что согласно определению $B_{t_0} \notin D_{t_0}$

Заметим, что при условии (12.16) имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leqslant \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M), \quad a > 0, \tag{12.19}$$

причем

$$w(x,0) = \frac{\mu}{M}, \quad w(0,t) = \frac{\mu}{M}, \quad w(1,t) = \frac{\mu}{N}. \tag{12.20}$$

Тогда применяя теорему 10 мы получим, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M). \tag{12.21}$$

Следовательно, при $x = 1/2$ имеем

$$v(1/2,t) > \frac{4\mu}{4M-t}.$$

Задача 9. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{12.22}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.23}$$

Прежде всего будем рассматривать только регулярные решения этой задачи Коши, т. е. $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Необходимо, используя признак сравнения решений, получить результат об остывании решения за конечное время.

Решение. Прежде всего предположим, что

$$0 \leqslant u_0(x) \leqslant M, \quad M > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.24}$$

Прежде всего, отметим, что ниже мы докажем более сильный признак сравнения, чем теорема 10, из которого будет следовать, что $u(x,t) \geqslant 0$. Заметим теперь, что функция $v(x,t) = M + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ является решением следующего дифференциального неравенства:

$$v_t - \Delta v > -|v|^p, \quad v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x). \tag{12.25}$$

Поэтому если в теореме 10 взять в качестве $w(x,t) = u(x,t)$, то мы получим следующее неравенство:

$$u(x,t) < M + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+.$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ получим искомое неравенство

$$u(x,t) \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{12.26}$$

Итак, $0 \leqslant u(x,t) \leqslant M$. Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{12.27}$$

нетрудно проверить, что решением этой задачи является следующая функция:

$$z(t) = \begin{cases} \left(M^{1-p} - (1-p)t\right)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \in [0, t_0]; \\ 0, & \text{если} \quad t > t_0, \end{cases} \tag{12.28}$$

где

$$t_0 = \frac{M^{1-p}}{1-p}. \tag{12.29}$$

Заметим, что функция

$$v(x,t) = z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{12.30}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{12.31}$$

Действительно, функция $z = z(t)$ удовлетворяет равенству

$$z_t - \Delta z = -z^p \Rightarrow (z+\varepsilon)_t - \Delta(z+\varepsilon) = -z^p > -(z+\varepsilon)^p.$$

Кроме того,

$$v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.32}$$

Опять применим теорему сравнения 10, в которой возьмем $w(x,t) = u(x,t)$ и получим неравенство

$$u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{12.33}$$

Итак, мы делаем важный вывод — *каждое решение задачи Коши* (12.22), (12.23) *обращается в нуль всюду в* $\mathbb{R}^N$ *за конечное время* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *при условиях* $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ *и* $u_0(x) \not\equiv 0$, *где время* $t_0 > 0$ *определено явной формулой* (12.29).

Задача 10. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{12.34}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.35}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить достаточные условия разрушения решения этой задачи за конечное время.

Решение. Прежде всего заметим, что

$$\Delta u - u_t = -|u|^p \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Согласно теореме 3 (просто нужно вместо $u(x,t)$ рассмотреть $-u(x,t)$) о принципе максимума в неограниченных областях получим, что $u(x,t) \geqslant 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{12.36}$$

Его решение дается следующей явной формулой:

$$z(t) = \bigl(M^{1-p} - (p-1)t\bigr)^{-1/(p-1)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_0, \tag{12.37}$$

где

$$t_0 \overset{def:}{=} \frac{1}{(p-1)M^{p-1}}. \tag{12.38}$$

Отметим, что функция $z = z(t)$ является монотонно возрастающей, причем

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = +\infty.$$

Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$u_0(x) \geqslant M > 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.39}$$

Введем следующую функцию:

$$w(x,t) = z(t) - \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, M). \tag{12.40}$$

Эта функция удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству:

$$w_t - \Delta w > w^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_{+}. \tag{12.41}$$

Действительно,

$$z_t - \Delta z = z^p \Rightarrow (z-\varepsilon)_t - \Delta(z-\varepsilon) = z^p > (z-\varepsilon)^p$$

при $\varepsilon \in (0, M)$. Кроме того,

$$w(x,0) = M - \varepsilon < M \leqslant u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Осталось воспользоваться теоремой 10, в которой нужно взять $v(x,t) = u(x,t)$ и получить следующее неравенство:

$$u(x,t) > z(t) - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ мы получим искомую оценку снизу

$$u(x,t) \geqslant z(t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{12.42}$$

Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу — *при условии* $u_0(x) \geqslant M > 0$ *выполнена оценка* (12.42), *из которой вытекает, что для некоторого* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *решение задачи Коши* (12.34), (12.35) *разрушается за конечное время*:

$$\limsup_{t \to t_1} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x,t) = +\infty. \tag{12.43}$$

Задача 11. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{12.44}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.45}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно показать, что в нелинейном случае единственность решения этой задачи может быть нарушена, даже если решение ищется в классе Тихонова.

Решение. Действительно, как и в предыдущем примере, имеем $u(x,t) \geqslant 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = 0. \tag{12.46}$$

Его семейство всех решений (их бесконечно много) может быть представлено в следующем виде:

$$z(t) = (1-p)^{1/(1-p)} \begin{cases} (t-t_0)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \geqslant t_0; \\ 0, & \text{если} \quad t \in [0, t_0], \end{cases} \tag{12.47}$$

где $t_0 \geqslant 0$ — любое неотрицательное число. Ясно, что решения $u(x,t) = z(t)$ удовлетворяют условиям задачи Коши (12.44) и (12.45).

Задача 12. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{12.48}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.49}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить оценку сверху на скорость убывания решения во времени этой задачи.

Решение. Как и в первом примере, используя более сильный признак сравнения можно доказать, что $u(x,t) \geqslant 0$

Предположим, что $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0, \quad p > 1. \tag{12.50}$$

Единственное решение дается следующей формулой:

$$z(t) = \left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{-1/(p-1)}, \quad t \geqslant 0. \tag{12.51}$$

Как и ранее, можно легко показать, что функция

$$v(x,t) \stackrel{def}{=} z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{12.52}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{12.53}$$

причем

$$v(x,0) = M + \varepsilon > M \geqslant u_0(x) = u(x,0) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \qquad (12.54)$$

Осталось применить теорему сравнения 10, в которой положить $w(x,t) = u(x,t)$, и получить оценку

$$0 \leqslant u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t) =$$
$$= \frac{1}{\left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{1/(p-1)}} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \qquad (12.55)$$

Задача для самостоятельного решения 1. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u + |\nabla u|^q + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \qquad (12.56)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \qquad (12.57)$$

при условиях $q > 0$, $p \in (0,1)$, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ и $u(x,t) \geqslant 0$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (12.33)

Задача для самостоятельного решения 2. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q + |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \qquad (12.58)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \qquad (12.59)$$

при условиях $q > 0$, $1 < p$, $0 < M \leqslant u_0(x)$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (12.42).

Рассмотренные примеры показывают, что результат теоремы 10 может быть модифицирован следующим образом:

Теорема 11. *Пусть $v(x,t)$ и $w(x,t)$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$. Пусть, кроме того, функция $f(x,t,p,p_i)$ при $i = \overline{1,N}$ является непрерывной по всем переменным (x,t,p,p_i) в области*

$$E \overset{def:}{=} D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N$$

и является строго монотонной по переменной $p \in \mathbb{R}^1$. Если

$$v_t - \Delta v \geqslant f(x,t,v,D_x v) \quad \text{в} \quad D, \qquad (12.60)$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \text{в} \quad D, \qquad (12.61)$$

и если найдется такое $\varepsilon_0 > 0$

$$v(x,t) \geqslant w(x,t) + \varepsilon_0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S, \qquad (12.62)$$

тогда

$$v(x,t) \geqslant w(x,t) \quad \text{в} \quad D. \qquad (12.63)$$

Доказательство.

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что заменой

$$v(x,t) = \overline{v}(x,t) + \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

либо заменой [1])

$$w(x,t) = \overline{w}(x,t) - \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

мы получим серию неравенств (с учетом замечания 16) для $\overline{v}$ и w или для v и $\overline{w}$ в формулировке теоремы 10. А после применения этой теоремы нужно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$, чтобы получить неравенство (12.63).

Теорема доказана.

Теперь мы рассмотрим *нелинейную третью краевую задачу* и докажем признак сравнения для нее. Именно сначала рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{12.64}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{на} \quad \overline{B}, \tag{12.65}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x,t,u(x,t)) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad S, \tag{12.66}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$.

Справедлива следующая теорема *о признаке сравнения для третьей краевой задачи*:

Теорема 12. *Пусть все предположения теоремы* 10 *остаются без изменения. Если*

$$v_t - \Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \textit{в} \quad D, \tag{12.67}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \textit{в} \quad D \tag{12.68}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{на} \quad \overline{B}, \tag{12.69}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x,t,v(x,t)) < \frac{\partial w(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x,t,w(x,t)) \quad \textit{на} \quad S, \tag{12.70}$$

где $\beta = \beta(x,t,p)$ — это любая функция определенная на множестве $S \otimes \mathbb{R}^1$, $\tau = \tau(x,t)$ — направленное внутрь $D_t \cup B_t$ непрерывное векторное поле. Тогда

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{12.71}$$

Доказательство.

Здесь нужно заметить, что доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы. Только точка P_0 не

[1]) Одновременная замена допустима, но лишена смысла.

может принадлежать ∂B_{t_0}, поскольку с одной стороны в силу принципа максимума

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}(P_0) \geqslant 0,$$

а, с другой стороны, в силу неравенства (12.70) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}(P_0) < 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 17. Заметим, что если потребовать строгой сферичности изнутри части $S\backslash\partial B_T$ боковой границы S, что достаточно естественно [1]), то строгое неравенство (12.70) можно заменить на нестрогое неравенство

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x,t,v(x,t)) \leqslant \frac{\partial w(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x,t,w(x,t)) \quad \text{на} \quad S \qquad (12.72)$$

и при этом результат теоремы остается в силе, если применить теорему типа Жиро.

Замечание 18. Заметим, что результат теоремы сравнения остается в силе при замене строгих неравенств на нестрогие. Результатом также будет нестрогое неравенство [**?**].

Задача 13. [**?**] Рассмотрим следующую задачу с *нелинейными граничными условиями*:

$$u_t = \Delta u \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \qquad (12.73)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_x} = u^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T], \quad p > 1, \qquad (12.74)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \qquad (12.75)$$

где n_x — это вектор внешней нормали к ляпуновской границе $\partial\Omega \in A^{1,h}$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Нужно доказать, что всякое нетривиальное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}_t^{(1)}((0,T];\mathbb{C}_x^{(2)}(\overline{\Omega})) \cap \mathbb{C}_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega} \otimes [0,T])$ разрушается за конечное время.

Решение.

Шаг 1. Прежде всего докажем, что

$$\inf_{x\in\Omega} u(x,\varepsilon) = c > 0 \quad \text{для достаточно малого} \quad \varepsilon > 0. \qquad (12.76)$$

□ Действительно, в силу доказанного признака сравнения и замечания 18 имеем

$$u(x,t) \geqslant 0,$$

поскольку $v(x,t) = 0$ удовлетворяет уравнению (12.73), граничному условию (12.74) и $u_0(x) \geqslant 0 = v(x,0)$. Теперь заметим, что если

$$u(x_0,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \Omega,$$

[1]) Это условие выполнено для задач, возникающих в приложениях.

то в силу слабого принципа максимума имеем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \otimes [0,\varepsilon],$$

а, стало быть, $u_0(x) = 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Это противоречит тому, что $u_0(x) \not\equiv 0$. Кроме того, если $u(x,t) \not\equiv 0$ при $(x,t) \in \Omega \otimes [0,\varepsilon]$ и

$$u(x_0,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \partial\Omega,$$

то в этой точке минимума в силу граничного условия (12.74) получим

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x_0,\varepsilon) = 0,$$

что противоречит теореме типа Жиро. ⊠

Шаг 2. Меняя если необходимо $t = 0$ на $t = \varepsilon > 0$ без ограничения общности можем сразу же считать, что

$$\inf_{x\in\Omega} u_0(x) = c > 0. \tag{12.77}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\varphi_t = \Delta\varphi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{12.78}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n_x} = \varphi^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T), \tag{12.79}$$

$$\varphi(x,0) = c > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{12.80}$$

В силу признака сравнения с функцией $v(x,t) = c$, которая удовлетворяет системе уравнений

$$v_t = \Delta v \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial n_x} \leqslant v^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$v(x,0) = c > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega},$$

мы получим неравенство $\varphi(x,t) \leqslant c$ для всех $t > 0$ и, используя опять признак сравнения, получим неравенство

$$u(x,t) \geqslant \varphi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,T]. \tag{12.81}$$

Шаг 3. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(x,t) \stackrel{def:}{=} \varphi(x,t+\eta) - \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad \eta > 0. \tag{12.82}$$

Эта функция удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\psi_t = \Delta\psi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T-\eta], \tag{12.83}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n_x} = p\left(\frac{\partial\varphi(x,t+\eta)}{\partial n_x} - \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n_x}\right) =$$
$$= (\varphi^p(x,t+\eta) - \varphi^p(x,t)) =$$

$$= p\xi^{p-1}(x,t)\psi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0, T-\eta], \tag{12.84}$$

где $\xi(x,t) \in [\varphi(x,t), \varphi(x,t+\eta)]$,

$$\psi(x,0) = \varphi(x,\eta) - c \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{12.85}$$

Используя признак сравнения мы получим, что

$$\psi(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0, T-\eta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{12.86}$$

Шаг 4. Отметим, что в классе $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}_t^{(1)}((0,T]; \mathbb{C}_x^{(2)}(\overline{\Omega})) \cap \cap\, \mathbb{C}_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega} \otimes [0,T])$ функция

$$z(x,t) \stackrel{def:}{=} \varphi_t(x,t)$$

удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$z_t = \Delta z \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}(x,t)z(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$z(x,0) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Аналогично доказательству свойства (12.76) мы получим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\inf_{x\in\Omega} z(x,\varepsilon) = \inf_{x\in\Omega} \varphi_t(x,\varepsilon) > 0. \tag{12.87}$$

Шаг 5. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \varphi_t(x,t) - \delta\varphi^p(x,t). \tag{12.88}$$

Прежде всего имеем цепочку выражений

$$w_t - \Delta w = \varphi_{tt} - \delta p\varphi^{p-1}\varphi_t - \Delta\varphi_t + \delta\Delta\varphi^p = \\ = -\delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi + p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D\varphi|^2 + \delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi = \\ = p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D\varphi|^2 \geqslant 0, \tag{12.89}$$

поскольку

$$\varphi_{tt} = \Delta\varphi_t.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial w}{\partial n_x} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial n_x} - \delta\frac{\partial \varphi^p}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}\varphi_t - \delta p\varphi^{p-1}\varphi^p = p\varphi^{p-1}w. \tag{12.90}$$

Кроме того, при достаточно малом $\delta > 0$ в силу (12.87) выполнено следующее неравенство:

$$w(x,\varepsilon) = \varphi_t(x,\varepsilon) - \delta\varphi^p(x,\varepsilon) \geqslant 0. \tag{12.91}$$

Используя признак сравнения получим, что

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]. \tag{12.92}$$

Шаг 6. Итак, выполнено неравенство

$$\varphi_t(x,t) \geqslant \delta \varphi^p(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]. \tag{12.93}$$

Решением этого дифференциального неравенства является следующее неравенство:

$$\varphi(x,t) \geqslant (\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon))^{-1/(p-1)} \tag{12.94}$$

для всех $(x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. В силу неравенства (12.81) мы получим, что имеет место неравенство

$$u(x,t) \geqslant (\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon))^{-1/(p-1)} \tag{12.95}$$

для всех $(x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. Это неравенство означает, что $T < +\infty$.

Таким образом, утверждение задачи доказано.

§ 13. Случай нелинейного эллиптического оператора общего вида. Теорема сравнения

В этом параграфе мы докажем признак сравнения для общего оператора (эллиптического оператора) следующего вида:

$$L(u)(x,t) \stackrel{def}{=} F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{13.1}$$

в котором функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ определена на множестве $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$, на котором она является непрерывно дифференцируемой функцией от $N^2 + 2N + 2$ переменных. Потребуем, чтобы функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ определяла эллиптический оператор. Для этого достаточно потребовать, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \xi_i \xi_j > 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N \tag{13.2}$$

и для всех $(x,t,p,p_i,p_{ij}) \in D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$. Теперь предположим, что область D является цилиндрической:

$$D = \Omega \otimes (0,T), \ S = \partial\Omega \otimes (0,T], \ B = \Omega \otimes \{t=0\}, \ B_T = \Omega \otimes \{t=T\}.$$

Рассмотрим следующее нелинейное параболическое уравнение:

$$L(u)(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{13.3}$$

а также дифференциальное неравенство

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T. \tag{13.4}$$

Введем функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - w(x,t). \tag{13.5}$$

В силу выражений (13.3) и (13.4) для функции $v(x,t)$ в области D выполнено следующее неравенство:

$$F(x,t,u,u_{x_i},u_{x_ix_j}) - F(x,t,w_i,w_{x_i},w_{x_ix_j}) - \\ - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{13.6}$$

Теперь применим формулу Адамара среднего значения следующего вида:

$$F(x,t,u,u_{x_i},u_{x_ix_j}) - F(x,t,w,w_{x_i},w_{x_ix_j}) = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)v(x,t), \tag{13.7}$$

где

$$(a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t)) = \int\limits_0^1 \left(F_{p_{ij}}, F_{p_i}, F_p\right) \Big(x,t,\vartheta u + (1-\vartheta)w, \\ , \vartheta u_{x_i} + (1-\vartheta)w_{x_i}, \vartheta u_{x_ix_j} + (1-\vartheta)w_{x_ix_j}\Big)\, ds. \tag{13.8}$$

Итак, с учетом (13.6) и (13.7) мы получим следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \geqslant 0 \tag{13.9}$$

в области D. Предположим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial^{'} D = S \cup \overline{B}, \tag{13.10}$$

тогда применяя принцип максимума (теоремы 2, 3) для решения $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ в ограниченной и неограниченной области D мы получим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{13.11}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме [**?**]:

Теорема 13. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *— это решение уравнения* (13.3) *в цилиндрической области* D [1]. *Предположим, кроме того, функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет граничным условиям*

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{на} \quad \overline{B} = \overline{\Omega}, \tag{13.12}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes (0,T]. \tag{13.13}$$

Пусть $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *класса* $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяют неравенствам*

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \leqslant L(v)(x,t) \quad \text{в} \quad D, \tag{13.14}$$

причем оператор L *является параболическим в подобласти* E *области* $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$ *следующего вида*:

$$\begin{gathered} E = \Big\{(x,t,p,p_i,p_{ij}) : \\ p \in \{\vartheta u(x,t) + (1-\vartheta)v(x,t)\} \cup \{\vartheta u(x,t) + (1-\vartheta)w(x,t)\}, \\ p_i \in \{\vartheta u_{x_i}(x,t) + (1-\vartheta)v_{x_i}(x,t)\} \cup \{\vartheta u_{x_i}(x,t) + (1-\vartheta)w_{x_i}(x,t)\}, \\ p_{ij} \in \{\vartheta u_{x_i x_j}(x,t) + (1-\vartheta)v_{x_i x_j}(x,t)\} \cup \{\vartheta u_{x_i x_i}(x,t) + (1-\vartheta)w_{x_i x_j}(x,t)\}, \\ (x,t) \in D,\ i,j = \overline{1,N}\Big\}. \end{gathered}$$

Если

$$v(x,0) \leqslant u_0(x) \leqslant w(x,0) \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{13.15}$$

$$v(x,t) \leqslant \psi(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \text{на} \quad S, \tag{13.16}$$

тогда

$$v(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \text{в} \quad D. \tag{13.17}$$

Задача 14. [**?**] Рассмотрим следующую первую краевую задачу для *уравнения нелинейной диффузии*:

$$u_t = \Delta u^{1+p} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,+\infty), \quad p > 0, \tag{13.18}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{13.19}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes (0,+\infty). \tag{13.20}$$

Рассматривая решения этой задачи с разделенными переменными, с помощью признака сравнения получить оценки решения во времени.

Решение. Прежде всего заметим, что $u(x,t) \geqslant 0$ в силу теоремы 13, в которой нужно взять $v(x,t) = 0$. Будем искать частное решение уравнения (13.18) в виде

$$u_a(x,t) = f_a(x)\varphi_a(t).$$

[1] Ограниченной или неограниченной.

Подставляя в уравнение (13.18), мы получим равенство

$$\varphi_{at}(t)f_a(x) = \varphi_a^{1+p}(t)\Delta f_a^{1+p}(x) \Rightarrow \frac{\varphi_{at}(t)}{\varphi_a^{1+p}(t)} = \frac{\Delta f_a^{1+p}(x)}{f_a(x)} = \lambda.$$

Нужно рассмотреть два случая: $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

С л у ч а й п е р в ы й: г л о б а л ь н а я р а з р е ш и м о с т ь. Для удобства положим

$$\lambda = -\frac{1}{p}.$$

Откуда получим два уравнения

$$\varphi_{at}(t) + \frac{1}{p}\varphi_a^{1+p}(t) = 0, \quad \Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p}f_a(x) = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{13.21}$$

Функция $\varphi_a(t)$ имеет следующий явный вид:

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{(T+t)^{1/p}}, \tag{13.22}$$

где $T > 0$ — произвольная постоянная. А относительно функции $f_a(x)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла условию

$$f_a(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{13.23}$$

Итак, функция

$$u_a(x,t) \stackrel{def:}{=} \frac{f_a(x)}{(T+t)^{1/p}}, \quad T > 0 \tag{13.24}$$

удовлетворяет уравнению

$$u_{at} = \Delta u_a^{p+1} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,+\infty), \tag{13.25}$$

и граничным условиям

$$u_a(x,0) = \frac{f_a(x)}{T^{1/p}} \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \quad u_a(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes (0,+\infty). \tag{13.26}$$

Пусть начальное условие $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_a(x)}{T_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_a(x)}{T_2^{1/p}}, \quad T_1 > 0,\ T_2 > 0, \tag{13.27}$$

тогда в силу теоремы 13, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_a(x)}{(T_1+t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_a(x)}{(T_2+t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_a(x)}{(T_1+t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_a(x)}{(T_2+t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,+\infty). \tag{13.28}$$

Отметим, что существует (см. [?]) не нулевое решение $f_a(x) \not\equiv 0$ краевой задачи

$$\Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p} f_a(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad f_a(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \qquad (13.29)$$

Случай второй: разрушение за конечное время. Для удобства положим

$$\lambda = \frac{1}{p}.$$

Рассуждая аналогичным образом, мы получим следующую функцию:

$$u_b(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T-t)^{1/p}}, \quad T > 0 \qquad (13.30)$$

— это произвольная постоянная,

$$\Delta f_b^{p+1}(x) - \frac{1}{p} f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \qquad (13.31)$$

$$f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \qquad (13.32)$$

Нетривиальное решение краевой задачи (13.31), (13.32) существует (см. монографию [?]). Предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_b(x)}{T_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_b(x)}{T_2^{1/p}}, \quad 0 < T_2 < T_1, \qquad (13.33)$$

тогда в силу теоремы 13, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_1-t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_2-t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_b(x)}{(T_1-t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_b(x)}{(T_2-t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T_2). \quad (13.34)$$

Отметим, что из неравенства снизу в (13.34) вытекает *разрушение за конечное время* $T_0 \in [0, T_1]$.