МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов

Вопросы и задачи по курсу «Параболические уравнения» для студентов кафедры математики

Москва
Физический факультет МГУ
2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

В этом учебном пособии предложены вопросы и задачи из книг [2], [4], [11] и [14] вместе с их решениями. Отметим, что они изложены в конспекте лекций по курсу «Параболические уравнения» в первых трех лекциях.

Умение воспроизвести решение предложенных в этом пособии задач и ответить на вопросы из пособия является необходимым и достаточным условием для получения зачета по курсу «Параболические уравнения».

Пособие набрано и сверстано в пакете LaTeX2e.

Вопросы и задачи к лекции 1

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 1. Уравнение теплопроводности

Вопрос 1. Выписать фундаментальное решение уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^N$.

Ответ.

Фундаментальное решение имеет следующий вид:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \tag{1.1}$$

где $\vartheta(t)$ — это функция Хевисайда, имеющая следующий явный вид:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \geqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

§ 2. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Вопрос 2. Выписать решение задачи Коши

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty), \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Ответ. Решение дается следующей формулой:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy. \tag{2.3}$$

Вопрос 3. Выписать замену Коула–Хопфа для уравнения Бюргерса

$$v_t + v v_x = \mu v_{xx}, \tag{2.4}$$

связывающего его с уравнением теплопроводности

$$u_t = \mu u_{xx}, \quad t > 0, \quad \mu > 0, \quad u(x,t) \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Ответ. Замена Коула–Хопфа имеет следующий вид:

$$v(x,t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln u(x,t). \tag{2.6}$$

§ 3. Неоднородная задача Коши

В о п р о с 4. Выписать решение неоднородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.2}$$

О т в е т. Решение неоднородной задачи Коши (3.1), (3.2) имеет вид *интеграла Дюамеля*:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y, t-s) f(y,s)\, dy\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\, dy\, ds \tag{3.3}$$

В о п р о с 5. Выписать решение общей неоднородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.5}$$

О т в е т. Решение дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\, dy +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\, dy\, ds. \tag{3.6}$$

§ 4. Слабый принцип максимума для уравнения теплопроводности

В о п р о с 6. Сформулировать слабый принцип максимума для уравнения теплопроводности. В какой области D он доказан? Что такое B, B_T, S, ∂D и $\partial' D$?

О т в е т. Слабый принцип максимума состоит в следующем:

Т е о р е м а 1. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — *решение уравнения теплопроводности*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{4.1}$$

тогда

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t), \tag{4.2}$$

$$\min_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = \min_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t), \tag{4.3}$$

Вопрос 7. Может ли минимальное и максимальное значение решения $u(x,t) \neq const$ уравнения теплопроводности достигаться во внутренних точках рассматриваемой области?

Ответ. Да.

Решение. Рассмотрим область $D = \{|x| < 1\} \otimes (0,T)$, в которой рассматривается уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \tag{4.4}$$

Пусть $t_0 \in (0,T)$, $x_0 = 2$ и введем следующую функцию:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \otimes [0,t_0]; \\ \mathcal{E}(x,t;x_0,t_0), & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \otimes (t_0,T], \end{cases} \tag{4.5}$$

где

$$\mathcal{E}(x,t;x_0,t_0) \stackrel{def}{=} \frac{\vartheta(t-t_0)}{\sqrt{4\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}\right\}, \quad x_0 = 2.$$

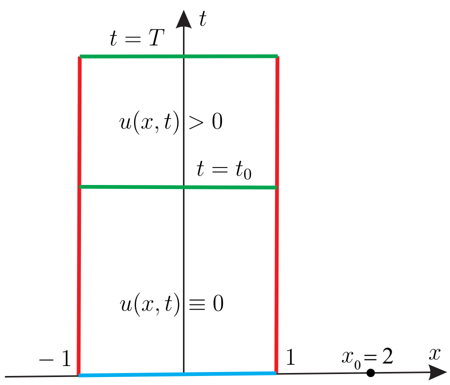

Рис. 1. К примеру.

Вопрос 8. Может ли минимальное и максимальное значение решения $u(x) \neq const$ достигаться в гладкой области D, в которой рассматривается уравнение Лапласа

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{в} \quad D?$$

Ответ. Нет.

Вопрос 9. Сформулировать принцип максимума для суб– и супер–параболических решений.

Ответ. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u - u_t \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad D, \tag{4.6}$$

$$u \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial' D, \tag{4.7}$$

то $u \leqslant 0$ *в* D.

Если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u - u_t \leqslant 0 \quad \textit{в} \quad D, \tag{4.8}$$

$$u \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial' D, \tag{4.9}$$

то $u \geqslant 0$ *в* D.

Вопрос 10. Пусть задана цилиндрическая область $D = (a,b) \otimes (0,t_0)$. Что такое S, B, B_{t_0}, ∂D и $\partial' D$ в данном случае? Что такое нижняя крышка, верхняя крышка, боковая граница и параболическая граница?

Ответ. Согласно определению

$$S \stackrel{def:}{=} \{x = a\} \otimes \{0 < t \leqslant t_0\} \cup \{x = b\} \otimes \{0 < t \leqslant t_0\},$$

$$\overline{B} \stackrel{def:}{=} \{a \leqslant x \leqslant b\} \otimes \{t = 0\},$$

$$B_{t_0} \stackrel{def:}{=} \{a < x < b\} \otimes \{t = t_0\},$$

причем $\partial D = S \cup \overline{B} \cup B_{t_0}$, а параболическая граница $\partial' D = S \cup \overline{B}$. Замкнутая область $\overline{B}$ называется *нижней крышкой*, область B_{t_0} называется *верхней крышкой*, а множество S называется *боковой границей*.

Задача 1. [2] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ — это решение в $\overline{D} = [0,1] \otimes [0,1]$ задачи

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D},$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0,1),$$

причем выполнены условия согласования $u(0,0) = u(1,0) = 0$. Может ли функция

$$f(t) \stackrel{def:}{=} \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx$$

иметь максимум при $t \in (0,1)$?

Ответ. Нет.

Решение. Итак, предположим, что в некоторой точке $t_0 \in (0,1)$ достигается максимум функции $f(t)$. Поскольку $f(t) \geqslant 0$ и решение $u(x,t) \neq 0$, то

$$f(t_0) > 0.$$

Тогда имеет место цепочка выражений

$$f^{'}(t_0) = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_t(x,t_0)\,dx = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_{xx}(x,t_0)\,dx = 0.$$

Интегрируя по частям в последнем равенстве, мы с учетом граничных условий в рассматриваемом классе гладкости получим равенство

$$-\int\limits_0^1 (u_x(x,t_0))^2\,dx = 0 \Rightarrow u_x(x,t_0) = 0 \Rightarrow u(x,t_0) = const \quad \forall x \in [0,1],$$

из которого опять в силу граничных условий получим $u(x,t_0) = 0$, что в свою очередь означает

$$f(t_0) = \int\limits_0^1 u^2(x,t_0)\,dx = 0.$$

Но это противоречит определению точки $t_0 \in (0,1)$.

Задача 2. [2] Пусть $u(x,t)$ — это регулярное решение в $D = (0,\pi) \otimes (0,+\infty)$ задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{4.10}$$

где $\varphi(0) = \varphi^{'}(\pi) = 0$. Проверить, что

1. Выполнено ли неравенство

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|? \tag{4.11}$$

2. Верно ли, что

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|? \tag{4.12}$$

Ответ. 1. Да. 2. Нет.

Решение. Для того чтобы в дальнейшем воспользоваться принципом максимума, нам нужно получить эквивалентную задачу, но с условиями Коши–Дирихле. С этой целью продолжим функцию $u(x,t)$

четным образом через точку $x = \pi$ на множество $x \in (\pi, 2\pi)$, т. е. положим

$$\widetilde{u}(x,t) = u(2\pi - x, t) \quad \text{при} \quad x \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \widetilde{u}_x(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0.$$

Построенная функция является решением краевой задачи

$$\widetilde{u}_t = \widetilde{u}_{xx}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad t > 0, \tag{4.13}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \widetilde{u}|_{x=2\pi} = 0, \quad \widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}, \tag{4.14}$$

где функция $\widetilde{\varphi}(x)$ четным образом продолженная на интервал $(\pi, 2\pi)$. Задачи (4.10) и (4.13), (4.14) эквивалентны. Теперь мы можем применить принцип максимума и получить, что максимум модуля функции $\widetilde{u}(x,t)$ достигается при $t = 0$, поскольку на боковой границе при $x = 0$ и $x = 2\pi$ $\widetilde{u}(x,t) = 0$. Итак,

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| = \sup_{0<x<2\pi} |\widetilde{u}(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<2\pi} |\widetilde{\varphi}(x)| = \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|. \tag{4.15}$$

Тем самым утверждение (4.11) доказано.

Неравенство (4.12) неверно. Действительно, возьмем

$$\varphi(x) = \sin(x/2),$$

которому соответствует решение, полученное методом разделения переменных,

$$u(x,t) = e^{-t/4} \sin(x/2) \Rightarrow \sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| = e^{-1/4}, \qquad \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)| = 1.$$

Заметим, что

$$e^{-1/4} > \frac{1}{2},$$

поскольку $e < 2^4$.

З а д а ч а 3. [2] Пусть $D = (0,1) \otimes (0,1)$. Существует ли функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — решение следующей первой краевой задачи:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{в} \quad D, \tag{4.16}$$

$$u|_{t=0} = 2\sin \pi x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.17}$$

$$u|_{x=0} = \sin \pi t, \quad u|_{x=1} = \sin \pi t + 2\sin \pi t \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1, \tag{4.18}$$

$$u|_{t=1} = 3\sin \pi x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1? \tag{4.19}$$

О т в е т. Нет.

Р е ш е н и е. Задача для самостоятельного решения.

З а д а ч а 4. [2] Существует ли решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{Q})$ задачи

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad \text{в} \quad \overline{Q}, \quad Q = \left\{(x,t) : \; x^2 + t^2 < 1\right\}, \tag{4.20}$$

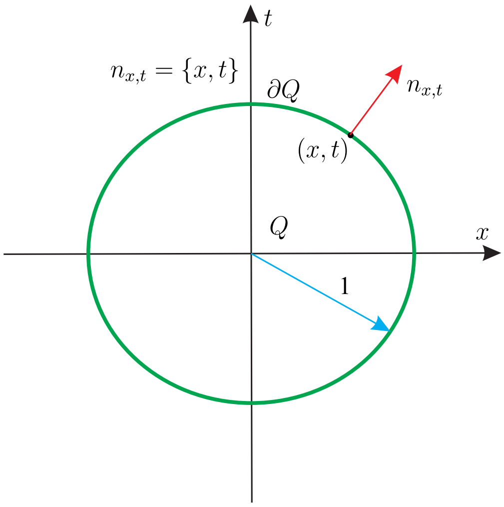

Рис. 2. К задаче 4.

$$xu_x = tu \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial Q = \Big\{(x,t):\ x^2 + t^2 = 1\Big\}? \tag{4.21}$$

Ответ. Нет.

Решение. Прежде всего заметим, что справедлива следующие равенства в силу формулы Грина:

$$\int\limits_Q u_t \, dx \, dt = \int\limits_{\partial Q} u(x,t) \cos(n_{x,t}, e_t) \, dl, \tag{4.22}$$

$$\int\limits_Q u_{xx} \, dx \, dt = \int\limits_{\partial Q} u_x(x,t) \cos(n_{x,t}, e_x) \, dl, \tag{4.23}$$

где $n_{x,t}$ — это внешняя нормаль в точке $(x,t) \in \partial Q$. Легко проверить, что

$$n_{x,t} = (x,t), \quad \cos(n_{x,t}, e_t) = t, \quad \cos(n_{x,t}, e_x) = x.$$

Поэтому интегрируя обе части уравнения (4.20), мы получим равенство

$$\int\limits_{\partial Q} u(x,t) t \, dl = \int\limits_{\partial Q} u_x(x,t) x \, dl + 2\pi,$$

а с учетом граничного условия (4.21) мы получим противоречивое равенство

$$0 = 2\pi.$$

З а д а ч а 5. [2] Пусть функции $u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D_k) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_k)$, $k = 1, 2$, являются решениями в

$$D_k \stackrel{def:}{=} (-k, k) \otimes (0, T)$$

краевых задач

$$(u_k)_t = (u_k)_{xx}, \quad u_k|_{x=\pm k} = 0, \quad u_k|_{t=0} = \varphi(x), \quad |x| \leqslant k. \tag{4.24}$$

Здесь $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(1)}([-2,2])$, $\varphi(x) \geqslant 0$ при $|x| \leqslant 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $1 \leqslant |x| \leqslant 2$, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Доказать, что

$$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in [-1,1] \otimes (0,T]. \tag{4.25}$$

Р е ш е н и е. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума $u_k(x,t) > 0$ в D_k. Рассмотрим разность

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u_2(x,t) - u_1(x,t).$$

Введенная функция удовлетворяет задаче

$$v_t = v_{xx}, \quad v|_{x=\pm 1} > 0, \quad v|_{t=0} = 0. \tag{4.26}$$

В силу принципа максимума имеем $v(x,t) \geqslant 0$ в D, т. е. выполнено неравенство (4.25).

З а д а ч а 6. [2], [4] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ является решением уравнения

$$u_t = \Delta u + f(x), \quad f(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \tag{4.27}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D. \tag{4.28}$$

Докажите, что $u_t(x,t) \geqslant 0$ в D.

Р е ш е н и е. Итак, в области D выполнено неравенство

$$\Delta u - u_t \leqslant 0,$$

тогда с учетом второго утверждения в вопросе 9 и равенства (4.28) получим, что выполнено неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{4.29}$$

Рассмотрим функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t+\varepsilon) - u(x,t), \quad \varepsilon > 0. \tag{4.30}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t = \Delta w \quad \text{в} \quad D_\varepsilon = U \otimes (0, T-\varepsilon), \tag{4.31}$$

причем
$$w(x,t) = u(x,t+\varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D_\varepsilon, \tag{4.32}$$
поскольку
$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial' D \supset \partial' D_\varepsilon.$$
Применяя теперь второе утверждение из вопроса 9, получим
$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow \frac{u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)}{\varepsilon} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)}{\varepsilon} = u_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{4.33}$$

Задача 7. Вариант неравенства Чебышева. [4] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ является решением дифференциального неравенства
$$\Delta u - u_t \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,T). \tag{4.34}$$
Предположим, что
$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T], \tag{4.35}$$
$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B} = \overline{\Omega} \otimes \{t = 0\}. \tag{4.36}$$
Пусть $v = v(x)$ — это гладкая неотрицательная функция в $\overline{\Omega}$ такая, что
$$\Delta v(x) \leqslant -1 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{4.37}$$
Доказать, что
$$u(x,t) \leqslant \frac{v(x)}{t} \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.38}$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума имеем [1])
$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.39}$$
Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:
$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - \frac{v(x)}{t}. \tag{4.40}$$
Прежде всего применим к этой функции оператор
$$\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$$
и получим следующее выражение:

[1]) Нужно применить утверждение 1 вопроса 9 к функции $u(x,t) - 1$.

$$\Delta w - w_t = \Delta u - u_t - \frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant \frac{1}{t^2}\left(t - v(x)\right). \quad (4.41)$$

Разобьем область D на три части

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$

$$D_1 \stackrel{def:}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) > t\}, \quad D_2 \stackrel{def:}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) < t\},$$
$$D_3 \stackrel{def:}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) = t\}.$$

На множестве D_1 выполнено неравенство

$$\frac{v(x)}{t} > 1 \geqslant u(x,t) \Rightarrow w(x,t) \leqslant 0, \quad (4.42)$$

где последнее неравенство имеет место в силу принципа максимума, примененного к функции $u(x,t)$. На множестве $D_2 \cup D_3$ в силу (4.43) выполнено неравенство

$$v(x) \leqslant t \Rightarrow \Delta w - w_t \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2 \cup D_3. \quad (4.43)$$

Теперь заметим, что в силу определения (4.40) функции $w(x,t)$ и неравенств (4.35), (4.36) на параболической границе $\partial^{'} D = S \cup \overline{B}$ области D выполнено неравенство

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D. \quad (4.44)$$

Часть границы множества $D_2 \cup D_3$, не входящая в $\partial^{'} D$ совпадает с $D_3 \backslash D$ и на множестве D_3 имеет место следующее неравенство:

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 1 - 1 = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_3. \quad (4.45)$$

Итак, в силу утверждения 1 из <u>вопроса 9</u> мы из неравенств (4.43), (4.44) и (4.45) получим неравенство

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2. \quad (4.46)$$

Следовательно, объединяя неравенства (4.42), (4.45) и (4.46), получим неравенство

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.$$

В о п р о с 11. [2] Справедлив ли принцип максимума в области $D = \Omega \otimes (0,T)$ для обратно параболического уравнения

$$u_t + \Delta u = 0 \quad (4.47)$$

в том виде, в каком он справедлив для уравнения теплопроводности?

Ответ. Нет.

Решение. Заметим, что заменой $t \to -t$ уравнение (4.47) сводится к уравнению теплопроводности

$$u_t = \Delta u.$$

Тем самым, нетрудно догадаться, что максимум и минимум функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ может достигаться при $(x,t) \in \overline{B}_T \cup \widehat{S}$, где $\widehat{S} = \partial U \otimes [0,T)$, но не может достигаться при $(x,t) \in D \cup B$. Таким образом, в *принципе максимума* для уравнения (4.47) нужно заменить B на B_T, а S на $\widehat{S}$.

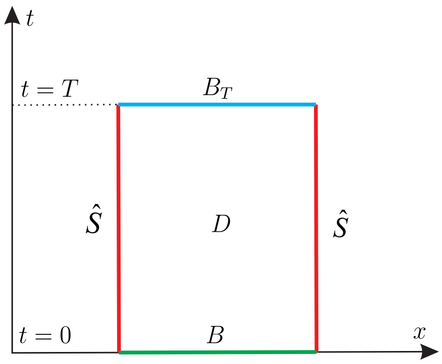

Рис. 3. К задаче 9.

Задача для самостоятельного решения 1. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ и, кроме того, $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$. Рассмотрите неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Докажите, что имеют место неравенства

$$\min_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t) - T \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)| \leqslant u(x,t) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t) + T \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.$$

Указание. Необходимо рассмотреть следующие две функции:

$$v_1(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) + tK, \quad v_2(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - tK,$$

$$K \stackrel{def:}{=} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.$$

§ 5. Слабый принцип максимума для задачи Коши

Вопрос 12. Сформулировать сильный принцип максимума решений задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Ответ. Слабый принцип максимума состоит в следующем:
Теорема 2. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,T]) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$ — *это решение задачи Коши*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.2}$$

удовлетворяющее условию роста

$$u(x,t) \leqslant Me^{\beta|x|^2} \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{5.3}$$

где $M > 0$ *и* $\beta > 0$ — *это константы. Тогда*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes[0,T]} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} g(x). \tag{5.4}$$

Задача 8. [4] Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ удовлетворяет условию роста (5.3) и является решением задачи Коши

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad D = (0,T) \otimes \mathbb{R}^N, \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.5}$$

причем начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leqslant a|x-y|^\delta, \quad \delta \in (0,1). \tag{5.6}$$

Тогда

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leqslant a|x-y|^\delta \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \tag{5.7}$$

Кроме того,

$$|u(x,t) - u(x,s)| \leqslant b|t-s|^{\delta/2} \quad \text{при} \quad t,s \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{5.8}$$

Решение. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего введем функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x+y,t) - u(x,t) \tag{5.9}$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$. Эта функция удовлетоворяет уравнению

$$w_t = \Delta w, \quad w(x,0) = u_0(x+y) - u_0(x), \quad |w(x,0)| \leqslant a|y|^\delta.$$

Введем две функции

$$v_1(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t) - a|y|^\delta, \quad v_2(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t) + a|y|^\delta.$$

Эти функции удовлетворяют задачам

$$v_{kt} = \Delta v_k, \quad k = 1, 2,$$

$$v_1(x, 0) \leqslant 0, \quad v_2(x, 0) \geqslant 0.$$

Применяя слабый принцип максимума (теорема 2), мы получим, что

$$v_1(x, t) \leqslant 0, \quad v_2(x, t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Следовательно,

$$|w(x, t)| \leqslant a|y|^{\delta}. \tag{5.10}$$

Шаг 2. Теперь мы можем доказать неравенство (5.8). Действительно, введем следующую функцию:

$$w(x, t; y, s) \stackrel{def:}{=} u(x, t + s) - u(y, s). \tag{5.11}$$

При $t = 0$ по–доказанному имеем

$$|w(x, 0; y, s)| = |u(x, s) - u(y, s)| \leqslant a|x - y|^{\delta}. \tag{5.12}$$

Заметим, что из арифметического неравенства Юнга

$$a_1 a_2 \leqslant \frac{1}{q_1} a_1^{q_1} + \frac{1}{q_2} a_2^{q_2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \quad a_1, a_2 \geqslant 0$$

вытекает арифметическое трехпараметрическое неравенство Юнга

$$a_1 a_2 \leqslant \varepsilon a_1^{q_1} + \mu(\varepsilon) a_2^{q_2}, \quad \mu(\varepsilon) = \frac{1}{q_2 (q_1 \varepsilon)^{q_2/q_1}}. \tag{5.13}$$

Применяя неравенство (5.13), мы получим следующее неравенство:

$$|x - y|^{\delta} a \leqslant \varepsilon |x - y|^2 + \mu(\varepsilon), \quad \mu = \mu(\varepsilon) = \frac{c_1}{\varepsilon^{\delta/(2-\delta)}}, \quad \delta \in (0, 1) \tag{5.14}$$

при

$$q_1 = \frac{2}{\delta}, \quad q_2 = \frac{2}{2 - \delta}.$$

Используя это неравенство из (5.12), мы получим следующее неравенство:

$$-\varepsilon |x - y|^2 - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x, s) - u(y, s) \leqslant \varepsilon |x - y|^2 + \mu(\varepsilon), \tag{5.15}$$

причем тем более выполнено более слабое двустороннее неравенство

$$\begin{aligned} - \varepsilon(|x - y|^2 + 2Nt) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x, 0; y, s) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon(|x - y|^2 + 2Nt) + \mu(\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Заметим, что функция

$$v(x, t; y) = |x - y|^2 + 2Nt$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$ является решением уравнения теплопроводности. Поэтому в силу принципа максимума получим, что имеет место неравенство

$$-\varepsilon(|x - y|^2 + 2Nt) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x, t; y, s) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon(|x - y|^2 + 2Nt) + \mu(\varepsilon). \quad (5.17)$$

Положим в этом неравенстве $x = y$ и получим неравенства

$$-\varepsilon 2Nt - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x, t + s) - u(x, s) \leqslant \varepsilon 2Nt + \mu(\varepsilon). \quad (5.18)$$

Осталось выбрать оптимальное $\varepsilon > 0$. Возьмем

$$\varepsilon = \frac{1}{t^\alpha}.$$

Рассмотрим выражение

$$2Nt^{1-\alpha} + c_1 t^{\alpha\delta/(2-\delta)}, \quad (5.19)$$

в котором мы положим

$$1 - \alpha = \alpha\frac{\delta}{2 - \delta} \Rightarrow \alpha = \frac{2 - \delta}{2}.$$

В результате выражение (5.19) примет следующий вид:

$$(2N + c_1)t^{\delta/2}. \quad (5.20)$$

Итак, неравенства (5.18) примут следующий вид:

$$|u(x, t + s) - u(x, s)| \leqslant bt^{\delta/2}, \quad b = 2N + c_1. \quad (5.21)$$

З а м е ч а н и е 1. Комбинируя неравенства (5.7) и (5.8) мы приходим к следующему неравенству:

$$|u(x, t) - u(y, s)| \leqslant c_2 \left(|x - y|^\delta + |t - s|^{\delta/2}\right). \quad (5.22)$$

И это итоговое неравенство является следствием лишь условия (5.6) на начальную функцию $u_0(x)$ и принципа максимума!

§ 6. Единственность решения задачи Коши

Вопрос 13. Единственно ли решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,T]) \cap \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$ задачи Коши

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{6.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{6.2}$$

в классе А. Н. Тихонова [10],

$$|u(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta |x|^2\right) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{6.3}$$

где $M > 0$ и $\beta > 0$ — константы?

Ответ. Да.

Задача 9. Единственно ли решение следующей задачи:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{6.4}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N? \tag{6.5}$$

Ответ. Нет.

Задача 10. [2] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^1 \otimes (0,T)) \cap \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^1 \otimes [0,T])$ — неотрицательное ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \otimes (0,T), \tag{6.6}$$

причем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,T). \tag{6.7}$$

Доказать, что $u(x,t) = 0$ в слое $\mathbb{R}^3 \otimes (0,T)$.

Решение. Заметим, что в классе ограниченных функций $u(x,t)$ решение задачи Коши дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right] \varphi(\xi)\, d\xi, \quad \varphi(x) \geqslant 0. \tag{6.8}$$

По условию (6.7) имеем

$$0 = u(1/2,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left[-\frac{|1/2-\xi|^2}{4t}\right] \varphi(\xi)\, d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T).$$

Вопросы и задачи к лекции 2

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Вопрос 1. Из каких частей состоит ограниченная область $D \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$, изображенная на рисунке?

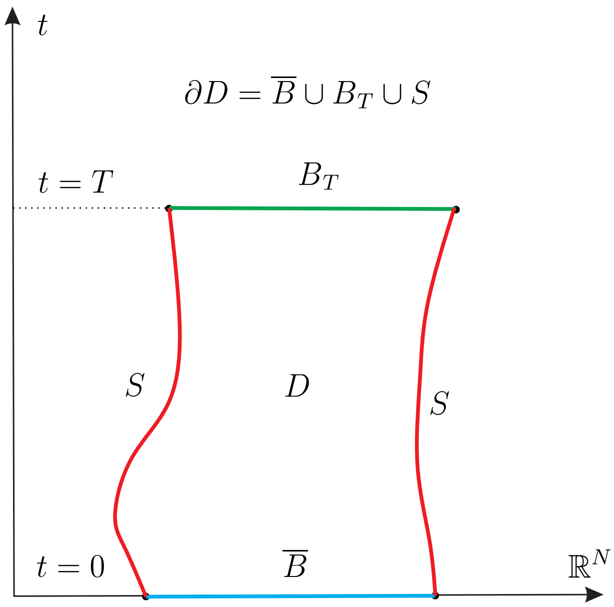

Рис. 4. Граница ∂D области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Что такое верхняя крышка, нижняя крышка боковая граница и параболическая граница?

Ответ. Нижняя крышка — это основание при $t = 0$

$$\overline{B} \stackrel{def:}{=} \partial D \cap \{t = 0\}, \quad \overline{B} = B \cup \partial B.$$

Верхняя крышка

$$\overline{B}_T \stackrel{def:}{=} \partial D \cap \{t = T\}, \quad \overline{B}_T = B_T \cup \partial B_T.$$

Боковая граница

$$S \stackrel{def:}{=} \partial D \cap \{0 < t < T\} \cup \partial B_T.$$

Параболическая граница

$$\partial' D \stackrel{def:}{=} \overline{B} \cup S,$$

§ 1. Постановка задач для параболических операторов

Вопрос 2. Напишите вид параболического оператора и условие его параболичности.

Ответ. Параболический оператор имеет следующий вид:

$$Lu(x,t) \stackrel{def:}{=}$$
$$= \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t). \tag{1.1}$$

Оператор L, определенный равенством (1.1), называется параболическим в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, если для всех $(x,t) \in D$ и для каждого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0. \tag{1.2}$$

Вопрос 3. Дайте определение классического решения параболического уравнения (1.1) в области D.

Ответ. Функция $u = u(x,t)$ непрерывная вместе со всеми своими производными

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

входящими в оператор L, в области D называется классическим решением уравнения (1.1).

Вопрос 4. Дайте определение задачи Коши.

Ответ. Найти классическое решение $u(x,t)$ уравнения

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+ \stackrel{def:}{=} \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{1.3}$$

удовлетворяющего начальному (граничному при $t = 0$) условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.4}$$

Вопрос 5. Дайте определение первой краевой задачи.

Ответ. Найти классическое решение $u(x,t)$ непрерывное на замыкании $\overline{D}$ области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, удовлетворяющее уравнению

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{1.5}$$

начальному условию на нижней крышке (граничному при $t = 0$)

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{B}, \tag{1.6}$$

а также граничному условию на поверхности на боковой границе S

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S \stackrel{def:}{=} (\partial D \cap \{0 < t < T\}) \cup \partial B_T. \tag{1.7}$$

Вопрос 6. Дайте определение второй краевой задачи.

Ответ. Найти классическое решение $u(x,t)$ уравнения

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{1.8}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{B} \tag{1.9}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} = g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S. \tag{1.10}$$

Вопрос 7. Дайте определение третьей краевой задачи.

Ответ. Найти классическое решение $u(x,t)$ уравнения

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{1.11}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{B} \tag{1.12}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S. \tag{1.13}$$

§ 2. Слабый принцип максимума

Вопрос 8. Сформулируйте слабый принцип максимума.

Ответ. Слабый принцип максимума состоит в следующем:

Лемма 1. *Предположим, что либо $Lu > 0$ всюду в D, либо $Lu \geqslant 0$ и $c(x,t) < 0$ всюду в D. Тогда $u(x,t)$ не может иметь положительного локального максимума в D.*

Задача 1. Доказать единственность решения первой краевой задачи.

Указание. Смотреть конспект лекций.

§ 3. Слабый принцип максимума ограниченного решения в цилиндрической области

Вопрос 9. Дайте определение ограниченного решения.

Ответ. Назовем функцию $u(x,t)$ ограниченным решением, если она является ограниченной и непрерывной в $\overline{D} = \overline{\Omega} \otimes [0,T]$, функции $u_{x_i}(x,t)$ и $u_{x_i x_j}(x,t)$ для каждого $t \in [0,T]$ являются непрерывными в Ω и в любой точке D существует производная $u_t(x,t)$.

Вопрос 10. Что такое цилиндрическая область? Приведите пример.

Ответ. Область, представимая в виде декартова произведения $\Omega \otimes (T_0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область и $T_0 < T$ — числа.

Вопрос 11. Сформулировать и доказать слабый принцип максимума в цилиндрической области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Ответ. Слабый принцип максимума состоит в следующем:

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *— ограниченная область, выполнены условия* (A), (B) *и* (C) *относительно коэффициентов параболического оператора* L *в области* D. *Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad (x,t) \in D, \tag{3.1}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial'' D \equiv \overline{\Omega} \otimes \{t=0\} \cup \partial\Omega \otimes (0,T)\ ^{1)}. \tag{3.2}$$

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ *в* D.

Вопрос 12. Сформулируйте и докажите слабый принцип максимума в неограниченной области.

Ответ. Слабый принцип максимума состоит в следующем:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A), (B), (C) *и коэффициенты оператора* L *являются ограниченными функциями в* D. *Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad (x,t) \in D, \tag{3.3}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial'' D \equiv \{x \in \overline{\Omega},\ t=0\} \cup \{x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)\}. \tag{3.4}$$

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ *в* D.

§ 4. Сильный принцип максимума

Вопрос 13. Дайте определение множеств $C(P_0)$ и $S(P_0)$.

Ответ. Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — любая точка из D. Обозначим через $S(P_0)$ множество всех точек $Q = \{(x,t)\}$ в D, таких, что их можно соединить с P_0 простой непрерывной кривой, лежащей в D, вдоль которой координата t не убывает от Q к P_0. Через $C(P_0)$ мы обозначим компоненту пересечения $D \cap \{t = t_0\}$, которая содержит P_0. Заметим, что $S(P_0) \supset C(P_0)$.

---

1) Граница $\partial'' D \subset \partial' D$ и поэтому отличается от параболической или нормальной границы $\partial' D$.

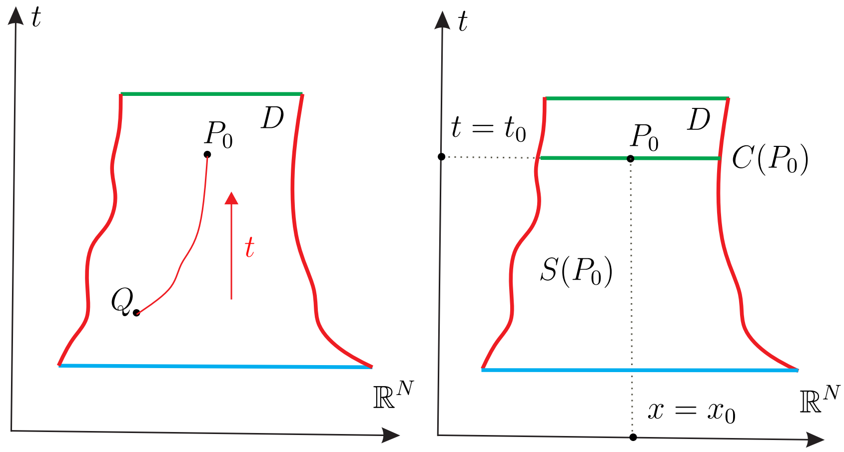

Рис. 5. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$.

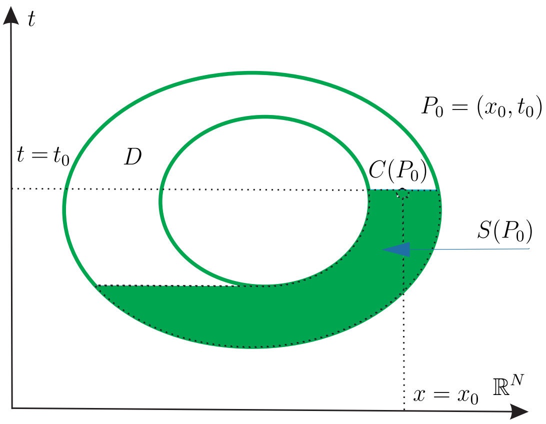

Рис. 6. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$ в случае «гладкой» двусвязной области D.

В о п р о с 14. Сформулировать и доказать сильный принцип максимума.

О т в е т. Слабый принцип максимума состоит в следующем:

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* D *и если* $u(x,t)$ *имеет в* D *положительный локальный максимум* (*отрицательный локальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S(P_0)$.

З а д а ч а 2. Изобразить множества $C(P_1)$, $C(P_2)$ и $C(P_3)$ (см. рисунок 7).

Р е ш е н и е. На рисунке 8 изображено множество $C(P_1)$.

На рисунке 9 изображено множество $C(P_2)$.

На рисунке 10 изображено множество $C(P_3)$.

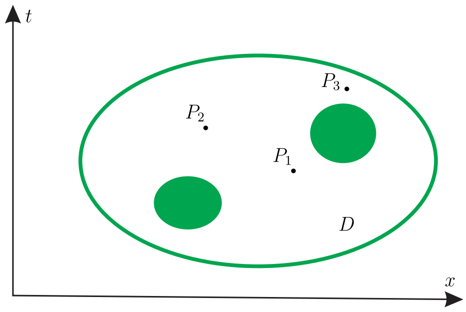

Рис. 7. К задаче 1.

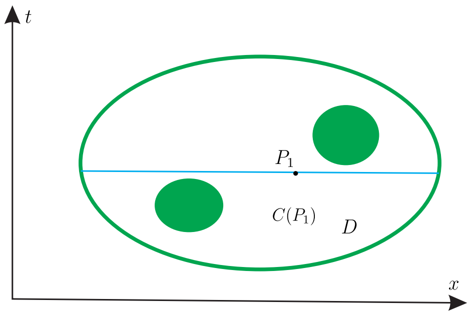

Рис. 8. Множество $C(P_1)$.

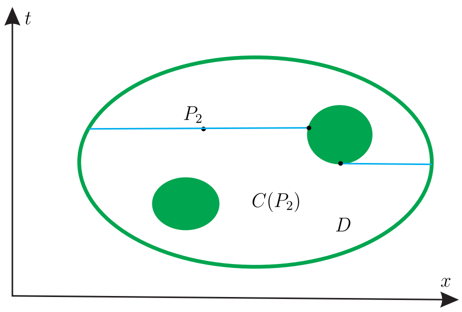

Рис. 9. Множество $C(P_2)$.

§ 5. Первая краевая задача

Вопрос 15. Дайте определение нормальной или параболической границы. Нарисуйте пример.

Ответ. Множество $\partial' D \equiv S \cup \overline{B}$ называется нормальной границей области D. Смотри рисунок 11.

Укажите на рисунке множества

$$D_\tau = D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau = D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau = S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}.$$

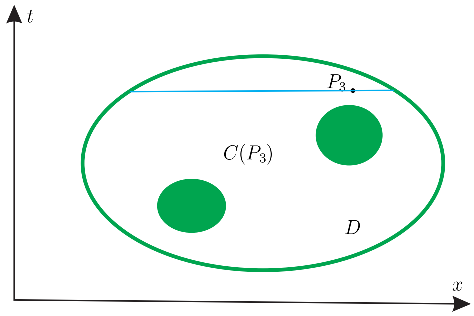

Рис. 10. Множество $C(P_3)$.

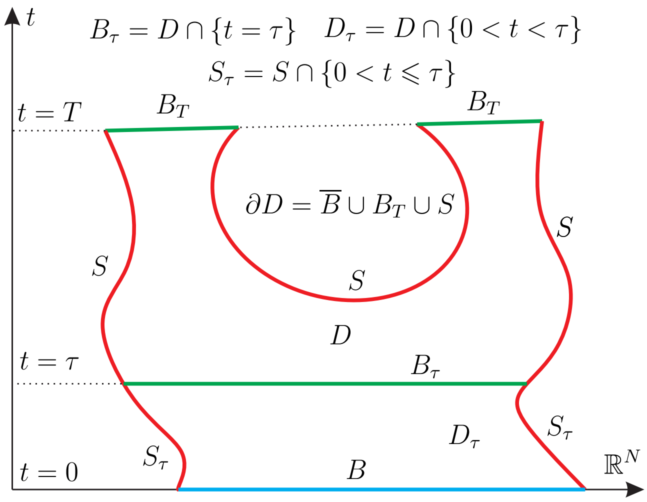

Рис. 11. Область D и ее подмножества.

Вопрос 16. Сформулируйте и докажите теорему о единственности решения первой краевой задачи.

Ответ. Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (A) *и* (B). *Тогда может существовать не более одного решения первой краевой задачи.*

Задача 3. Приведите пример неограниченного решения следующей задачи:

$$\frac{1}{t}u_{xx} + \frac{2}{t}u - u_t = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in (0, \pi), \tag{5.1}$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{5.2}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{5.3}$$

В чем причина неединственности?

Р е ш е н и е. Нетрудно проверить, что функция

$$u(x,t) = at\sin x \quad \text{для любой постоянной} \quad a \in \mathbb{R}^1$$

является решением однородной первой краевой задачи (5.1)–(5.3). Неединственность вызвана неограниченностью коэффициентов уравнения (5.1).

З а д а ч а 4. Докажите следующее следствие:

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^N$ — *ограниченная область, справедливы свойства* (A), (B) *и* (C) *и выполнено равенство* $Lu(x,t) = 0$ *при* $(x,t) \in D$, *тогда справедлива следующая оценка*:

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |u(x,t)| \tag{5.4}$$

У к а з а н и е. Смотрите конспект лекций.

З а д а ч а 5. Докажите следующее следствие:

С л е д с т в и е 2. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* $c(x,t) \leqslant c_0$ *при* $c_0 > 0$. *Если* $Lu(x,t) = 0$ *в* D, *то*

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant e^{c_0 T} \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |u(x,t)|. \tag{5.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

У к а з а н и е. Смотрите конспект лекций.

§ 6. Положительные решения задачи Коши

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения:

$$\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \quad \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

При этом функции $u(x,t)$ мы будем считать непрерывными в Ω.

В о п р о с 17. Сформулируйте и докажите теорему о положительном решении задачи Коши.

О т в е т. Утверждение имеет следующий вид:

Л е м м а 2. *Пусть оператор* L *удовлетворяет предположениям* (A) *и* (B) *в* Ω_0, *и пусть* $c(x,t)$ *ограничено сверху. Если* $Lu(x,t) \leqslant 0$ *в* Ω_0, $u(x,0) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^N$ *и равномерно по* $t \in [0,T]$ *существует*

$$\liminf_{|x|\to+\infty} u(x,t) \geqslant 0,$$

то $u(x,t) \geqslant 0$ *в* Ω.

В о п р о с 18. Сформулируйте условия на коэффициенты параболического оператора L и условие А. Н. Тихонова на рост решения $u(x,t)$, при которых решение неотрицательно.

Ответ. Сделаем следующие предположения относительно коэффициентов параболического оператора L:

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(1+|x|), \quad |c(x,t)| \leqslant M(1+|x|^2) \quad (6.1)$$

при $(x,t) \in \Omega_0$ и $i, j = \overline{1, N}$.

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 5. *Пусть L — параболический оператор с коэффициентами, непрерывными в Ω_0 и удовлетворяющими условиям* (6.1). *Предположим, что $Lu(x,t) \leqslant 0$ в Ω_0 и*

$$u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \Omega \quad (6.2)$$

для некоторых положительных постоянных[1] *B и β. Если $u(x,0) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$, то $u(x,t) \geqslant 0$ в Ω.*

Задача 6. Пусть L — параболический в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T)$ оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими (6.1). Предположим, кроме того, $c(x,t) \geqslant 0$ и

$$u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$, и

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0.$$

Доказать, что из условия

$$u(x,0) \geqslant M > 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - M.$$

Поскольку $c(x,t) \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) - Mc(x,t) \leqslant 0.$$

Кроме того,

$$v(x,t) \geqslant -M - B\exp\left[\beta|x|^2\right] \geqslant -(M+B)\exp\left[\beta|x|^2\right], \quad v(x,0) \geqslant 0.$$

Следовательно, из теоремы 5, примененный к функции $v(x,t)$ мы получим, что

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

[1] Здесь мы снова сталкиваемся с необходимостью рассматривать решения в классе растущих функций А. Н. Тихонова

Задача 7. [11] Пусть L — это параболический оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими условиям (6.1). Пусть, кроме того,

$$c(x,t) \geqslant \alpha|x|^2 + \gamma, \quad \alpha > 0, \tag{6.3}$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию роста

$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$. Предположим, что

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,0) \geqslant M_1 > 0.$$

Доказать, что выполнено неравенство

$$u(x,t) \geqslant M_1 \exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right], \quad \lambda > 0.$$

Решение. Рассмотрим [1)] следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - M_1 \exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right].$$

Справедливы следующие вычисления:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = 2\lambda x_i t \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = \left(\lambda|x|^2 + \nu\right)\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = \left(2\lambda t\delta_{ij} + 4\lambda^2 t^2 x_i x_j\right)\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right).$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} Lv(x,t) = Lu(x,t) - M_1 L\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) \leqslant \\ \leqslant -M_1\Biggl(4\lambda^2 t^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} + 2\lambda t\sum_{i=1}^{N} a_{ii} + \\ + 2\lambda t\sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c - (\lambda|x|^2 + \nu)\Biggr)\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right). \end{aligned}$$

[1)] Переводчиками в этом месте в книге [11] допущена опечатка в выборе вспомогательной функции.

Заметим, что в силу равномерной параболичности оператора L вытекают неравенства

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} \geqslant \vartheta |x|^2, \quad a_{ii} \geqslant \vartheta.$$

Кроме того, в силу условий (6.1) и (6.3) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$Lv(x,t) \leqslant -M_1 \biggl(4\lambda^2 t^2 \vartheta |x|^2 + 2\lambda t N \vartheta - \\ - 2\lambda t M |x|(1+|x|) + (\alpha - \lambda)|x|^2 + \gamma - \nu \biggr) \leqslant 0.$$

при достаточно большом $\alpha > \lambda$ и при $\gamma > \nu$. Теперь заметим, что

$$v(x,t) \geqslant -B \exp\left(\beta |x|^2\right) - M_1 \exp\left(\lambda |x|^2 T + \nu T\right) \geqslant \\ \geqslant -B_1(T) \exp\left(\beta_1(T)|x|^2\right)$$

при некоторых $B_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Кроме того,

$$v(x,0) \geqslant 0.$$

В силу теоремы 5 мы приходим к утверждению задачи.

Задача 8. [11] Пусть L — это параболический в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ оператор с непрерывными коэффициентами и для некоторой постоянной $M > 0$ выполнены неравенства

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(|x|^2 + 1), \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(|x| + 1), \quad c(x,t) \leqslant M. \tag{6.4}$$

Доказать, что если

$$u(x,t) \geqslant -m(|x|^q + 1) \quad \text{при} \quad \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T] \tag{6.5}$$

для некоторых положительных постоянных A и q, то из условия

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{6.6}$$

вытекает неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]. \tag{6.7}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].) Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \frac{2m}{r_0^{2p-q}} (|x|^2 + Kt)^p e^{\alpha t}, \quad 2p > q. \tag{6.8}$$

Выберем постоянные $K > 0$ и $\alpha > 0$ таким образом, чтобы для всех $r_0 > 0$ величина $Lw(x,t)$ была отрицательной. Действительно,

$$a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{4mp}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \left[\frac{2x_i x_j}{|x|^2 + Kt} + \delta_{ij}\right] a_{ij}(x,t),$$

$$b_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{4mp}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} x_i b_i(x,t),$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{2m}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \left[pK + \alpha\left(|x|^2 + Kt\right)\right].$$

Следовательно,

$$Lw(x,t) = \frac{2m}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \Biggl[4p \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|^2 + Kt} + 2p \sum_{i=1}^{N} a_{ii} + \\ + 2p\sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c\left(|x|^2 + Kt\right) - pK - \alpha\left(|x|^2 + Kt\right)\Biggr].$$

Рассмотрим два случая — $|x| \geqslant 1$ и $|x| < 1$. В первом случае с учетом неравенств (6.4) получим следующую оценку:

$$Lw(x,t) \leqslant \frac{2m}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \times \\ \times \left[\left(4pN^2 + 2p(N+1) + 1\right) M - \alpha\right] |x|^2 - \\ - pK + K(M-\alpha)t < 0, \quad (6.9)$$

если

$$\alpha > M\left(4pN^2 + 2p(N+1) + 1\right). \quad (6.10)$$

Во втором случае заметим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant 2M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant 2M, \quad c(x,t) \leqslant M. \quad (6.11)$$

Поэтому при $|x| < 1$ справедлива оценка

$$Lw(x,t) = \frac{2m}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \times \\ \times [16pM + M - pK + (M-\alpha)Kt] < 0 \quad (6.12)$$

при выполнении условия (6.10) на $\alpha > 0$ и условия на $K > 0$

$$16pM + M < pK. \quad (6.13)$$

Таким образом, имеем при выполнении неравенств (6.10) и (6.13)

$$L(w(x,t)+u(x,t))<0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,T]. \tag{6.14}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t)+u(x,t) \tag{6.15}$$

в цилиндре $D_{r_0,T}=\{|x|\leqslant r_0\}\otimes\{0\leqslant t\leqslant T\}$. При $t=0$ имеем

$$v(x,0)=u_0(x)+2mr_0^q\geqslant 0, \tag{6.16}$$

а при $r=r_0$ имеем

$$v(x,t)\geqslant \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(r_0^q+Kt\right)^p e^{\alpha t}-m\left(r_0^q+1\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2mr_0^q-m(r_0^q+1)=m(r_0^q-1)>0 \tag{6.17}$$

при $r_0>1$. Согласно принципу максимума имеем

$$v(x,t)\geqslant 0 \Rightarrow u(x,t)+w(x,t)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in D_{r_0,T}. \tag{6.18}$$

Осталось при фиксированном $(x,t)\in D_{r_0,T}$ перейти к пределу при $r_0\to$ $\to+\infty$ и из явного вида (6.8) функции $w(x,t)$ получить следующее неравенство:

$$u(x,t)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes[0,T].$$

Контрпример к задаче 8. Условия (6.4), налагаемые на коэффициенты оператора L, нельзя ослабить, если ограничиться оценками коэффициентов через степени $|x|$. Действительно, при любом $\delta>0$ функция

$$u(x,t)=\begin{cases}\int\limits_{F_\delta(x,t)}^{+\infty}\exp\{-y^2\}\,dy & \text{для} \quad 0<t\leqslant T,\\ 0 & \text{для} \quad t=0,\end{cases}$$

где

$$F_\delta(x,t)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^\delta}{2\sqrt{t}},$$

является непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^1\otimes[0,T]$, обращается в нуль при $t=0$ и удовлетворяет при $t>0$ уравнению

$$\frac{1}{\delta^2}\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)u_{xx}+$$

$$+\frac{1}{\delta^2}\left(x-\delta\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)u_x-u_t=0.$$

В этом уравнении коэффициент при u_{xx} растет не быстрее, чем $M|x|^{2+2\delta}$, а коэффициент при u_x растет не быстрее, чем $M|x|^{1+2\delta.}$ Следовательно, при таком росте коэффициентов нарушается единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций.

Задача 9. [11] Пусть коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ ограничены в $\Omega=\mathbb{R}^N\otimes[0,T]$:

$$|a_{ij}(x,t)|<M,\quad |b_i(x,t)|<M,\quad |c(x,t)|<M, \tag{6.19}$$

а функция $u(x,t)$ непрерывна в Ω и удовлетворяет в $\Omega_0=\mathbb{R}^N\otimes(0,T]$ неравенствам

$$Lu(x,t)\leqslant 0,\quad u(x,t)\geqslant -\exp\left[\beta(|x|^2+1)\right], \tag{6.20}$$

где $\beta>0$ — некоторая постоянная. Доказать, что

$$u(x,t)\geqslant 0\quad \text{при}\quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes[0,T] \tag{6.21}$$

при условии

$$u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0\quad \text{при}\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{6.22}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].)

Для получения утверждения задачи нужно рассмотреть вспомогательную функцию

$$w(x,t)\overset{def:}{=}\exp\left[2\beta(|x|^2+1)e^{\alpha t}-\beta(r_0^2+1)\right] \tag{6.23}$$

и повторить рассуждения при решении предыдущей задачи и проверить, что при надлежащим образом выбранной постоянной $\alpha>0$ выполнено неравенство

$$Lw(x,t)<0\quad \text{при}\quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,T]. \tag{6.24}$$

Действительно, имеем

$$Lw(x,t)=w(x,t)e^{\alpha t}\Bigg[4\beta\sum_{i=1}^{N}a_{ii}+16\beta^2e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}a_{ij}x_ix_j+$$
$$+4\beta\sum_{i=1}^{N}b_ix_i+ce^{-\alpha t}-2\beta\alpha(|x|^2+1)\Bigg]<0$$

при условии

$$t\leqslant t_0=\frac{1}{\alpha},\quad \alpha=M\left(\frac{1}{\beta}+8N+48\beta N\right).$$

Теперь рассмотрим новую функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t) + u(x,t). \tag{6.25}$$

В цилиндре $D_{r_0,t_0} = \{|x| \leqslant r_0\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ при $t = 0$ имеем

$$v(x,0) = u_0(x) + w(x,0) \geqslant \exp\left[2\beta(|x|^2+1) - \beta(r_0^2+1)\right] \geqslant 0,$$

а при $r = r_0$ имеем

$$v(x,t) = \exp\left[2\beta(r_0^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] + u_0(x) \geqslant$$
$$\geqslant \exp\left[\beta(r_0^2+1)\right] - \exp\left[\beta(r_0^2+1)\right] = 0. \tag{6.26}$$

В силу принципа максимума в цилиндре D_{r_0,t_0} мы получим, что

$$v(x,t) = u(x,t) + w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_{r_0,t_0}.$$

Переходя к пределу при $r_0 \to +\infty$ мы получим, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,t_0].$$

Далее нужно повторить рассуждения последовательно в полосах

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{2}{\alpha}, \quad \frac{2}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{3}{\alpha}, \cdots \frac{n}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{n+1}{\alpha}, \cdots$$

и в результате получим, что утверждение задачи выполнено для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$.

Замечание к задаче 9. Для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

известны более сильные результаты, чем результат задачи 4. В частности, в работе С. Тэклинда [15] доказано, что решение задачи Коши единственно в классе функций, удовлетворяющих условию

$$|u(x,t)| \leqslant \exp\left[\delta|x|h(|x|)\right] \quad \text{при} \quad |x| > 1,$$

где $\delta > 0$ — это произвольная постоянная, $h(r)$ — положительная неубывающая функция и

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = +\infty.$$

Причем в случае сходимости последнего интеграла единственность решения задачи Коши нарушается.

Задача 10. [11] Пусть непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \tag{6.27}$$

причем

$$|u(x,0)| \leqslant M_1, \quad |f(x,t)| \leqslant M_2, \quad c(x,t) \leqslant M_3, \tag{6.28}$$

коэффициенты a_{ij} и b_i подчинены условиям (6.4). Тогда всюду в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ выполнено неравенство

$$|u(x,t)| \leqslant e^{M_3 t} \left(M_1 + M_2 t\right). \tag{6.29}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].)

Для доказательства рассмотрим вспомогательные функции

$$w_\pm(x,t) \stackrel{def:}{=} e^{M_3 t} \left(M_1 + M_2 t\right) \pm u(x,t).$$

По условию задачи имеем

$$w_\pm(x,0) \geqslant 0.$$

Вычислим $Lw_\pm(x,t)$. Имеем

$$Lw_\pm(x,t) = e^{M_3 t} \left[(c - M_3)(M_1 + M_2 t) - M_2\right] \pm f \leqslant -M_2 e^{M_3 t} \pm f \leqslant 0$$

Отметим, что в силу ограниченности в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ решения $u(x,t)$ найдется такая постоянная $m > 0$, что

$$u(x,t) \geqslant -m \Rightarrow u(x,t) \geqslant -m(|x|^q + 1).$$

В силу результата задачи 8 получим

$$w_\pm(x,t) \geqslant 0 \quad \text{всюду в} \quad \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

Вопрос 19. Сформулировать и доказать теорему единственности задачи Коши в классе А. Н. Тихонова.

Ответ. Теорема единственности имеет следующий вид:

Теорема 6. *Пусть L — это параболический оператор с непрерывными в $\mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ коэффициенами и выполняются условия* (6.1). *Тогда существует не более одного решения задачи Коши*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \tag{6.30}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^N, \tag{6.31}$$

удовлетворяющего условию роста А. Н. Тихонова

$$|u(x,t)| \leqslant B \exp\left[\beta |x|^2\right] \tag{6.32}$$

при некоторых положительных константах B и β.

Вопрос 20. Сформулируйте теорему Виддера.

Ответ. Теорема Виддера формулируется следующим образом:

Теорема Виддера. *Любая неотрицательная функция, непрерывная в* $\mathbb{R}^1 \otimes [0, +\infty)$, *равная нулю при* $t = 0$ *и удовлетворяющая уравнению теплопроводности*

$$u_{xx} - u_t = 0 \quad \textit{в} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^1 \otimes [0, +\infty),$$

равна нулю тождественно.

Вопрос 21. Привидите пример неограниченного решения следующей задачи:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{6.33}$$

$$\lim_{t \to +0} u(x, t) = 0 \quad \text{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{6.34}$$

Ответ. Решение этой задачи в классе А. Н. Тихонова имеет следующий явный вид:

$$u(x, t) = \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right]. \tag{6.35}$$

Отметим, что построенное решение является неограниченным в любой окрестности точки $(0, 0)$. Действительно, запишем функцию (6.35) в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{2}{t} \frac{x}{2\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right].$$

Будем стремить точку (x, t) к точке $(0, 0)$ по параболе

$$x = a2\sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \to +0, \quad a > 0,$$

тогда

$$u(x(t), t) = \frac{2}{t} a e^{-a^2} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

§ 7. Теорема типа Жиро

Вопрос 22. Сформулируйте условие строгой сферичности изнутри.

Ответ. Определение имеет следующий вид:

Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — это точка на границе ∂D области D. Если существует такой замкнутый шар B с центром в точке $(\overline{x}, \overline{t})$, что $B \subset \subset \overline{D}$, $B \cap \partial D = \{P_0\}$, и если $\overline{x} \neq x_0$, то мы скажем что P_0 обладает свойством строгой сферичности изнутри.

Замечание 1. Отметим, что если убрать требование $\overline{x} \neq x_0$ в определении 4, то мы получим *свойство сферичности изнутри*.

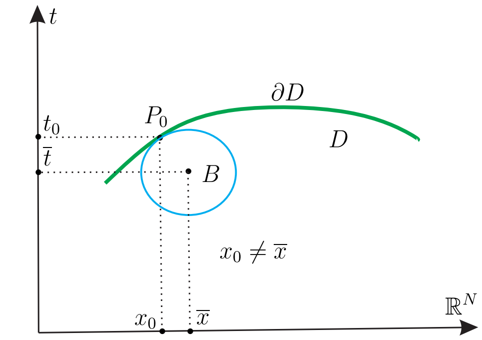

Рис. 12. К определению строгой сферичности.

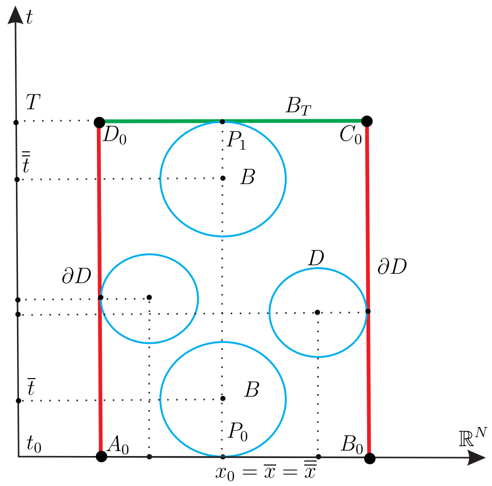

Рис. 13. К вопросу 23.

Вопрос 23. Приведите примеры нарушения и выполнения строгой сферичности изнутри.

Ответ. Смотри рисунок 13.

Вопрос 24. Сформулируйте и докажите теорему типа Жиро.

Ответ. Предположим, что $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и выполнены, стало быть, все условия теоремы 3, причем $u(x,t) \neq const$ в области D. Пусть, кроме того,

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{7.1}$$

Если $u(x,t)$ имеет положительный максимум $M > 0$ в $\overline{D}$, то в силу условия теоремы 3 функция $u(x,t)$ в некоторой точке $P_0 \in \partial' D = S \cup \overline{B}$ (на параболической границе области D) достигает максимума

$$u(P_0) = M \quad \text{в точке} \quad P_0 \in \partial' D. \tag{7.2}$$

При этих условиях справедлива следующая *теорема типа Жиро*:

Теорема типа Жиро. *Если выполняются высказанные выше условия, точка P_0 обладает свойством строгой сферичности изнутри и существует окрестность V точки P_0, такая, что*

$$u(x,t) < M \quad \textit{в} \quad D \cap V, \tag{7.3}$$

то для любого некасательного внутреннего направления l_{P_0} выполнено неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) \stackrel{def}{=} \liminf_{|(x,t)-(x_0,t_0)| \to +0,\ (x,t)\in B} (l_{P_0}, D_{x,t})\, u(x,t) < 0, \tag{7.4}$$

где

$$D_{x,t} = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}, \partial_t).$$

Вопрос 25. Привидите пример нарушения теоремы типа Жиро для угловых точек.

Ответ. Заметим, что если P_0 — это угловая точка границы ∂D, то теорема типа Жиро может оказаться неверной. Например, если определить область D неравенствами

$$x^2 + t^2 < R^2, \quad t < \gamma_1 x, \quad t < \gamma_2 x, \quad \gamma_1 > 0 > \gamma_2,$$

и положить, что

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

$$u(x,t) = (t - \gamma_1 x)(\gamma_2 x - t) + 1,$$

то

$$u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D, \quad u(x,t) = 1 \quad \text{в} \quad P_0,$$

$$Lu(x,t) = -2\gamma_1\gamma_2 + \overline{\overline{o}}(|x| + |t|) > 0,$$

если $R > 0$ достаточно малое. Однако,

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0$$

для любого направления l_{P_0}.

Вопрос 26. Приведите пример нарушения теоремы типа Жиро в случае не строгой сферичности изнутри.

Ответ. Заметим, что условие строгой сферичности изнутри нельзя заменить на условие сферичности изнутри, т.е. условие $x_0 \neq \overline{x}$ существенно. Действительно, рассмотрим область $D = \{(x,t) : x \in \in \mathbb{R}^1,\ t > 0\}$. Пусть

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad u(x,t) = 1 - t^2.$$

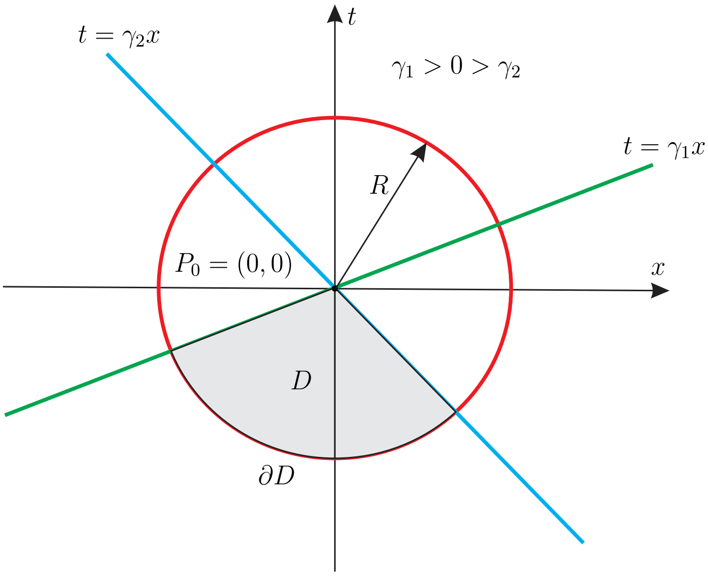

Рис. 14. Область D с угловой точкой $P_0 = (0,0)$.

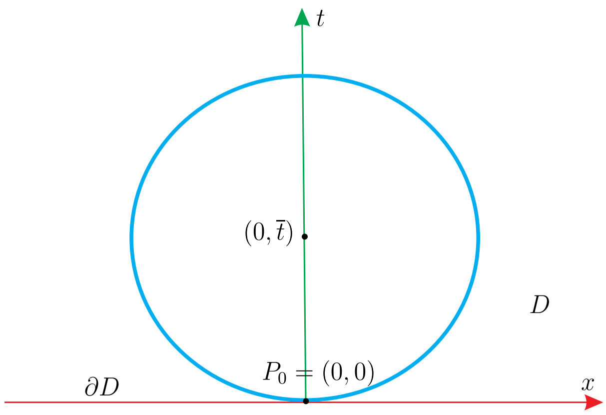

Рис. 15. Область D с условием нестрогой сферичности всей границы ∂D.

Отметим, что для заданной функции $u(x,t)$ имеем

$$Lu(x,t) = 2t > 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u(P_0) = 1, \quad u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D,$$

но при этом

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0$$

для любого направления l_{P_0}.

§ 8. Вторая и третья краевые задачи

Вопрос 27. Сформулируйте и докажите теорему единственности третьей краевой задачи.

Ответ. Теорема имеет следующий вид:

Теорема 7. *Пусть L — параболический оператор с непрерывными в D коэффициентами. Предположим, что $c(x,t) \leqslant 0$, $\beta(x,t) \leqslant 0$ и каждая точка $P \in S$ обладает свойством строгой сферичности изнутри. Тогда существует не более одного решения третьей краевой задачи. Если τ не зависит от t, то предположение $c(x,t) \leqslant 0$ можно опустить.*

Задача 11. Доказать, что можно опустить требование строгой сферичности всех точек боковой границы S, заменив его требованием

$$\beta(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S.$$

Указание. В качестве наводящих соображений отметим, что если не требовать условия строгой сферичности изнутри множества точек боковой границы S, то и нельзя применить теорему Жиро — это означает, что в данном случае можно доказать единственность третьей краевой задачи без теоремы типа Жиро.

Решение. В модификации нуждается только доказательство теоремы единственности третьей краевой задачи на шаге 3. Таким образом, имеем

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в некоторой точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S,$$

причем в силу шага 2 имеем [1])

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. Тогда в этой точке выполнено противоречивые неравенства:

$$0 \geqslant \frac{\partial u}{\partial \tau_{P_0}}(P_0) = -\beta(P_0)u(P_0) > 0.$$

§ 9. Теоремы сравнения — нелинейный случай

Вопрос 28. Сформулируйте и докажите признак сравнения для нелинейной первой краевой задачи.

Ответ. Признак сравнения имеет следующий вид:

---

[1]) Внутри области D не может достигаться положительный относительный максимум в силу принципа максимума, если $u(x,t)$ не постоянная.

Теорема 8. *Пусть* $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *принадлежат классу* $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$. *Пусть, кроме того, функция* $f(x,t,p,p_i)$ *при* $i = \overline{1,N}$ *является непрерывной по всем переменным* (x,t,p,p_i) *в области*

$$E \stackrel{def:}{=} D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N.$$

Если

$$v_t - \Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \text{в} \quad D, \tag{9.1}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \text{в} \quad D, \tag{9.2}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S, \tag{9.3}$$

тогда

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{в} \quad D. \tag{9.4}$$

Задача 12. [11] Пусть

$$\frac{\partial v}{\partial t} > \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + av^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M), \quad a > 0, \tag{9.5}$$

$$v(x,0) > \frac{\mu}{M}, \quad v(0,t) > \frac{\mu}{M}, \quad v(1,t) > \frac{\mu}{N} \tag{9.6}$$

при $(x,t) \in [0,1] \otimes [0,4M]$, а константы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$a\mu > 2M + \frac{1}{4}, \quad a > 0, \quad M > 0, \quad \mu > 0, \tag{9.7}$$

тогда

$$v(1/2,t) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to 4M. \tag{9.8}$$

Решение. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \frac{\mu}{M - tx(1-x)}. \tag{9.9}$$

Заметим, что при условии (9.7) имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leqslant \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M), \quad a > 0, \tag{9.10}$$

причем

$$w(x,0) = \frac{\mu}{M}, \quad w(0,t) = \frac{\mu}{M}, \quad w(1,t) = \frac{\mu}{N}. \tag{9.11}$$

Тогда применяя признак сравнения мы получим, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M). \tag{9.12}$$

Следовательно, при $x = 1/2$ имеем

$$v(1/2, t) > \frac{4\mu}{4M - t}.$$

Задача 13. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{9.13}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{9.14}$$

Прежде всего будем рассматривать только регулярные решения этой задачи Коши, т.е. $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Необходимо, используя признак сравнения решений, получить результат об остывании решения за конечное время.

Решение. Прежде всего предположим, что

$$0 \leqslant u_0(x) \leqslant M, \quad M > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{9.15}$$

Прежде всего, отметим, что $u(x,t) \geqslant 0$. Заметим теперь, что функция $v(x,t) = M + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ является решением следующего дифференциального неравенства:

$$v_t - \Delta v > -|v|^p, \quad v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x). \tag{9.16}$$

Поэтому если в признаке сравнения взять в качестве $w(x,t) = u(x,t)$, то мы получим следующее неравенство:

$$u(x,t) < M + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+.$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ получим искомое неравенство

$$u(x,t) \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{9.17}$$

Итак, $0 \leqslant u(x,t) \leqslant M$. Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{9.18}$$

нетрудно проверить, что решением этой задачи является следующая функция:

$$z(t) = \begin{cases} \left(M^{1-p} - (1-p)t\right)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \in [0, t_0]; \\ 0, & \text{если} \quad t > t_0, \end{cases} \tag{9.19}$$

где

$$t_0 = \frac{M^{1-p}}{1-p}. \tag{9.20}$$

Заметим, что функция

$$v(x,t) = z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{9.21}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{9.22}$$

Действительно, функция $z = z(t)$ удовлетворяет равенству

$$z_t - \Delta z = -z^p \Rightarrow (z+\varepsilon)_t - \Delta(z+\varepsilon) = -z^p > -(z+\varepsilon)^p.$$

Кроме того,

$$v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{9.23}$$

Опять применим признак сравнения, в котором возьмем $w(x,t) = u(x,t)$ и получим неравенство

$$u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{9.24}$$

Итак, мы делаем важный вывод — *каждое решение задачи Коши* (9.13), (9.14) *обращается в нуль всюду в* $\mathbb{R}^N$ *за конечное время* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *при условиях* $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ *и* $u_0(x) \not\equiv 0$, *где время* $t_0 > 0$ *определено явной формулой* (9.20).

Задача 14. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{9.25}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{9.26}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить достаточные условия разрушения решения этой задачи за конечное время.

Решение. Прежде всего заметим, что

$$\Delta u - u_t = -|u|^p \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Согласно теореме 2 (просто нужно вместо $u(x,t)$ рассмотреть $-u(x,t)$) о принципе максимума в неограниченных областях получим, что $u(x,t) \geqslant 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{9.27}$$

Его решение дается следующей явной формулой:

$$z(t) = \left(M^{1-p} - (p-1)t\right)^{-1/(p-1)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_0, \tag{9.28}$$

где
$$t_0 \stackrel{def:}{=} \frac{1}{(p-1)M^{p-1}}. \tag{9.29}$$

Отметим, что функция $z = z(t)$ является монотонно возрастающей, причем
$$\lim_{t\to t_0} z(t) = +\infty.$$

Предположим, что выполнено следующее неравенство:
$$u_0(x) \geqslant M > 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{9.30}$$

Введем следующую функцию:
$$w(x,t) = z(t) - \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, M). \tag{9.31}$$

Эта функция удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству:
$$w_t - \Delta w > w^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{9.32}$$

Действительно,
$$z_t - \Delta z = z^p \Rightarrow (z-\varepsilon)_t - \Delta(z-\varepsilon) = z^p > (z-\varepsilon)^p$$

при $\varepsilon \in (0, M)$. Кроме того,
$$w(x,0) = M - \varepsilon < M \leqslant u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Осталось воспользоваться признаком сравнения, в котором нужно взять $v(x,t) = u(x,t)$ и получить следующее неравенство:
$$u(x,t) > z(t) - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ мы получим искомую оценку снизу
$$u(x,t) \geqslant z(t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{9.33}$$

Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу — *при условии $u_0(x) \geqslant M > 0$ выполнена оценка* (9.33), *из которой вытекает, что для некоторого $0 < t_1 \leqslant t_0$ решение задачи Коши* (9.25), (9.26) *разрушается за конечное время*:
$$\limsup_{t\to t_1} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u(x,t) = +\infty. \tag{9.34}$$

Задача 15. Рассмотрим следующую задачу Коши:
$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{9.35}$$

$$u(x,0)=0 \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{9.36}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t)\in\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+)\cap\mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно показать, что в нелинейном случае единственность решения этой задачи может быть нарушена, даже если решение ищется в классе Тихонова.

Решение. Действительно, как и в предыдущем примере, имеем $u(x,t)\geqslant 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t=z^p \quad \text{при} \quad t>0, \quad z(0)=0. \tag{9.37}$$

Его семейство всех решений (их бесконечно много) может быть представлено в следующем виде:

$$z(t)=(1-p)^{1/(1-p)}\begin{cases}(t-t_0)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t\geqslant t_0;\\ 0, & \text{если} \quad t\in[0,t_0],\end{cases} \tag{9.38}$$

где $t_0\geqslant 0$ — любое неотрицательное число. Ясно, что решения $u(x,t)= = z(t)$ удовлетворяют условиям задачи Коши (9.35) и (9.36).

Задача 16. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t-\Delta u+|u|^p=0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p>1, \tag{9.39}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{9.40}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t)\in\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+)\cap\mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить оценку сверху на скорость убывания решения во времени этой задачи.

Решение. Как и в первом примере, используя более сильный признак сравнения можно доказать, что $u(x,t)\geqslant 0$

Предположим, что $0\leqslant u_0(x)\leqslant M$. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t+z^p=0 \quad \text{при} \quad t>0, \quad z(0)=M>0, \quad p>1. \tag{9.41}$$

Единственное решение дается следующей формулой:

$$z(t)=\bigl(M^{1-p}+(p-1)t\bigr)^{-1/(p-1)}, \quad t\geqslant 0. \tag{9.42}$$

Как и ранее, можно легко показать, что функция

$$v(x,t)\overset{def:}{=}z(t)+\varepsilon, \quad \varepsilon>0 \tag{9.43}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t-\Delta v>-v^p, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{9.44}$$

причем

$$v(x,0) = M + \varepsilon > M \geqslant u_0(x) = u(x,0) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{9.45}$$

Осталось применить признак сравнения, в котором положить $w(x,t) = u(x,t)$, и получить оценку

$$0 \leqslant u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t) = \\ = \frac{1}{\left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{1/(p-1)}} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{9.46}$$

З а д а ч а д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я 2. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u + |\nabla u|^q + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{9.47}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{9.48}$$

при условиях $q > 0$, $p \in (0,1)$, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ и $u(x,t) \geqslant 0$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (9.24)

З а д а ч а д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я 3. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q + |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{9.49}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{9.50}$$

при условиях $q > 0$, $1 < p$, $0 < M \leqslant u_0(x)$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (9.33).

В о п р о с 29. Сформулируйте и докажите признак сравнения для нелинейной второй и третьей краевой задачи.

О т в е т. Признак сравнения имеет следующий вид:

Т е о р е м а 9. *Пусть все предположения теоремы 8 остаются без изменения. Если*

$$v_t - \Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \textit{в} \quad D, \tag{9.51}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \textit{в} \quad D \tag{9.52}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{на} \quad \overline{B}, \tag{9.53}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x,t,v(x,t)) < \frac{\partial w(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x,t,w(x,t)) \quad \textit{на} \quad S, \tag{9.54}$$

где $\beta = \beta(x,t,p)$ — это любая функция определенная на множестве $S \otimes \mathbb{R}^1$, $\tau = \tau(x,t)$ — направленное внутрь $D_t \cup B_t$ непрерывное векторное поле. Тогда

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{9.55}$$

Задача 17. [13] Рассмотрим следующую задачу с *нелинейными граничными условиями*:

$$u_t = \Delta u \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{9.56}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_x} = u^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T], \quad p > 1, \tag{9.57}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{9.58}$$

где n_x — это вектор внешней нормали к ляпуновской границе $\partial\Omega \in A^{1,h}$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Нужно доказать, что всякое нетривиальное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}_t((0,T];\mathbb{C}^{(2)}_x(\overline{\Omega})) \cap \mathbb{C}^{0,1}_{x,t}(\overline{\Omega} \otimes [0,T])$ разрушается за конечное время.

Решение.

Шаг 1. Прежде всего докажем, что

$$\inf_{x\in\Omega} u(x,\varepsilon) = c > 0 \quad \text{для достаточно малого} \quad \varepsilon > 0. \tag{9.59}$$

□ Действительно, в силу признака сравнения имеем

$$u(x,t) \geqslant 0,$$

поскольку $v(x,t) = 0$ удовлетворяет уравнению (9.56), граничному условию (9.57) и $u_0(x) \geqslant 0 = v(x,0)$. Теперь заметим, что если

$$u(x_0,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \Omega,$$

то в силу слабого принципа максимума имеем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \otimes [0,\varepsilon],$$

а, стало быть, $u_0(x) = 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Это противоречит тому, что $u_0(x) \not\equiv 0$. Кроме того, если $u(x,t) \not\equiv 0$ при $(x,t) \in \Omega \otimes [0,\varepsilon]$ и

$$u(x_0,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \partial\Omega,$$

то в этой точке минимума в силу граничного условия (9.57) получим

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x_0,\varepsilon) = 0,$$

что противоречит теореме типа Жиро. ⊠

Шаг 2. Меняя если необходимо $t = 0$ на $t = \varepsilon > 0$ без ограничения общности можем сразу же считать, что

$$\inf_{x\in\Omega} u_0(x) = c > 0. \tag{9.60}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\varphi_t = \Delta\varphi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{9.61}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n_x} = \varphi^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T), \tag{9.62}$$

$$\varphi(x,0) = c > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{9.63}$$

В силу признака сравнения с функцией $v(x,t) = c$, которая удовлетворяет системе уравнений

$$v_t = \Delta v \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial n_x} \leqslant v^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$v(x,0) = c > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega},$$

мы получим неравенство $\varphi(x,t) \leqslant c$ для всех $t > 0$ и, используя опять признак сравнения, получим неравенство

$$u(x,t) \geqslant \varphi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,T]. \tag{9.64}$$

Шаг 3. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(x,t) \overset{def:}{=} \varphi(x,t+\eta) - \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad \eta > 0. \tag{9.65}$$

Эта функция удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\psi_t = \Delta\psi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T-\eta], \tag{9.66}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial n_x} = p\left(\frac{\partial\varphi(x,t+\eta)}{\partial n_x} - \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n_x}\right) &= \\ = (\varphi^p(x,t+\eta) - \varphi^p(x,t)) &= \\ = p\xi^{p-1}(x,t)\psi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T-\eta], \end{aligned} \tag{9.67}$$

где $\xi(x,t) \in [\varphi(x,t), \varphi(x,t+\eta)]$,

$$\psi(x,0) = \varphi(x,\eta) - c \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{9.68}$$

Используя признак сравнения мы получим, что

$$\begin{aligned} \psi(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,T-\eta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \end{aligned} \tag{9.69}$$

Шаг 4. Отметим, что в классе $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}_t^{(1)}((0,T];\mathbb{C}_x^{(2)}(\overline{\Omega})) \cap \cap\, \mathbb{C}_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega}\otimes[0,T])$ функция

$$z(x,t) \stackrel{def:}{=} \varphi_t(x,t)$$

удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$z_t = \Delta z \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega\otimes(0,T),$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}(x,t)z(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t)\in\partial\Omega\otimes(0,T), \tag{9.70}$$

$$z(x,0) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\in\overline{\Omega}.$$

Аналогично доказательству свойства (9.59) мы получим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\inf_{x\in\Omega} z(x,\varepsilon) = \inf_{x\in\Omega}\varphi_t(x,\varepsilon) > 0. \tag{9.71}$$

Шаг 5. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \varphi_t(x,t) - \delta\varphi^p(x,t). \tag{9.72}$$

Прежде всего имеем цепочку выражений

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w &= \varphi_{tt} - \delta p\varphi^{p-1}\varphi_t - \Delta\varphi_t + \delta\Delta\varphi^p = \\ &= -\delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi + p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D\varphi|^2 + \delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi = \\ &= p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D\varphi|^2 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{9.73}$$

поскольку

$$\varphi_{tt} = \Delta\varphi_t.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial w}{\partial n_x} = \frac{\partial\varphi_t}{\partial n_x} - \delta\frac{\partial\varphi^p}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}\varphi_t - \delta p\varphi^{p-1}\varphi^p = p\varphi^{p-1}w. \tag{9.74}$$

Кроме того, при достаточно малом $\delta > 0$ в силу (9.71) выполнено следующее неравенство:

$$w(x,\varepsilon) = \varphi_t(x,\varepsilon) - \delta\varphi^p(x,\varepsilon) \geqslant 0. \tag{9.75}$$

Используя признак сравнения получим, что

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in\Omega\otimes[\varepsilon,T]. \tag{9.76}$$

Шаг 6. Итак, выполнено неравенство

$$\varphi_t(x,t) \geqslant \delta\varphi^p(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in\Omega\otimes[\varepsilon,T]. \tag{9.77}$$

Решением этого дифференциального неравенства является следующее неравенство:

$$\varphi(x,t) \geqslant (\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon))^{-1/(p-1)} \tag{9.78}$$

для всех $(x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. В силу неравенства (9.64) мы получим, что имеет место неравенство

$$u(x,t) \geqslant (\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon))^{-1/(p-1)} \tag{9.79}$$

для всех $(x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. Это неравенство означает, что $T < +\infty$.

Вопрос 30. Сформулировать признак сравнения для общего параболического нелинейного оператора

$$L(u)(x,t) \stackrel{def}{=} F\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{9.80}$$

в котором функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ определена на множестве $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$, на котором она является непрерывно дифференцируемой функцией от $N^2 + 2N + 2$ переменных. Потребуем, чтобы функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ определяла эллиптический оператор.

Ответ. Справедлива следующая теорема:

Теорема 10. *Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — это решение уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t)$$

в цилиндрической области D [1]*. Предположим, кроме того, функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям*

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{на} \quad \overline{B} = \overline{\Omega}, \tag{9.81}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes (0,T]. \tag{9.82}$$

Пусть $v(x,t)$ и $w(x,t)$ класса $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ удовлетворяют неравенствам

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \leqslant L(v)(x,t) \quad \text{в} \quad D, \tag{9.83}$$

причем оператор L является параболическим в подобласти E области $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} E = \Big\{ & (x,t,p,p_i,p_{ij}) : \\ & p \in \{\vartheta u(x,t) + (1-\vartheta)v(x,t)\} \cup \{\vartheta u(x,t) + (1-\vartheta)w(x,t)\}, \\ & p_i \in \{\vartheta u_{x_i}(x,t) + (1-\vartheta)v_{x_i}(x,t)\} \cup \{\vartheta u_{x_i}(x,t) + (1-\vartheta)w_{x_i}(x,t)\}, \end{aligned}$$

[1] Ограниченной или неограниченной.

$$p_{ij} \in \{\vartheta u_{x_i x_j}(x,t) + (1-\vartheta) v_{x_i x_j}(x,t)\} \cup \{\vartheta u_{x_i x_i}(x,t) + (1-\vartheta) w_{x_i x_j}(x,t)\}, \\ \left.(x,t) \in D,\ i,j = \overline{1,N}\right\}.$$

Если

$$v(x,0) \leqslant u_0(x) \leqslant w(x,0) \quad \textit{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{9.84}$$

$$v(x,t) \leqslant \psi(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \textit{на} \quad S, \tag{9.85}$$

тогда

$$v(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{9.86}$$

З а д а ч а 18. [9] Рассмотрим следующую первую краевую задачу для *уравнения нелинейной диффузии*:

$$u_t = \Delta u^{1+p} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,+\infty), \quad p > 0, \tag{9.87}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{9.88}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes (0,+\infty). \tag{9.89}$$

Рассматривая решения этой задачи с разделенными переменными, с помощью признака сравнения получить оценки решения во времени.

Р е ш е н и е. Прежде всего заметим, что $u(x,t) \geqslant 0$ в силу признака сравнения, в которой нужно взять $v(x,t) = 0$. Будем искать частное решение уравнения (9.87) в виде

$$u_a(x,t) = f_a(x)\varphi_a(t).$$

Подставляя в уравнение (9.87), мы получим равенство

$$\varphi_{at}(t) f_a(x) = \varphi_a^{1+p}(t) \Delta f_a^{1+p}(x) \Rightarrow \frac{\varphi_{at}(t)}{\varphi_a^{1+p}(t)} = \frac{\Delta f_a^{1+p}(x)}{f_a(x)} = \lambda.$$

Нужно рассмотреть два случая: $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

С л у ч а й п е р в ы й: г л о б а л ь н а я р а з р е ш и м о с т ь. Для удобства положим

$$\lambda = -\frac{1}{p}.$$

Откуда получим два уравнения

$$\varphi_{at}(t) + \frac{1}{p}\varphi_a^{1+p}(t) = 0, \quad \Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p} f_a(x) = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{9.90}$$

Функция $\varphi_a(t)$ имеет следующий явный вид:

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{(T+t)^{1/p}}, \tag{9.91}$$

где $T > 0$ — произвольная постоянная. А относительно функции $f_a(x)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла условию

$$f_a(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{9.92}$$

Итак, функция

$$u_a(x,t) \stackrel{def:}{=} \frac{f_a(x)}{(T+t)^{1/p}}, \quad T > 0 \tag{9.93}$$

удовлетворяет уравнению

$$u_{at} = \Delta u_a^{p+1} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0, +\infty), \tag{9.94}$$

и граничным условиям

$$u_a(x,0) = \frac{f_a(x)}{T^{1/p}} \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \quad u_a(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes (0, +\infty). \tag{9.95}$$

Пусть начальное условие $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_a(x)}{T_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_a(x)}{T_2^{1/p}}, \quad T_1 > 0,\ T_2 > 0, \tag{9.96}$$

тогда в силу теоремы 10, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_a(x)}{(T_1+t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_a(x)}{(T_2+t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_a(x)}{(T_1+t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_a(x)}{(T_2+t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0, +\infty). \tag{9.97}$$

Отметим, что существует (см. [9]) не нулевое решение $f_a(x) \not\equiv 0$ краевой задачи

$$\Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p} f_a(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad f_a(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{9.98}$$

Случай второй: разрушение за конечное время. Для удобства положим

$$\lambda = \frac{1}{p}.$$

Рассуждая аналогичным образом, мы получим следующую функцию:

$$u_b(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T-t)^{1/p}}, \quad T > 0 \tag{9.99}$$

— это произвольная постоянная,

$$\Delta f_b^{p+1}(x) - \frac{1}{p} f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{9.100}$$

$$f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{9.101}$$

Нетривиальное решение краевой задачи (9.100), (9.101) существует (см. монографию [16]). Предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_b(x)}{T_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_b(x)}{T_2^{1/p}}, \quad 0 < T_2 < T_1, \tag{9.102}$$

тогда в силу признака сравнения, в котором

$$v(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_1 - t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_2 - t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_b(x)}{(T_1 - t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_b(x)}{(T_2 - t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T_2). \tag{9.103}$$

Отметим, что из неравенства снизу в (9.103) вытекает *разрушение за конечное время* $T_0 \in [0, T_1]$.

Вопросы и задачи к лекции 3

ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА

§ 1. Параболические пространства Гельдера

Вопрос 1. Что такое параболическое расстояние? Чем отличается от эвклидова расстояния?

Ответ. Параболическое расстояние

$$\rho(z_1, z_2) = \left(|x_1 - x_2| + |t_2 - t_1|^{1/2}\right).$$

Вопрос 2. Определите величины $[u]_{\delta/2,\delta;D}$ и $|u|_{\delta/2,\delta;D}$.

Ответ.

$$[u]_{\delta/2,\delta;D} \stackrel{def:}{=} \sup_{z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^\delta(z_1, z_2)}, \tag{1.1}$$

$$|u|_{\delta/2,\delta;D} \stackrel{def:}{=} |u|_{0;D} + [u]_{\delta/2,\delta;D}, \quad |u|_{0;D} = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \tag{1.2}$$

для $\delta \in (0, 1]$.

Вопрос 3. Определите параболическое пространство Гельдера $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$.

Ответ. Через $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ мы обозначаем пространство всех функций $u(x,t)$, для которых конечна *норма* $|u|_{\delta/2,\delta;D} < +\infty$.

Вопрос 4. Определите параболическое пространство Гельдера $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$

Ответ. Определим как множество всех вещественнозначных функций $u(x,t)$, заданных в D и таких, что

$$|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \stackrel{def:}{=} |u|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;D} + [u]_{1+\delta/2;2+\delta;D} < +\infty, \tag{1.3}$$

где

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta;D} \stackrel{def:}{=} [u_t]_{\delta/2,\delta;D} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [u_{x_i x_j}]_{\delta/2,\delta;D}. \tag{1.4}$$

Вопрос 5. Докажите, что пространства $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ являются банаховыми относительно норм (1.2) и (1.3).

Указание. Смотрите конспект лекций.

Вопрос 6. Докажите, что пространства $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ для «хороших» областей совпадают с $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(\overline{D})$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{D})$, соответственно.

Указание. Смотрите конспект лекций.

Задача 1. Докажите неравенства

$$[uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D}, \tag{1.5}$$

$$|uv|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{\delta/2,\delta;D}|v|_{\delta/2,\delta;D} \tag{1.6}$$

для всех $u, v \in \mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$.

Решение. Действительно, прежде всего справедливо следующее элементарное неравенство:

$$|u(z_1)v(z_1) - u(z_2)v(z_2)| \leqslant |u(z_1)||v(z_1) - v(z_2)| + |v(z_2)||u(z_1) - u(z_2)|,$$

из которого разделив обе части на $\rho^\delta(z_1, z_2)$ мы получим следующее неравенство:

$$[uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D}. \tag{1.7}$$

Теперь заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}|uv|_{\delta/2,\delta;D} = |uv|_{0;D} + [uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \\ \leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \\ \leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D} + [u]_{\delta/2,\delta;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} = \\ = |u|_{\delta/2,\delta;D}|v|_{\delta/2,\delta;D}. \quad \boxtimes\end{aligned} \tag{1.8}$$

Задача 2. Докажите утверждение

Лемма 1. *Для всякой функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ и для всех $a_{ij}(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ найдется такая постоянная $M > 0$, не зависящая от u, что имеет место следующее неравенство*:

$$|Lu|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant M|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}, \tag{1.9}$$

$$Lu(x,t) \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

где $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — это ограниченная область.

Указание. Смотрите конспект лекций.

§ 2. Оценки Бернштейна

Вопрос 7. Докажите утверждение

Теорема 1. *Пусть* $R > 0$ *и* $Q_R = B_R \otimes (-R^2, 0)$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$. *Предположим, что функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_R)$ *и бесконечное число раз дифференцируема в* Q_R *и удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \textit{в} \quad Q_R.$$

Тогда при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ *и целом* $n \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$|D_t^n D_x^\alpha u(0)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_R}. \tag{2.1}$$

Указание. Смотри конспект лекций.

Задача 3. Докажите теорему типа Лиувилля.

Теорема типа Лиувилля. *Решение* $u = u(x,t) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\mathbb{R}^{N+1})$ *уравнения*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^{N+1},$$

удовлетворяющая условию $|u(x,t)| \leqslant M_1$ $(M_1 > 0)$, *является постоянной*

$$u(x,t) = const.$$

Указание. Смотри конспект лекций.

§ 3. Решение первой краевой задачи

Задача 4. Методом продолжения по параметру с использованием априорной оценки Шаудера доказать существование единственного решения в классе $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ первой краевой задачи в ограниченной области D.

Указание. Смотри конспект лекций.

Список литературы

1. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Лекции по математической физике. М.: Издательство МГУ; Наука, 2004.— 416 с.
2. *Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О. и др.* Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под редакцией А. С. Шамаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005, 158 с.
3. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа//УМН, 17:3(105), 1962, 3–146 с.
4. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998, 178 с.
5. *Кудряшов Н. А.* Методы нелинейной математической физики. Издательский дом «Интеллект», 2010.— 368 с.
6. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с.
7. *Нефедов Н. Н.* Дополнительные главы к курсу Методы математической физики. "Нелинейные эллиптические уравнения. Метод дифференциальных неравенств.". Москва: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
8. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. I часть. Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. — 252 с.
9. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987, 480 с.
10. *Тихонов А. Н.* Теорема единственности для уравнения теплопроводности// Мат. сборник.— 1935.— т. 42, №2. — с. 189–216.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968, 428 с.
12. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003, 562 с. — (Университетская серия; Т. 7).
13. *Hu Bei* Blow-up theories for semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics, 2018. Springer, Heidelberg, 2011. 125 pp.
14. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967, 261 pp.
15. *Täcklind S.* Sur les classes quasianalytiques des solutions des equations aux derivees partielles du type parabolique, Nord Acta Regial Soc. Sci. Uppsaliensis (4), №10 (1936).
16. *Vazquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, 624 pp.