МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов

Конспект лекций по курсу «Параболические уравнения» для студентов кафедры математики

Москва
Физический факультет МГУ
2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Данный конспект лекций является компиляцией из книг, указанных в списке литературы (большой частью из книг А. Фридмана [11], Л. К. Эванса [12], Н. В. Крылова [4] и немного из книг О. А. Олейник и А. М. Ильина и А. С. Калашникова [8], [3] и Е. М. Ландиса [6]) и адаптированных к восприятию студентов 4–го курса кафедры математики физического факультета МГУ. В связи с отсутствием необходимых сведений из курса функционального анализа, читаемых в восьмом семестре 4 курса, в конспекте отсутствует рассмотрение слабых решений параболических уравнений. Однако, этот пробел будет ликвидирован в девятом семестре 5 курса, где будут рассмотрены слабые решения нелинейных уравнений в частных производных, когда понятие слабого решения является более необходимым, чем в линейном случае.

Сначала мы детально изучаем уравнение теплопроводности во всем пространстве $\mathbb{R}^N$. Строим решение задачи Коши, доказываем слабый принцип максимума и доказываем результат о единственности решения задачи Коши в классе А. Н. Тихонова. Далее рассматривается слабый и сильный принцип максимума в случае общего параболического оператора с некоторыми следствиями и доказательство единственности решения задачи Коши в классе Тихонова. На основе параболических пространств Гельдера и так называемых оценок Шаудера, вывод некоторых согласно методу Сафонова приводится, методом продолжения по параметру доказана теорема об однозначной разрешимости первой краевой задачи для общего равномерно параболического оператора второго порядка с гельдеровскими коэффициентами и гельдеровской правой частью. В дальнейшем основное внимание в конспекте лекций уделено вопросам построения фундаментальных решений параболических операторов второго порядка на основе явно заданного параметрикса согласно методу Леви. На основе построенного фундаментального решения в классе Тихонова доказана единственность решения задачи Коши в $\mathbb{R}^N$ и приведен контрпример.

В учебном пособии приведены подробные доказательства задач и упражнений из книг [2], [4], [11] и [14] по ходу работы.

Автор конспекта лекций хочет выразить признательность профессору Н. Н. Нефедову за предложение читать данный спецкурс.

Книга набрана и сверстана в пакете LaTeX2e.

Тематическая лекция 1

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В этой лекции мы рассмотрим уравнение теплопроводности. Докажем слабый принцип максимума, рассмотрим задачу Коши и введем класс А. Н. Тихонова, в котором имеет место единственность решения задачи Коши.

§ 1. Уравнение теплопроводности

Как известно из курса ММФ к параболическим уравнениям относится уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{1.1}$$

в котором $u(x,t) \geqslant 0$ — это температура в точке x и в момент времени $t > 0$. Для исследования уравнения теплопроводности (1.1) необходимо построить так называемое *фундаментальное решение,* которое в терминах *обобщенных функций* определяется как решение следующего уравнения в пространстве $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N)$:

$$\mathcal{E}_t - \Delta\mathcal{E} = \delta(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

где $\delta(x,t)$ — это дельта–функция Дирака, а равенство в уравнении (1.2) не является поточечным равенством и его точный смысл будет нам в дальнейшем понятен из курса «Функциональный анализ», который мы только начали изучать. Решение уравнения (1.2) может быть получено при помощи так называемого преобразования Фурье и оно имеет следующий явный вид:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \tag{1.3}$$

где $\vartheta(t)$ — это функция Хевисайда, имеющая следующий явный вид:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \geqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Однако, построить фундаментальное решение можно используя симметрию уравнения (1.1) относительно преобразования

$$(x,t) \to (\lambda x, \lambda^2 t).$$

Итак, будем искать *частное решение* уравнения теплопроводности (1.1) в следующем автомодельном виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\,(y)\,, \quad y = \frac{x}{t^\beta}. \tag{1.4}$$

После подстановки этого выражения в уравнение (1.1) мы получим следующее уравнение:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} (y, D_y) v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0, \tag{1.5}$$

где $D_y = (\partial_{y_1}, ..., \partial_{y_N})$. Положим в этом уравнении $\beta = 1/2$, тогда получим

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2}(y, D_y) v(y) + \Delta v(y) = 0. \tag{1.6}$$

Упростим это уравнение предположив, что функция $v(y)$ радиальна, т. е.

$$v = w(|y|) \Rightarrow \alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{N-1}{r} w' = 0, \quad r = |y|. \tag{1.7}$$

Положив в этом уравнении $\alpha = N/2$, получим более простое уравнение

$$(r^{N-1} w')' + \frac{1}{2}(r^N w)' = 0. \tag{1.8}$$

Таким образом,

$$r^{N-1} w' + \frac{1}{2} r^N w = a,$$

где a — константа. Положим $a = 0$, тогда

$$w' = -\frac{1}{2} r w \Rightarrow w(r) = b e^{-r^2/4} \Rightarrow u(x,t) = \frac{b}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Константу $b > 0$ выберем так, чтобы имело место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{b}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}}.$$

Итак, с учетом того, что $t \geqslant 0$ мы приходим к фундаментальному решению (1.3).

§ 2. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty), \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Докажем, что при некоторых условиях на начальную функцию $u_0(x)$ решение задачи (2.1), (2.2) дается следующей формулой:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy. \tag{2.3}$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 1. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^N)$ *и* $u(x,t)$ *определено формулой* (2.3). *Тогда*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)),$$

$u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (2.1) *и выполнено предельное свойство*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0),\ x\in\mathbb{R}^N, t>0} u(x,t) = u_0(x_0) \quad \textit{для любой точки} \quad x_0 \in \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку функция

$$\frac{1}{t^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$$

бесконечное число раз дифференцируема и интегралы от производных в (2.3) равномерно сходятся на любом множестве $\Omega \otimes [\delta,+\infty) \subset \subset \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)$ для любого $\delta > 0$ и для любого замкнутого, ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, имеем $u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$.

Шаг 2. Кроме того,

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} [\mathcal{E}_t(x-y,t) - \Delta_x \mathcal{E}(x-y,t)]\, u_0(y)\,dy = 0 \tag{2.5}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$.

Шаг 3. Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |y - x_0| < \delta, \quad y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.6}$$

Если $|x - x_0| < \delta/2$, то поскольку имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-|y|^2/(4t)\right)\,dy = 1,$$

то справедлива следующая цепочка выражений:

$$|u(x,t)-u_0(x_0)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t)[u_0(y)-u_0(x_0)]\,dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)|u_0(y)-u_0(x_0)|\,dy +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)|u_0(y)-u_0(x_0)|\,dy = I_1 + I_2. \quad (2.7)$$

Прежде всего справедливы неравенства

$$I_1 \leqslant \varepsilon \int\limits_{B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t) \leqslant \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t) = \varepsilon. \quad (2.8)$$

Кроме того, если

$$|x-x_0| \leqslant \delta/2,\ |y-x_0| \geqslant \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |y-x_0| \leqslant |y-x| + |x-x_0| \leqslant |y-x| + \delta/2 \leqslant |y-x| + \frac{1}{2}|y-x_0| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}|y-x_0| \leqslant |y-x|.$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$I_2 \leqslant 2 \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_1}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_1}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} \exp\left(-\frac{|y-x_0|^2}{16t}\right) dy =$$
$$= \frac{c_2}{t^{N/2}} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{16t}\right) r^{N-1}\,dr = c_2 \int\limits_{\delta/\sqrt{t}}^{+\infty} \exp(-z^2/16) z^{N-1}\,dz \to +0$$

при $t \to +0$. [1]) Таким образом, если

$$|x-x_0| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad t>0 \quad \text{достаточно мало,}$$

---

[1]) Здесь мы сделали замену переменных $z = y - x_0$ и перешли к сферической системе координат.

то

$$|u(x,t) - u_0(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Нелинейное уравнение Бюргерса [5]. Существует важная связь между уравнением теплопроводности

$$u_t = \mu u_{xx}, \quad t > 0, \quad \mu > 0, \quad u(x,t) \geqslant 0 \tag{2.9}$$

и уравнением Бюргерса

$$v_t + v v_x = \mu v_{xx}, \tag{2.10}$$

устанавливаемая следующей заменой *Коула–Хопфа*

$$v(x,t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln u(x,t). \tag{2.11}$$

Действительно, учитывая замену (2.11), получим

$$v_t + v v_x - \mu v_{xx} = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{u} (u_t - \mu u_{xx}) \right] = 0 \tag{2.12}$$

в силу уравнения (2.9). Преобразование Коула–Хопфа позволяет найти решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Действительно, пусть в начальный момент времени

$$v(x,0) = \varphi(x), \tag{2.13}$$

тогда из (2.11) получаем

$$u(x,0) = \Psi(x) = \exp\left[-\frac{1}{2\mu} \int\limits_0^x \varphi(y)\, dy \right]. \tag{2.14}$$

Решение задачи Коши (2.9), (2.14) как мы уже показали ниже дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z) \exp\left[-\frac{(x-z)^2}{4\mu t} \right] dz. \tag{2.15}$$

Используя (2.15), получаем решение задачи Коши (2.10), (2.13) для уравнения Бюргерса в следующем виде:

$$v(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-z}{t} \exp\left\{ -\frac{G(z,x,t)}{2\mu} \right\} dz \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{G(z,x,t)}{2\mu} \right\} dz, \tag{2.16}$$

где

$$G(z,x,t) = \frac{(x-z)^2}{2t} + \int\limits_0^z \varphi(y)\, dy. \tag{2.17}$$

§ 3. Неоднородная задача Коши

Теперь мы рассмотрим следующую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.2}$$

Решение неоднородной задачи Коши (3.1), (3.2) будем искать в виде *интеграла Дюамеля*:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t-s) f(y,s)\,dy\,ds =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\,dy\,ds \tag{3.3}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть* $u(x,t)$ *определена формулой* (3.3) *и функция* $f(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)) \cap \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$. *Тогда* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$, $u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (3.1) *и*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0),\; x\in\mathbb{R}^N,\; t>0} u(x,t) = 0 \quad \text{для каждой точки} \quad x_0 \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего сделаем замену переменных в выражении (3.3):

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) f(x-y,t-s)\,dy\,ds. \tag{3.5}$$

Поскольку $f(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$ и финитна, а функция $\mathcal{E} = \mathcal{E}(y,s)$ гладкая в окрестности $s = t > 0$, получаем

$$u_t(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) f_t(x-y,t-s)\,dy\,ds + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x-y,t-s)\,dy\,ds \quad \text{при} \quad i,j = \overline{1,N}.$$

Таким образом, u, u_t, $D_x u$ и $D^2_x u$ [1] принадлежат $\mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$.

---

[1] Символами $D_x u$ и $D^2_x u$ мы обозначили любую частную производную первого порядка и любую частную производную второго порядка соответственно.

Шаг 2. Итак, вычисляем

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \\
&\qquad = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(x-y,t-s) \right] dy\,ds + \\
&\qquad\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy = \\
&\qquad = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dy\,ds + \\
&\qquad\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy = \\
&\qquad = \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dy\,ds + \\
&\qquad + \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dy\,ds + \\
&\qquad\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy = I_1 + I_2 + J, \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

где мы воспользовались интегрированием по частям. Прежде всего имеем

$$
|I_2| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,+\infty)} \left[|f_t(x,t)| + |\Delta_x f(x,t)| \right] \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\,dy\,ds \leqslant c_1\varepsilon. \tag{3.7}
$$

Интегрируя по частям, получим

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dy\,ds = \\
&= \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \mathcal{E}(y,s) \right] dy\,ds + \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy =
\end{aligned}
$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - J, \quad (3.8)$$

поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right)\mathcal{E}(y,s) = 0, \quad s>0, \quad y\in\mathbb{R}^N.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy \to f(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to+0.$$

Заметим, что с учетом выражения (3.8) из (3.6) мы видим что интеграл J сокращается.

Следовательно, мы доказали, что функция $u(x,t)$, определенная формулой (3.3), удовлетворяет уравнению (3.1).

Шаг 3. Наконец, имеем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,+\infty)} |f(x,t)| \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\,dy\,ds = \\ = c_1 t \to +0 \quad \text{при} \quad t\to+0.$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

З а м е ч а н и е 1. Комбинируя результаты этих двух теорем, мы получим, что при указанных условиях на $u_0(x)$ и $f(x,t)$ решение неоднородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,+\infty), \quad (3.9)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^N \quad (3.10)$$

дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy + \\ + \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\,dy\,ds. \quad (3.11)$$

§ 4. Слабый принцип максимума для уравнения теплопроводности

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — это открытое ограниченное множество. Тогда положим

$$D = U \otimes (0, T), \quad \partial' D = \overline{B} \cup S, \quad S = \partial U \otimes (0, T],$$

$$B_T = U \otimes \{t = T\}, \quad B = U \otimes \{t = 0\}.$$

Мы в дальнейшем будем использовать следующую терминологию.

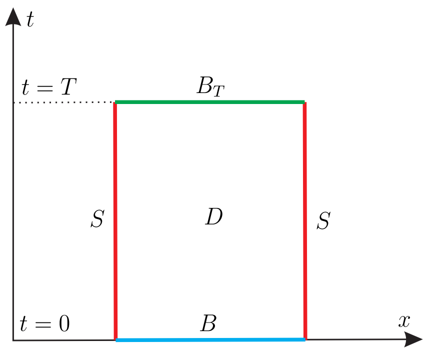


Рис. 1. Область D и множества S, B и B_T.

Множество B_T называется *верхней крышкой*, замкнутое множество $\overline{B}$ называется *нижней крышкой*, а множество S называется *боковой поверхностью* цилиндрической области D. Полная граница ∂D открытого множества D имеет вид

$$\partial D = \overline{B} \cup S \cup B_T,$$

но в дальнейшем (в принципе максимума) важную роль играет только часть $\partial' D \subset \partial D$, имеющая вид

$$\partial' D = \overline{B} \cup S,$$

называемая *параболической границей*. Также введем обозначение

$$\overline{\partial' D} = \overline{B} \cup \overline{S}.$$

Замечание 2. Необходимость в рассмотрении $\overline{\partial' D}$ связано с тем, что боковая граница S не замкнута — она не содержит множество $\{(x, t) \in \partial B \otimes \{t = 0\}\}$. Однако, это множество содержит $\overline{B}$. Поэтому как множество точек $\partial D = \overline{\partial' D}$. Тем не менее мы используем это обозначение в связи со следующим примером: например,

$$g(x, t) = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B}, \quad g(x, t) = 1 \quad \text{на} \quad S.$$

Очевидно,

$$\max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} g(x,t) = \sup_{(x,t)\in\partial' D} g(x,t) = 1 =$$
$$= \sup_{(x,t)\in S} g(x,t) = \max_{(x,t)\in\overline{S}} g(x,t) \neq \max_{(x,t)\in\overline{B}} g(x,t) = 0.$$

Понятно, что в том случае если выполняется условие согласование граничных условий разницы нет.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *— решение уравнения теплопроводности*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{4.1}$$

тогда

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t), \tag{4.2}$$

$$\min_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = \min_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t), \tag{4.3}$$

Доказательство.

Прежде всего докажем, что *если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *такое решение уравнения теплопроводности, что*

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial' D, \tag{4.4}$$

то отсюда следует, что

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.5}$$

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}. \tag{4.6}$$

Пусть z_γ — это точка в $\overline{D}$, в которой $v(x,t)$ принимает максимальное значение. Прежде всего заметим, что в силу ограниченности решения $u(x,t)$ в D

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to B_T = \{x \in U,\ t = T\}.$$

Поэтому z_γ не может принадлежать верхней крышке B_T, т. е.

$$z_\gamma \in D \cup \partial' D.$$

Шаг 2. Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D, т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D.

□ Действительно, в противном случае имеем

$$\Delta v(z_\gamma) \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Поэтому в точке z_γ выполнена следующая цепочка неравенств:

$$0 = \Delta u(x,t) - u_t = \Delta v(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} < 0. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Полученное противоречие доказывает, что либо $v(z_\gamma) < 0$ в D либо $z_\gamma \in \partial' D$ и тогда в силу (4.4) имеем $v(z_\gamma) \leqslant 0$. Итак, в любом случае имеем

$$v(x,t) \leqslant v(z_\gamma) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Поскольку $u(x,t)$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D$ устремим $\gamma \to +0$ и получим неравенство

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Шаг 4. Теперь докажем равенство (4.2). Действительно, пусть

$$M \stackrel{def:}{=} \max_{(x,t)\in \overline{\partial' D}} u(x,t), \quad v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - M.$$

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет тоже уравнению теплопроводности

$$\Delta v - v_t = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \quad \text{и} \quad v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Следовательно, по доказанному имеем

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \Rightarrow \\ \Rightarrow \max_{(x,t)\in \overline{D}} u(x,t) = M = \max_{(x,t)\in \overline{\partial' D}} u(x,t).$$

Шаг 5. Теперь докажем равенство (4.3). Определим следующую величину:

$$m \stackrel{def:}{=} \min_{(x,t)\in \overline{\partial' D}} u(x,t).$$

Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - m \Rightarrow v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D.$$

Итак, функция $-v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(-v(x,t)) - (-v(x,t))_t = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

$$-v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D.$$

Следовательно, по–доказанному имеем

$$-v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Итак,

$$u(x,t) \geqslant m \quad \text{в} \quad D.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Отметим, что решение $u(x,t) \neq const$ уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u$$

может достигать минимального и максимального значения во внутренних точках области D. Действительно, рассмотрим следующий пример:

Пример. [8] Рассмотрим область $D = \{|x| < 1\} \otimes (0,T)$, в которой рассматривается уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \tag{4.7}$$

Пусть $t_0 \in (0,T)$, $x_0 = 2$ и введем следующую функцию:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \otimes [0,t_0]; \\ \mathcal{E}(x,t;x_0,t_0), & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \otimes (t_0,T], \end{cases} \tag{4.8}$$

где

$$\mathcal{E}(x,t;x_0,t_0) \stackrel{def:}{=} \frac{\vartheta(t-t_0)}{\sqrt{4\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}\right\}, \quad x_0 = 2.$$

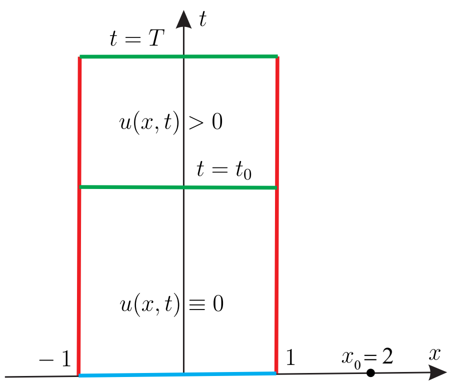


Рис. 2. К примеру.

Ясно, что такая функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (4.8), поскольку сшивка при $t = t_0$ является бесконечное число раз гладкой, так как $x_0 = 2$. Минимальным значением функции $u(x,t)$ является 0 и это минимальное значение достигается внутри области D. Заметим, однако, что тем не менее при $t \leqslant t_0$ функция $u(x,t) = 0$. И этот результат может быть получен в общем виде и носит название *сильного принципа максимума.*

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что этот пример не означает, что нарушена единственность, поскольку при задании граничных условиях при $x = -1$ и $x = 1$ мы получим корректную задачу, единственным решением будет указанная функция (4.8).

З а м е ч а н и е 5. Заметим, что в случае *эллиптического* оператора минимальное и максимальное значения решение $u(x) \not\equiv const$ уравнения Лапласа

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{в} \quad D$$

не может достигаться внутри области D. В этом серьезное отличие эллиптического случая от параболического.

З а м е ч а н и е 6. Фактически, используя методику доказательства на шагах 1–3 может быть доказано следующее первое утверждение: *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u - u_t \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad D, \tag{4.9}$$

$$u \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial' D, \tag{4.10}$$

то $u \leqslant 0$ *в* D. Применением этого утверждения к функции $-u(x,t)$, получим также следующее второе утверждение: *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u - u_t \leqslant 0 \quad \textit{в} \quad D, \tag{4.11}$$

$$u \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial' D, \tag{4.12}$$

то $u \geqslant 0$ *в* D.

Прежде, чем рассматривать ниже следующие задачи, применения принципа максимума, мы предлагаем следующий рисунок цилиндрической области $D = (a,b) \otimes (0,t_0)$, причем

$$S \overset{def:}{=} \{x = a\} \otimes \{0 < t \leqslant t_0\} \cup \{x = b\} \otimes \{0 < t \leqslant t_0\},$$

$$\overline{B} \overset{def:}{=} \{a \leqslant x \leqslant b\} \otimes \{t = 0\},$$

$$B_{t_0} \overset{def:}{=} \{a < x < b\} \otimes \{t = t_0\},$$

причем $\partial D = S \cup \overline{B} \cup B_{t_0}$, а *нормальная граница* или *параболическая граница* $\partial' D = S \cup \overline{B}$. Напомним, что замкнутая область $\overline{B}$ называется *нижней крышкой*, область B_{t_0} называется *верхней крышкой*, а множество S называется *боковой границей*. Множества S, $\overline{B}$ и B_{t_0} попарно непересекаются.

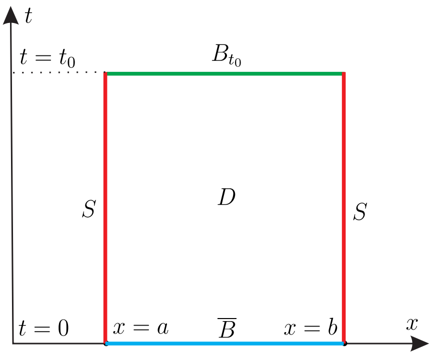


Рис. 3. К задачам.

З а м е ч а н и е 7. Заметим, что множество S не является замкнутым, поскольку множества $\{x = a\} \otimes t = 0 \notin S$, $\{x = b\} \otimes t = 0 \notin S$.

З а д а ч а 1. [2] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ — это решение в $\overline{D} = [0,1] \otimes [0,1]$ задачи

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D},$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0,1),$$

причем выполнены условия согласования $u(0,0) = u(1,0) = 0$. Может ли функция

$$f(t) \stackrel{def:}{=} \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx$$

иметь максимум при $t \in (0,1)$?

Р е ш е н и е. Итак, предположим, что в некоторой точке $t_0 \in (0,1)$ достигается максимум функции $f(t)$. Поскольку $f(t) \geqslant 0$ и решение $u(x,t) \not\equiv 0$, то

$$f(t_0) > 0.$$

Тогда имеет место цепочка выражений

$$f^{'}(t_0) = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_t(x,t_0)\,dx = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_{xx}(x,t_0)\,dx = 0.$$

Интегрируя по частям в последнем равенстве, мы с учетом граничных условий в рассматриваемом классе гладкости получим равенство

$$-\int\limits_0^1 (u_x(x,t_0))^2\,dx = 0 \Rightarrow u_x(x,t_0) = 0 \Rightarrow u(x,t_0) = const \quad \forall x \in [0,1],$$

из которого опять в силу граничных условий получим $u(x,t_0)=0$, что в свою очередь означает

$$f(t_0)=\int\limits_0^1 u^2(x,t_0)\,dx=0.$$

Но это противоречит определению точки $t_0\in(0,1)$.

Задача 2. [2] Пусть $u(x,t)$ — это регулярное решение в $D=(0,\pi)\otimes(0,+\infty)$ задачи

$$u_t=u_{xx},\quad u|_{x=0}=u_x|_{x=\pi}=0,\quad u|_{t=0}=\varphi(x),\tag{4.13}$$

где $\varphi(0)=\varphi'(\pi)=0$. Проверить, что

1. Выполнено ли неравенство

$$\sup_{0<x<\pi}|u(x,1)|\leqslant\sup_{0<x<\pi}|\varphi(x)|?\tag{4.14}$$

2. Верно ли, что

$$\sup_{0<x<\pi}|u(x,1)|\leqslant\frac{1}{2}\sup_{0<x<\pi}|\varphi(x)|?\tag{4.15}$$

Решение. Для того чтобы в дальнейшем воспользоваться принципом максимума, нам нужно получить эквивалентную задачу, но с условиями Коши–Дирихле. С этой целью продолжим функцию $u(x,t)$ четным образом через точку $x=\pi$ на множество $x\in(\pi,2\pi)$, т.е. положим

$$\widetilde{u}(x,t)=u(2\pi-x,t)\quad\text{при}\quad x\in(\pi,2\pi)\Rightarrow\widetilde{u}_x(\pi,t)=u_x(\pi,t)=0.$$

Построенная функция является решением краевой задачи

$$\widetilde{u}_t=\widetilde{u}_{xx},\quad x\in(0,2\pi),\quad t>0,\tag{4.16}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0}=\widetilde{u}|_{x=2\pi}=0,\quad \widetilde{u}|_{t=0}=\widetilde{\varphi},\tag{4.17}$$

где функция $\widetilde{\varphi}(x)$ четным образом продолженная на интервал $(\pi,2\pi)$. Задачи (4.13) и (4.16), (4.17) эквивалентны. Теперь мы можем применить принцип максимума и получить, что максимум модуля функции $\widetilde{u}(x,t)$ достигается при $t=0$, поскольку на боковой границе при $x=0$ и $x=2\pi$ $\widetilde{u}(x,t)=0$. Итак,

$$\sup_{0<x<\pi}|u(x,1)|=\sup_{0<x<2\pi}|\widetilde{u}(x,1)|\leqslant\sup_{0<x<2\pi}|\widetilde{\varphi}(x)|=\sup_{0<x<\pi}|\varphi(x)|.\tag{4.18}$$

Тем самым утверждение (4.14) доказано.

Неравенство (4.15) неверно. Действительно, возьмем

$$\varphi(x) = \sin(x/2),$$

которому соответствует решение [1])

$$u(x,t) = e^{-t/4}\sin(x/2) \Rightarrow \sup_{0<x<\pi}|u(x,1)| = e^{-1/4}, \quad \sup_{0<x<\pi}|\varphi(x)| = 1.$$

Заметим, что

$$e^{-1/4} > \frac{1}{2},$$

поскольку $e < 2^4$.

Задача 3. [2] Пусть $D = (0,1)\otimes(0,1)$. Существует ли функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)\cap\mathbb{C}(\overline{D})$ — решение следующей первой краевой задачи:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{в} \quad D, \tag{4.19}$$

$$u|_{t=0} = 2\sin\pi x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.20}$$

$$u|_{x=0} = \sin\pi t, \quad u|_{x=1} = \sin\pi t + 2\sin\pi t \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1, \tag{4.21}$$

$$u|_{t=1} = 3\sin\pi x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1? \tag{4.22}$$

Решение. Эта задача для самостоятельного решения.

Задача 4. [2] Существует ли решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{Q})$ задачи

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad \text{в} \quad \overline{Q}, \quad Q = \Big\{(x,t):\ x^2+t^2 < 1\Big\}, \tag{4.23}$$

$$xu_x = tu \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial Q = \Big\{(x,t):\ x^2+t^2 = 1\Big\}? \tag{4.24}$$

Решение. Прежде всего заметим, что справедлива следующие равенства в силу формулы Грина:

$$\int\limits_Q u_t\,dx\,dt = \int\limits_{\partial Q} u(x,t)\cos(n_{x,t}, e_t)\,dl, \tag{4.25}$$

$$\int\limits_Q u_{xx}\,dx\,dt = \int\limits_{\partial Q} u_x(x,t)\cos(n_{x,t}, e_x)\,dl, \tag{4.26}$$

где $n_{x,t}$ — это внешняя нормаль в точке $(x,t) \in \partial Q$. Легко проверить, что

$$n_{x,t} = (x,t), \quad \cos(n_{x,t}, e_t) = t, \quad \cos(n_{x,t}, e_x) = x.$$

---

[1]) Полученное методом разделенных переменных.

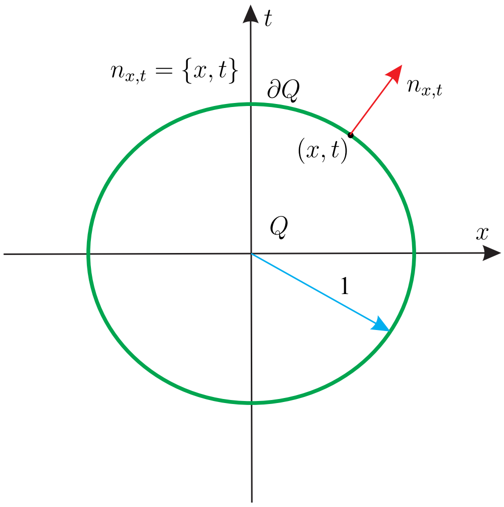


Рис. 4. К задаче 4.

Поэтому интегрируя обе части уравнения (4.23), мы получим равенство

$$\int\limits_{\partial Q} u(x,t)t\,dl = \int\limits_{\partial Q} u_x(x,t)x\,dl + 2\pi,$$

а с учетом граничного условия (4.24) мы получим противоречивое равенство

$$0 = 2\pi.$$

Задача 5. [2] Пусть функции $u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D_k) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_k)$, $k = 1, 2$, являются решениями в

$$D_k \stackrel{def:}{=} (-k, k) \otimes (0, T)$$

краевых задач

$$(u_k)_t = (u_k)_{xx}, \quad u_k|_{x=\pm k} = 0, \quad u_k|_{t=0} = \varphi(x), \quad |x| \leqslant k. \tag{4.27}$$

Здесь $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(1)}([-2,2])$, $\varphi(x) \geqslant 0$ при $|x| \leqslant 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $1 \leqslant |x| \leqslant 2$, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Доказать, что

$$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in [-1,1] \otimes (0,T]. \tag{4.28}$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума $u_k(x,t) > 0$ в D_k. Рассмотрим разность

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u_2(x,t) - u_1(x,t).$$

Введенная функция удовлетворяет задаче

$$v_t = v_{xx}, \quad v|_{x=\pm 1} > 0, \quad v|_{t=0} = 0. \tag{4.29}$$

В силу принципа максимума имеем $v(x,t) \geqslant 0$ в D, т. е. выполнено неравенство (4.28).

Задача 6* . [1] [2] Функция $u(x,t) \not\equiv const$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx}$$

в области $D \equiv \{(x,t): \ 0 < t < T, \ 0 < x \leq 5 - \exp(-t)\}$. Доказать, что глобальный максимум этой функции на $\overline{D}$ не может достигаться ни во внутренних точках области D, ни при $t = T$.

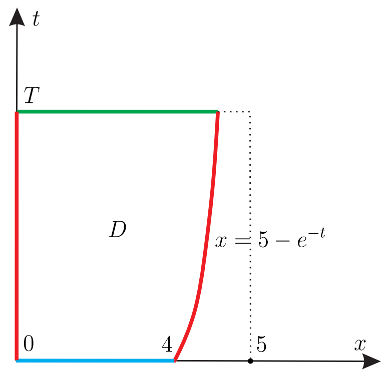


Рис. 5. К задаче 6.

Решение. Эта задача для самостоятельной работы.

Задача 7. [2], [4] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ является решением уравнения

$$u_t = \Delta u + f(x), \quad f(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \tag{4.30}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{4.31}$$

Докажите, что $u_t(x,t) \geqslant 0$ в D.

Решение. Итак, в области D выполнено неравенство

$$\Delta u - u_t \leqslant 0,$$

тогда с учетом второго утверждения в замечании 6 и равенства (4.31) получим, что выполнено неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{4.32}$$

[1] Эта задача повышенной сложности.

Рассмотрим функцию

$$w(x,t) \overset{def:}{=} u(x,t+\varepsilon) - u(x,t), \quad \varepsilon > 0. \tag{4.33}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t = \Delta w \quad \text{в} \quad D_\varepsilon = U \otimes (0, T-\varepsilon), \tag{4.34}$$

причем

$$w(x,t) = u(x,t+\varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D_\varepsilon, \tag{4.35}$$

поскольку

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial' D \supset \partial' D_\varepsilon.$$

Применяя теперь второе утверждение из замечания 6, получим

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow \frac{u(x,t+\varepsilon)-u(x,t)}{\varepsilon} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{u(x,t+\varepsilon)-u(x,t)}{\varepsilon} = u_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{4.36}$$

Задача 8. Вариант неравенства Чебышева. [4] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ является решением дифференциального неравенства

$$\Delta u - u_t \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,T). \tag{4.37}$$

Предположим, что

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T], \tag{4.38}$$

$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B} = \overline{\Omega} \otimes \{t=0\}. \tag{4.39}$$

Пусть $v = v(x)$ — это гладкая неотрицательная функция в $\overline{\Omega}$ такая, что

$$\Delta v(x) \leqslant -1 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{4.40}$$

Доказать, что

$$u(x,t) \leqslant \frac{v(x)}{t} \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.41}$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума имеем [1])

$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.42}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$w(x,t) \overset{def:}{=} u(x,t) - \frac{v(x)}{t}. \tag{4.43}$$

---

[1]) Нужно применить утверждение 1 замечания 6 к функции $u(x,t) - 1$.

Прежде всего применим к этой функции оператор

$$\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$$

и получим следующее выражение:

$$\Delta w - w_t = \Delta u - u_t - \frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant \\ \geqslant -\frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant \frac{1}{t^2}\left(t - v(x)\right). \quad (4.44)$$

Разобьем область D на три части

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$

$$D_1 \stackrel{def:}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) > t\}, \quad D_2 \stackrel{def:}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) < t\},$$

$$D_3 \stackrel{def:}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) = t\}.$$

На множестве D_1 выполнено неравенство

$$\frac{v(x)}{t} > 1 \geqslant u(x,t) \Rightarrow w(x,t) \leqslant 0, \quad (4.45)$$

где последнее неравенство имеет место в силу принципа максимума, примененного к функции $u(x,t)$. На множестве $D_2 \cup D_3$ в силу (4.46) выполнено неравенство

$$v(x) \leqslant t \Rightarrow \Delta w - w_t \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2 \cup D_3. \quad (4.46)$$

Теперь заметим, что в силу определения (4.43) функции $w(x,t)$ и неравенств (4.38), (4.39) на параболической границе $\partial' D = S \cup \overline{B}$ области D выполнено неравенство

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \quad (4.47)$$

Часть границы множества $D_2 \cup D_3$, не входящая в $\partial' D$ совпадает с $D_3 \backslash D$ и на множестве D_3 имеет место следующее неравенство:

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 1 - 1 = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_3. \quad (4.48)$$

Итак, в силу утверждения 1 из замечания 6 мы из неравенств (4.46), (4.47) и (4.48) получим неравенство

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2. \quad (4.49)$$

Следовательно, объединяя неравенства (4.45), (4.48) и (4.49), получим неравенство

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.$$

Задача 9. [2] Справедлив ли принцип максимума в области $D = \Omega \otimes (0,T)$ для обратно параболического уравнения

$$u_t + \Delta u = 0 \tag{4.50}$$

в том виде, в каком он справедлив для уравнения теплопроводности?

Решение. Заметим, что заменой $t \to -t$ уравнение (4.50) сводится к уравнению теплопроводности

$$u_t = \Delta u.$$

Тем самым, нетрудно догадаться, что максимум и минимум функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ может достигаться при $(x,t) \in \overline{B}_T \cup \widehat{S}$, где $\widehat{S} = \partial U \otimes [0,T)$, но не может достигаться при $(x,t) \in D \cup B$. Таким образом, в *принципе максимума* для уравнения (4.50) нужно заменить B на B_T, а S на $\widehat{S}$.

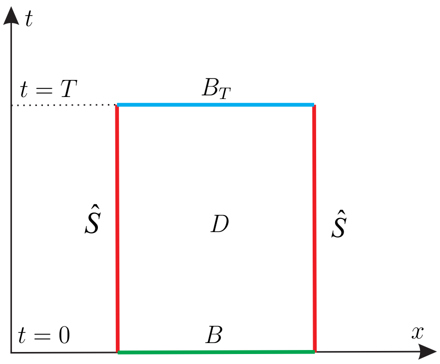


Рис. 6. К задаче 9.

Задача для самостоятельного решения 1. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ и, кроме того, $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$. Рассмотрите неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Докажите, что имеют место неравенства

$$\min_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t) - T \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)| \leqslant u(x,t) \leqslant \\ \leqslant \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t) + T \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.$$

Указание. Необходимо рассмотреть следующие две функции:

$$v_1(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) + tK, \quad v_2(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - tK,$$

$$K \stackrel{def:}{=} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.$$

§ 5. Слабый принцип максимума для задачи Коши

Сейчас мы докажем важный *слабый принцип максимума* для задачи Коши для уравнения теплопроводности, который позволит доказать, как его следствие, единственность решения задачи Коши. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,T]) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$ *— это решение задачи Коши*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.2}$$

удовлетворяющее условию роста

$$u(x,t) \leqslant Me^{\beta|x|^2} \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{5.3}$$

где $M > 0$ *и* $\beta > 0$ *— это константы. Тогда*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes[0,T]} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} g(x). \tag{5.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего допустим, что

$$4\beta T < 1 \Rightarrow 4\beta(T+\varepsilon) < 1 \tag{5.5}$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$. Фиксируем $y \in \mathbb{R}^N$, $\mu > 0$ и определим функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \tag{5.6}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$. Прямым вычислением можно показать, что

$$v_t - \Delta v = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \tag{5.7}$$

Шаг 2. Фиксируем $r > 0$ и положим

$$U \stackrel{def:}{=} B(y,r), \quad D = B(y,r) \otimes (0,T).$$

В силу теоремы 3 имеем

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} v(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial' D} v(x,t). \tag{5.8}$$

Шаг 3. Если $x \in \mathbb{R}^N$ и $t = 0$ то

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}\right) \leqslant u(x,0) = u_0(x). \tag{5.9}$$

Если $(x,t) \in S$, т. е. $|x-y| = r$ и $t \in [0,T]$, то

$$|x| \leqslant |x-y| + |y| = r + |y|$$

и имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \leqslant \\ \leqslant M\exp\left(\beta|x|^2\right) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \leqslant \\ \leqslant M\exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}\right). \end{aligned} \tag{5.10}$$

В силу неравенства (5.5) при некотором $\gamma > 0$ имеет место равенство

$$\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = \beta + \gamma.$$

Пусть

$$c_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \in (-\infty, +\infty). \tag{5.11}$$

Продолжим неравенства (5.10) и получим

$$\begin{aligned} &v(x,t) \leqslant \\ &\leqslant M\exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \mu(4(\beta+\gamma))^{N/2}\exp((\beta+\gamma)r^2) \to -\infty \end{aligned} \tag{5.12}$$

при $r \to +\infty$. Следовательно, при достаточно большом $r > 0$ будет выполнено неравенство

$$M\exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \mu(4(\beta+\gamma))^{N/2}\exp((\beta+\gamma)r^2) \leqslant c_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x).$$

Итак, при некотором таком $r > 0$ будем иметь

$$v(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x). \tag{5.13}$$

Шаг 4. Итак, в силу (5.9), (5.13) и (5.8) имеем

$$v(y,t) \leqslant \max_{(x,t)\in D} v(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x)$$

для всех $y \in \mathbb{R}^N$ и $t \in [0,T]$. Переходя к пределу при $\mu \to +0$ мы получим утверждение теоремы.

Шаг 5. Если условие (5.5) не выполняется, тогда нужно применить схему доказательства на временных интервалах

$$[0,T_1], \quad [T_1, 2T_1], ..., [(n-1)T_1, nT_1], ...,$$

при $T_1 = 1/(8\beta)$.

Теорема доказана.

Задача 10. [4] Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ удовлетворяет условию роста (5.3) и является решением задачи Коши

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad D = (0,T)\otimes\mathbb{R}^N, \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{5.14}$$

причем начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leqslant a|x-y|^\delta, \quad \delta\in(0,1). \tag{5.15}$$

Тогда

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leqslant a|x-y|^\delta \quad \text{при} \quad t\in(0,T). \tag{5.16}$$

Кроме того,

$$|u(x,t) - u(x,s)| \leqslant b|t-s|^{\delta/2} \quad \text{при} \quad t,s\in(0,T), \quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{5.17}$$

Решение. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего введем функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x+y,t) - u(x,t) \tag{5.18}$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$. Эта функция удовлетоворяет уравнению

$$w_t = \Delta w, \quad w(x,0) = u_0(x+y) - u_0(x), \quad |w(x,0)| \leqslant a|y|^\delta.$$

Введем две функции

$$v_1(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t) - a|y|^\delta, \quad v_2(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t) + a|y|^\delta.$$

Эти функции удовлетворяют задачам

$$v_{kt} = \Delta v_k, \quad k=1,2,$$

$$v_1(x,0) \leqslant 0, \quad v_2(x,0) \geqslant 0.$$

Применяя слабый принцип максимума (теорема 4), мы получим, что

$$v_1(x,t) \leqslant 0, \quad v_2(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Следовательно,

$$|w(x,t)| \leqslant a|y|^\delta. \tag{5.19}$$

Шаг 2. Теперь мы можем доказать неравенство (5.17). Действительно, введем следующую функцию:

$$w(x,t;y,s) \overset{def:}{=} u(x,t+s) - u(y,s). \tag{5.20}$$

При $t = 0$ по–доказанному имеем

$$|w(x,0;y,s)| = |u(x,s) - u(y,s)| \leqslant a|x-y|^\delta. \tag{5.21}$$

Заметим, что из арифметического неравенства Юнга

$$a_1 a_2 \leqslant \frac{1}{q_1} a_1^{q_1} + \frac{1}{q_2} a_2^{q_2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \quad a_1, a_2 \geqslant 0$$

вытекает арифметическое трехпараметрическое неравенство Юнга

$$a_1 a_2 \leqslant \varepsilon a_1^{q_1} + \mu(\varepsilon) a_2^{q_2}, \quad \mu(\varepsilon) = \frac{1}{q_2 (q_1 \varepsilon)^{q_2/q_1}}. \tag{5.22}$$

Применяя неравенство (5.22) при

$$q_1 = \frac{2}{\delta}, \quad q_2 = \frac{2}{2-\delta},$$

мы получим следующее неравенство:

$$a|x-y|^\delta \leqslant \varepsilon|x-y|^2 + \mu(\varepsilon), \quad \mu = \mu(\varepsilon) = \frac{c_1}{\varepsilon^{\delta/(2-\delta)}}, \quad \delta \in (0,1). \tag{5.23}$$

Используя это неравенство из (5.21), мы получим следующее неравенство:

$$-\varepsilon|x-y|^2 - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x,s) - u(y,s) \leqslant \varepsilon|x-y|^2 + \mu(\varepsilon), \tag{5.24}$$

причем тем более выполнено более слабое двустороннее неравенство

$$\begin{aligned} -\varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x,0;y,s) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) + \mu(\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Заметим, что функция

$$v(x,t;y) = |x-y|^2 + 2Nt$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$ является решением уравнения теплопроводности. Поэтому в силу принципа максимума получим, что имеет место неравенство

$$- \varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x,t;y,s) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) + \mu(\varepsilon). \quad (5.26)$$

Положим в этом неравенстве $x = y$ и получим неравенства

$$-\varepsilon 2Nt - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x,t+s) - u(x,s) \leqslant \varepsilon 2Nt + \mu(\varepsilon). \quad (5.27)$$

Осталось выбрать оптимальное $\varepsilon > 0$. Возьмем

$$\varepsilon = \frac{1}{t^\alpha}.$$

Рассмотрим выражение

$$2Nt^{1-\alpha} + c_1 t^{\alpha\delta/(2-\delta)}, \quad (5.28)$$

в котором мы положим

$$1 - \alpha = \alpha\frac{\delta}{2-\delta} \Rightarrow \alpha = \frac{2-\delta}{2}.$$

В результате выражение (5.28) примет следующий вид:

$$(2N + c_1)t^{\delta/2}. \quad (5.29)$$

Итак, неравенства (5.27) примут следующий вид:

$$|u(x,t+s) - u(x,s)| \leqslant bt^{\delta/2}, \quad b = 2N + c_1. \quad (5.30)$$

Замечание 8. Комбинируя неравенства (5.16) и (5.17) мы приходим к следующему неравенству:

$$|u(x,t) - u(y,s)| \leqslant c_2\left(|x-y|^\delta + |t-s|^{\delta/2}\right). \quad (5.31)$$

И это итоговое неравенство является следствием лишь условия (5.15) на начальную функцию $u_0(x)$ и принципа максимума!

§ 6. Единственность решения задачи Коши

Теперь мы можем доказать важный результат, доказанный А. Н. Тихоновым [10], о единственности решения задачи Коши при дополнительном условии, которое мы уже ввели, на рост решения при $|x| \to +\infty$, называемым условием Тихонова. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$, $f(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$. *Тогда существует не более одного решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,T]) \cap \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$ *задачи Коши*

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{6.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{6.2}$$

в классе А. Н. Тихонова

$$|u(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta |x|^2\right) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{6.3}$$

где $M > 0$ *и* $\beta > 0$ *— константы.*

Доказательство.

Пусть утверждение не выполнено и существует два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда рассмотрим функцию

$$w_1(x,t) \stackrel{def:}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

которая удовлетворяет соответствующей однородной задаче Коши и условию

$$w_1(x,t) \leqslant 2M \exp\left(\beta |x|^2\right),$$

причем константа M значения не имеет. Поэтому в силу теоремы 4 имеем

$$w_1(x,t) \leqslant 0.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$w_2(x,t) \stackrel{def:}{=} u_2(x,t) - u_1(x,t) = -w_1(x,t)$$

и точно также получим, что

$$w_2(x,t) \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

Теорема доказана.

Замечание о классе единственности А. Н. Тихонова. Отметим, что есть результаты, которые говорят о том, что существует бесконечно много решений однородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{6.4}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{6.5}$$

Каждое такое решение, за исключением $u \equiv 0$, растет очень быстро при $|x| \to +\infty$.

Задача 11. [2] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^1 \otimes (0,T)) \cap \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^1 \otimes [0,T])$ — неотрицательное ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \otimes (0,T), \tag{6.6}$$

причем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,T). \tag{6.7}$$

Доказать, что $u(x,t) = 0$ в слое $\mathbb{R}^3 \otimes (0,T)$.

Решение. Заметим, что в классе ограниченных функций $u(x,t)$ решение задачи Коши дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right] \varphi(\xi)\, d\xi, \quad \varphi(x) \geqslant 0. \tag{6.8}$$

По условию (6.7) имеем

$$0 = u(1/2,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left[-\frac{|1/2-\xi|^2}{4t}\right] \varphi(\xi)\, d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T).$$

Тематическая лекция 2

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В этой лекции мы докажем слабый принцип максимума и рассмотрим его приложения.

§ 1. Области

Прежде всего рассмотрим основные понятия, связанные с рассматриваемыми областями $D \subset \mathbb{R}^N$. Заметим, что при рассмотрении эллиптических операторов, например, оператора Лапласа в некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, мы имели дело приблизительно с такой областью (ограниченной):

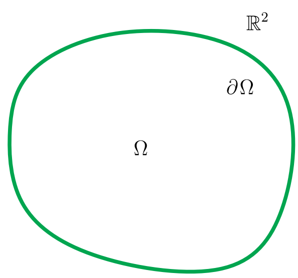


Рис. 7. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Область Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega$ и граничные условия ставятся на полной границе $\partial\Omega$. Например, можно поставить задачу Дирихле

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad x \in \Omega, \quad u = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.1}$$

В отличие от эллиптического случая, как правило, область $D \subset \subset \mathbb{R}_x^N \otimes \mathbb{R}_t^1$ имеет не гладкую границу ∂D. Действительно, она имеет угловые точки. Классический пример приведен на рисунке 7. Кроме того, в отличие от эллиптических уравнений граничные условия для параболических уравнений ставятся не на полной границе ∂D области D, а только на так называемой *параболической границе* $\partial' D$.

Например, можно предъявить такую постановку краевой задачи:

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t \in (0,t_0], \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [a,b], \tag{1.3}$$

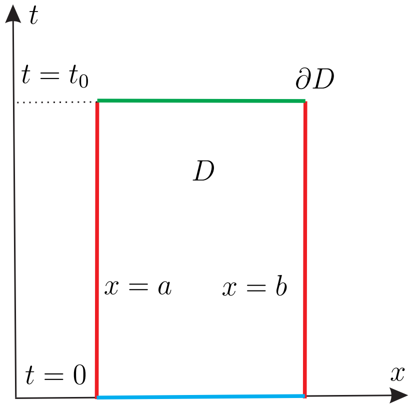


Рис. 8. Цилиндрическая область $D = (a, b) \otimes (0, t_0)$ с негладкой границей ∂D.

$$u|_{x=a} = \varphi_1(t), \quad u|_{x=b} = \varphi_2(t), \quad t \in [0, t_0]. \tag{1.4}$$

В краевой задаче (1.2)–(1.4) отсутствует граничное условие при $t = t_0$. Согласно нашим сформировавшимся после курса лекций ММФ А. Н. Боголюбова [1] представлениям это граничное условие не нужно, поскольку значение решения $u(x, t)$ в момент времени $t = t_0$ вполне определяется уже заданными граничными условиями (1.3), (1.4) и правой частью $f(x, t)$. И это связано с тем, что параболический оператор содержит производную по времени первого порядка, а не второго как в случае, например, волнового уравнения. Более того, можно создать такое уравнение второго порядка по t

$$u_{tt} + u_{xx} = f(x, t), \tag{1.5}$$

для корректной постановки которого в принципе нужно задание граничного условия при $t = t_0$. Правда, такое уравнение в физике не встречается.

Теперь заметим, что мы используем несколько другую терминологию, чем в курсе ММФ. Мы называем условие (1.3) не начальным условием, а граничным. Хотя можно это условие называть как начальным условием, так и граничным условием. В связи с этим задачу (1.2)–(1.4) называют или задача Коши–Дирихле или называют первая краевая задача. При чтении научной литературы по дифференциальным уравнениям используется второе название, а при чтении научной литературы по математической физики используется первое название.

Давайте сформулируем некоторые понятия и определения, связанные с рассмотрением областей $D \subset \mathbb{R}^N$, где изучаются параболические уравнения.

Итак, ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, изображенная на следующем рисунке имеет границу ∂D, состоящую из следующих частей: из

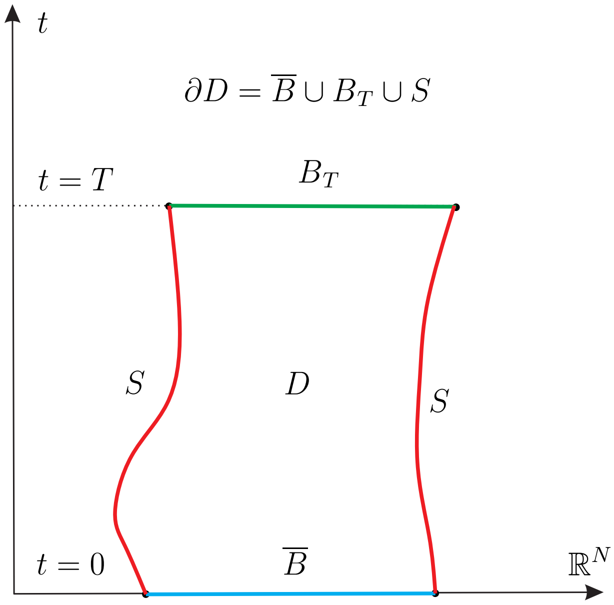


Рис. 9. Граница ∂D области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

основания при $t = 0$, называемая нижней крышкой

$$\overline{B} \stackrel{def:}{=} \partial D \cap \{t = 0\}, \quad \overline{B} = B \cup \partial B,$$

из верхней крышки

$$\overline{B}_T \stackrel{def:}{=} \partial D \cap \{t = T\}, \quad \overline{B}_T = B_T \cup \partial B_T,$$

и из боковой поверхности

$$S \stackrel{def:}{=} \partial D \cap \{0 < t < T\} \cup \partial B_T.$$

При этом мы в основном рассматриваем такие области $D \subset \mathbb{R}^N$, что множества

$$B \quad \text{и} \quad B_T$$

являются областями в соответствующих гиперплоскостях $t = 0$ и $t = T$. Символом $\overline{B}$ мы обозначили замыкание области B, $\overline{B}_T$ — замыкание области B_T, а символами ∂B и ∂B_T мы обозначили границы областей B и B_T, соответственно.

Отметим, что граничные условия решения параболического уравнения, как мы уже отметили, задаются не на всей границе ∂D области D, а только на ее части

$$\partial' D \stackrel{def:}{=} \overline{B} \cup S,$$

называемой нормальной границей или параболической границей. Отметим, что на практике довольно часто область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ может быть представлена в виде цилиндра $D = \Omega \otimes (0, T)$ или в более общем случае $D = \Omega \otimes (T_0, T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Такую область называют цилиндрической областью. Пример цилиндрической области приведен на рисунке 7. С другой стороны, много практических примеров, так называемых областей с подвижной границей, когда область D является нецилиндрической. Пример, нецилиндрической области изображен на рисунке 8. Кроме того, введем обозначение

$$\overline{\partial' D} \stackrel{def:}{=} \overline{B} \cup \overline{S}.$$

Кроме того, используют следующие обозначения (см. рисунок 9):

$$B_\tau \stackrel{def:}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad D_\tau \stackrel{def:}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{def:}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}$$

для любого $\tau \in (0, T)$. Мы будем в дальнейшем рассматривать в ос-

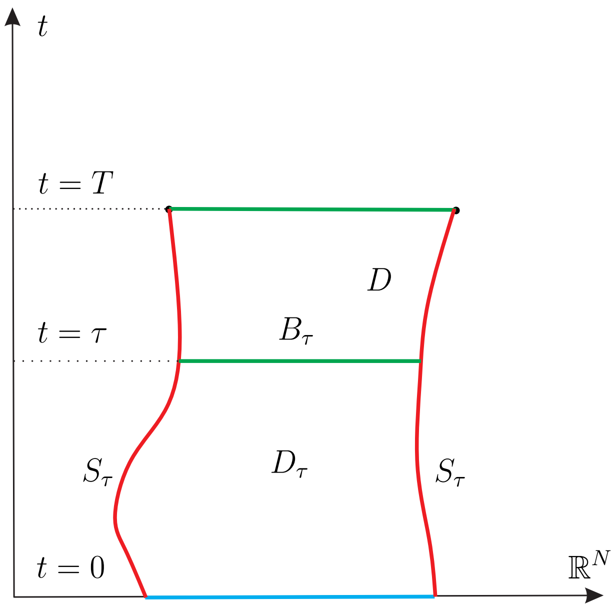


Рис. 10. Множества D_τ, B_τ и S_τ.

новном такие области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, что множества B_τ для всех $\tau \in$ $\in [0, T]$ являются областями (связными и открытыми множествами) на соответствующих гиперплоскостях $t = \tau$.

§ 2. Постановка задач для параболических операторов

В курсе лекций мы будем рассматривать не только задачу Коши и первую краевую задачу, а также вторую и третью краевые задачи. Итак, последовательно дадим постановки указанных задач. Прежде всего дадим определение параболического уравнения в области $D \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Рассмотрим следующее уравнение:

$$Lu(x,t) \stackrel{def:}{=} \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t). \tag{2.1}$$

Оператор L, определенный равенством (2.1), называется параболическим в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, если для всех $(x,t) \in D$ и для каждого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0. \tag{2.2}$$

Иначе говоря, оператор L называется параболическим в области D, если его часть

$$L_0 u \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u \tag{2.3}$$

для всех $(x,t) \in D$ является эллиптическим оператором по переменным x_i, $i = \overline{1,N}$ с параметром t.

Определение решения параболического уравнения. *Функция $u = u(x,t)$ непрерывная вместе со всеми своими производными*

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

входящими в оператор L, в области D называется классическим решением уравнения (2.1).

Задача Коши. *Найти классическое решение $u(x,t)$ уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+ \stackrel{def:}{=} \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{2.4}$$

удовлетворяющего начальному (*граничному при $t = 0$*) *условию*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.5}$$

З а м е ч а н и е 1. Сразу же заметим, что задача Коши имеет, вообще говоря, неединственное решение. Для того чтобы классическое решение задачи Коши было единственным достаточно потребовать выполнения следующих неравенств:

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right), \quad |f(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right) \tag{2.6}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t \geqslant 0$ для некоторых постоянных $M > 0$ и $\beta > 0$.

П е р в а я к р а е в а я з а д а ч а. *Найти классическое решение $u(x,t)$ непрерывное на замыкании $\overline{D}$ области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, удовлетворяющее уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.7}$$

начальному условию на нижней крышке (*граничному при* $t = 0$)

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B}, \tag{2.8}$$

а также граничному условию на поверхности на боковой границе S

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S \stackrel{def:}{=} (\partial D \cap \{0 < t < T\}) \cup \partial B_T. \tag{2.9}$$

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что граничные условия (2.8) и (2.9) можно объединить в одно граничное условие на параболической границе $\partial^{'} D = \overline{B} \cup S$ полной границы ∂D имеющее вид:

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D. \tag{2.10}$$

Как мы видим специфика первой краевой задачи для параболического оператора L — это отсутствие граничного условия на верхней крышке B_T области D.

Для того чтобы сформулировать вторую краевую задачу для параболического оператора L в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ нам нужно ввести *производную по внутренней нормали* $\partial/\partial n_{x,t}$ и *производную по внутренней конормали* $\partial/\partial \nu_{x,t}$ к боковой поверхности S. Пусть в каждой точке $(x,t) \in S$ определено непрерывное векторное поле внутренних нормалей $n_{x,t}$, лежащее для любого $t = \tau \in [0,T]$ в случае цилиндрической области D на гиперплоскости $t = \tau$ и определенное своими углами $\cos(n_{x,t}, e_i)$. Тогда вектор внутренней конормали $\nu_{x,t}$ определен следующим образом:

$$\nu_{x,t} = \left(\sum_{i=1}^N a_{i1}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_i), \cdots, \sum_{i=1}^N a_{iN}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_i)\right),$$

лежащий тоже на гиперплоскости $t = \tau$ в случае цилиндрической области D. Оператором нормальной производной называется следующая

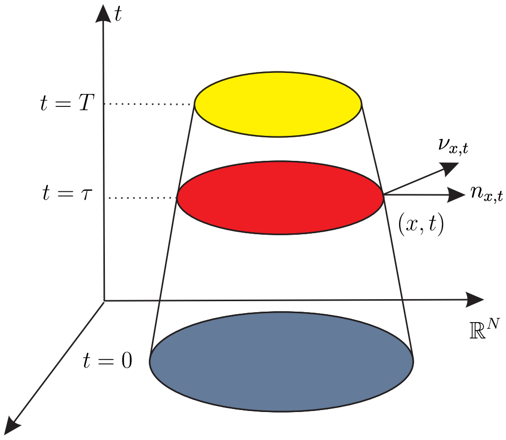


Рис. 11. Векторы внешней нормали $n_{x,t}$ и внешней конормали $\nu_{x,t}$.

величина:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_{x,t}}\bigg|_S \stackrel{def:}{=} \sum_{i=1}^{N} \cos(n_{x,t}, e_i)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_S, \tag{2.11}$$

а оператором конормальной производной в случае оператора L с матрицей $(a_{ij}(x,t))$ является величина

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}}\bigg|_S \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_i)\frac{\partial u}{\partial x_j}\bigg|_S. \tag{2.12}$$

Вторая краевая задача. *Найти классическое решение $u(x,t)$ уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.13}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \tag{2.14}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \tag{2.15}$$

Третья краевая задача. *Найти классическое решение $u(x,t)$ уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.16}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \tag{2.17}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \tag{2.18}$$

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что можно задать на боковой поверхности S также общее граничное условие следующего вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial l_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S, \tag{2.19}$$

где векторное внутреннее поле $l_{x,t}$ является непрерывным векторным полем на S нигде не совпадающее с касательным направлением к поверхности S.

Помимо перечисленных задач можно рассматривать также з а д а ч у С т е ф а н а со свободной границей (см. подробное рассмотрение этой задачи в книге [11]), когда заранее граница области D полностью неизвестна. Однако, эту задачу мы рассматривать не будем и поэтому не формулируем.

§ 3. Определения

Рассмотрим оператор

$$Lu \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.1}$$

в $(N+1)$–мерной области (связное, открытое множество) $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют следующим условиям:

(A) Оператор L — параболический в D, т. е. для каждой точки $(x,t) \in$ $\in D$ и для любого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0;$$

(B) коэффициенты оператора L — непрерывные функции в D;

(C) $c(x,t) \leqslant 0$ в D.

Дадим определение классического решения уравнения (3.1) в области D.

Определение классического решения. *Непрерывная в D функция $u(x,t)$ называется классическим решением уравнения $Lu = 0$ в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, если все слагаемые входящие в оператор Lu, т.е.*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial t},$$

являются непрерывными функциями в области D и уравнение $Lu(x,t) = 0$ выполнено в каждой точке $(x,t) \in D$.
Замечание 4. В этом определении мы не накладываем на решение условие ограниченности, т. е. решение может иметь особенность на границе области.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы понимаем решение в смысле этого определения.

§ 4. Слабый принцип максимума

Справедливо важное утверждение, называемое *слабым принципом максимума*.
Лемма 1. *Предположим, что либо $Lu > 0$ всюду в D, либо $Lu \geqslant 0$ и $c(x,t) < 0$ всюду в D. Тогда $u(x,t)$ не может иметь положительного локального максимума в D.*

Доказательство.

Пусть $u = u(x,t)$ имеет положительный локальный максимум в точке $P_0 = z_0 = (x_0, t_0) \in D$. Докажем, что

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0) \frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0. \tag{4.1}$$

В самом деле, линейным преобразованием $y = \widehat{C}z$ область D преобразуется в область D^*, а неравенство (4.1) преобразуется в неравенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij} \frac{\partial^2 v(y_0)}{\partial y_i \partial y_j} \leqslant 0, \tag{4.2}$$

где

$$v(y) = u(z), \quad y_0 = \widehat{C}z_0, \quad (b_{ij}) = \widehat{C}(a_{ij})\widehat{C}^T,$$
$$z = (x,t), \quad z_0 = (x_0,t_0), \quad y = (x^*, t^*), \quad y_0 = (x_0^*, t_0^*).$$

Если выбрать матрицу $\widehat{C}$ так, чтобы b_{ij} была единичной матрицей, и замечая, что $v(y_0)$ тоже положительный максимум $v(y)$ в D^* и, следовательно, выполнено неравенство

$$\frac{\partial^2 v(y_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij} \frac{\partial^2 v(y_0)}{\partial y_i \partial y_j} \leqslant 0.$$

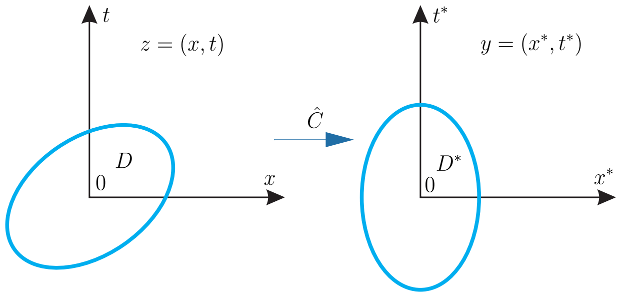


Рис. 12. Отображение области D в область D^*.

Следовательно, выполнено неравенство (4.1). Наконец, в точке $P_0 = (x_0, t_0)$ выполнены необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$Lu(x_0, t_0) \leqslant c(x_0, t_0) u(x_0, t_0). \tag{4.3}$$

Поскольку $u(x_0, t_0) > 0$, то мы приходим к противоречию в неравенстве (4.3) в каждом из двух случаев

$$Lu > 0 \quad \text{и} \quad c(x,t) \leqslant 0 \quad \text{либо} \quad Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad c(x,t) < 0.$$

Лемма доказана.

Приложение слабого принципа максимума. В качестве приложения слабого принципа максимума рассмотрим вопрос о *единственности решения следующей первой краевой задачи*:

$$Lu(x,t) = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{4.4}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S, \tag{4.5}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. Будем предполагать, что функция $f = f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ определена на множестве $(D \cup B_T) \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N$. Справедлива следующая теорема единственности:

Теорема 1. *Пусть L — это параболический оператор с коэффициентами $a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}_b(D \cup B_T)$ (непрерывные и ограниченные на множестве $D \cup B_T$), и пусть $f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ является неубывающей по переменной $p \in \mathbb{R}^1$ функцией. Тогда существует не более одного решения задачи* (4.4), (4.5).

Доказательство.

Шаг 1. Сначала мы рассмотрим случай $c(x,t) \leqslant 0$ и функция $f = f(x,t,p,p_1,....,p_N)$ является строго возрастающей по $p \in \mathbb{R}^1$.

Предположим, что $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — это два решения задачи (4.4) и (4.5). Если
$$u_1(x,t) \not\equiv u_2(x,t),$$
то можно предположить, что
$$u_1(x,t) > u_2(x,t) \quad \text{в некоторых точках} \quad D.$$
Поэтому функция
$$u(x,t) \stackrel{def:}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t)$$
будет иметь положительный максимум в $D \cup B_T$. Обозначим через $P_0 = (x_0, t_0)$ точку, где достигается максимум. Ясно, что
$$D_x u_1(P_0) = D_x u_2(P_0), \quad u_1(P_0) > u_2(P_0).$$
Поэтому мы получаем, что
$$Lu(P_0) = f(x_0, t_0, u_1(x_0,t_0), D_x u_1(x_0,t_0)) - \\ - f(x_0, t_0, u_2(x_0,t_0), D_x u_2(x_0,t_0)) > 0.$$
С другой стороны, при доказательстве слабого принципа максимума мы доказали, что
$$Lu(P_0) \leqslant 0$$
в каждой точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup B_T$, в которой $u(x,t)$ имеет положительный максимум. Пришли к противоречию.

Шаг 2. Чтобы доказать теорему в общем случае, сделаем преобразование
$$v(x,t) = e^{-\lambda t} u(x,t),$$
которое переводит уравнение (4.4) в следующее:
$$(L - c(x,t)I)v(x,t) = \widehat{f}(x,t,v,D_x v) \stackrel{def:}{=} \\ = f(x,t,ve^{\lambda t}, e^{\lambda t} D_x v)e^{-\lambda t} + (\lambda - c(x,t))v.$$
Выберем
$$\lambda > \sup_{(x,t)\in D} c(x,t),$$
тогда функция $\widehat{f}(x,t,v,D_x v)$ будет строго возрастающей по v, а коэффициент при $v(x,t)$ в выражении
$$(L - c(x,t)I)v(x,t)$$
равен нулю. Таким образом, осталось применить результат, полученный на первом шаге.

Теорема доказана.

§ 5. Слабый принцип максимума ограниченного решения в цилиндрической области

Рассмотрим частный случай цилиндрической ограниченной области $D = \Omega \otimes (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Кроме того, сделаем существенное предположение относительно решения $u(x, t)$.

Определение ограниченного решения. *Назовем функцию $u(x, t)$ ограниченным решением, если она является ограниченной и непрерывной в $\overline{D} = \overline{\Omega} \otimes [0, T]$, функции $u_{x_i}(x, t)$ и $u_{x_i x_j}(x, t)$ для каждого $t \in [0, T]$ являются непрерывными в Ω и в любой точке D существует производная $u_t(x, t)$.*

Справедлив следующий принцип максимума:

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, выполнены условия* (A), (B) *и* (C) *относительно коэффициентов параболического оператора L в области D. Если*

$$Lu(x, t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad (x, t) \in D, \tag{5.1}$$

$$u(x, t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial^{''} D \equiv \overline{\Omega} \otimes \{t = 0\} \cup \partial\Omega \otimes (0, T)\ ^{1)}. \tag{5.2}$$

Тогда $u(x, t) \leqslant 0$ в D.

Доказательство.

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\gamma}{T - t}. \tag{5.3}$$

Пусть z_γ — это точка в $\overline{D}$, в которой $v(x, t)$ принимает максимальное значение. Прежде всего заметим, что в силу ограниченности решения $u(x, t)$ в D

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to B_T = \{x \in \Omega,\ t = T\}.$$

Поэтому $z_\gamma \notin B_T$ и $z_\gamma \in D \cup \partial^{'} D$.

Шаг 2. Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D, т.е. быть внутренней точкой цилиндрической области D.

□ Действительно, в противном случае (как и ранее при доказательстве слабого принципа максимума в лемме 1) имеем

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma) \frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = v_{x_i}(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Поэтому в точке z_γ выполнена следующая цепочка неравенств:

[1)] Граница $\partial^{''} D \subset \partial^{'} D$ и поэтому отличается от параболической или нормальной границы $\partial^{'} D$.

$$0 \leqslant Lu(x,t) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma)\frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(z_\gamma)\frac{\partial v(z_\gamma)}{\partial x_i} +$$
$$+ c(z_\gamma)u(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant c(z_\gamma)u(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} + c(z_\gamma)v(z_\gamma) + c(z_\gamma)\frac{\gamma}{T-t} \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} + c(z_\gamma)\frac{\gamma}{T-t} < 0. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Полученное противоречие доказывает, что либо $v(z_\gamma) < 0$ в D либо $z_\gamma \in \partial' D$ и тогда в силу (5.2) имеем $v(z_\gamma) \leqslant 0$. Итак, в любом случае имеем

$$v(x,t) \leqslant v(z_\gamma) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Поскольку $u(x,t)$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D$ устремим $\gamma \to +0$ и получим неравенство

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим обобщение этой теоремы на случай неограниченной области. Итак, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A), (B), (C) *и коэффициенты оператора L являются ограниченными функциями в D. Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad (x,t) \in D, \tag{5.4}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial'' D \equiv \{x \in \overline{\Omega},\ t = 0\} \cup \{x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)\}. \tag{5.5}$$

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ в D.

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим следующую функцию:

$$v_0(x,t) = \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t), \quad \lambda > 0. \tag{5.6}$$

Непосредственно можно проверить, что выполнено неравенство

$$Lv_0(x,t) \leqslant 0 \tag{5.7}$$

для достаточно большой константы $\lambda > 0$.

Шаг 2. Положим

$$m = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)|, \quad D_{T,R} \stackrel{def:}{=} [\Omega \cap B_R] \otimes (0,T), \tag{5.8}$$

где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N :\ |x| < R\}$. Тогда функция

$$w_R(x,t) = u(x,t) - v_0(x,t)\frac{m}{\operatorname{ch}(R)} \tag{5.9}$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \tag{5.10}$$

для всех

$$(x,t) \in \partial^{'} D_{T,R} = \{\overline{\Omega} \cap \overline{B}_R,\ t=0\} \cup \{\partial\Omega \cap \partial B_R,\ t \in (0,T)\}.$$

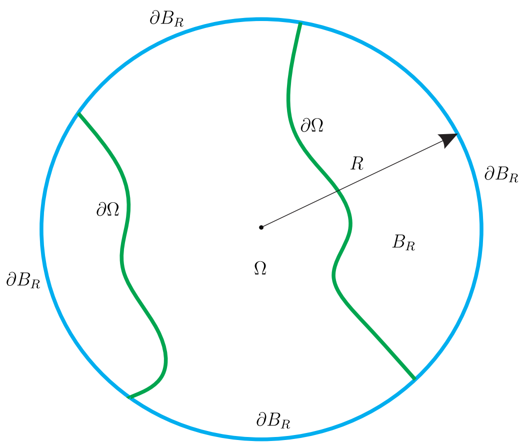


Рис. 13. Множество $\Omega \cap B_R$.

□ Действительно, в силу условия (5.5) $u(x,t) \leqslant 0$ на $\partial^{'} D$, а при $x \in \partial B_R$ имеем

$$w_R(x,t)\Big|_{|x|=R} = (u(x,t) - m)\Big|_{|x|=R} \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

С другой стороны, в силу условия (5.4) и (5.7) имеем

$$Lw_R(x,t) \geqslant 0. \tag{5.11}$$

В силу ограниченности области $D_{T,R}$ выполнен результат теоремы 2

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_{T,R} \Rightarrow u(x,t) \leqslant v_0(x,t)\frac{m}{\operatorname{ch} R}.$$

Переходя к пределу при $R \to +\infty$ получим результат теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 5. Заметим, что в формулировке теорем 2 и 3 мы используем понятие ограниченного решения, а именно условие, что решение $u(x,t)$ ограничено в рассматриваемой цилиндрической области. Тем самым, если решение только непрерывно в области и может иметь особенность на границе области исключен из рассмотрения.

§ 6. Сильный принцип максимума

Доказательство основного утверждения этого параграфа — принципа максимума, мы будем проводить для произвольной области $D \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Нам потребуются новые понятия. Поэтому введем обозначения.

Обозначения. Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — любая точка из D. Обозначим через $S(P_0)$ множество всех точек $Q = \{(x, t)\}$ в D, таких, что их можно соединить с P_0 простой непрерывной кривой, лежащей в D, вдоль которой координата t не убывает от Q к P_0. Через $C(P_0)$ мы обозначим компоненту пересечения $D \cap \{t = t_0\}$, которая содержит P_0. Заметим, что $S(P_0) \supset C(P_0)$.

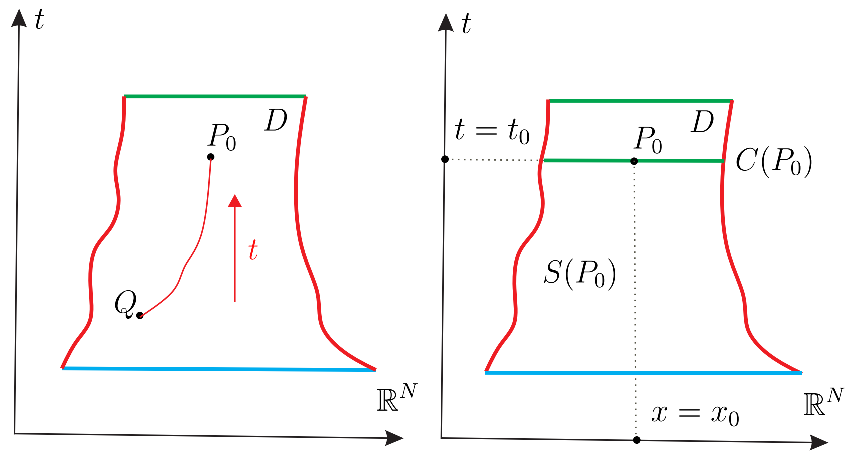


Рис. 14. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение этой лекции, называемое сильным принципом максимума.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* D *и если* $u(x, t)$ *имеет в* D *положительный локальный максимум* (*отрицательный локальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S(P_0)$.

Доказательство теоремы. Для того чтобы доказать эту важную теорему нам нужно доказать ряд вспомогательных лемм.

Этап I. Докажем следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть* $Lu \geqslant 0$ *в* D, *и пусть* $u(x, t)$ *имеет положительный локальный максимум* M *в* D. *Предположим, что* D *содержит замкнутый эллипсоид* E :

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2 \leqslant R^2, \quad \lambda_i > 0, \quad R > 0, \quad i = \overline{1, N}$$

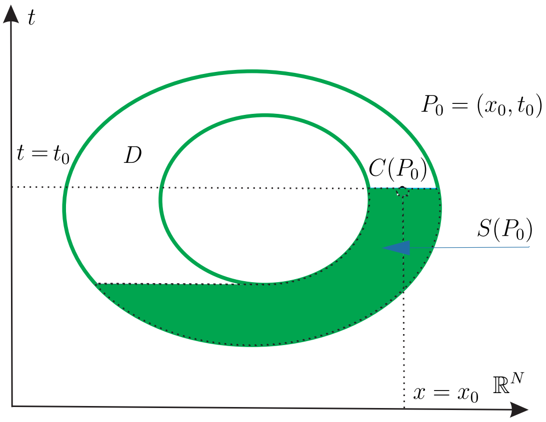


Рис. 15. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$ в случае «гладкой» двусвязной области D.

и что $u(x,t) < M$ *во внутренних точках* $(x,t) \in E$ *и* $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$ *в некоторой точке* $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ *на границе* ∂E *эллипсоида* E. *Тогда* $\overline{x} = x^*$, *где* $x^* = (x_1^*, ..., x_N^*)$.

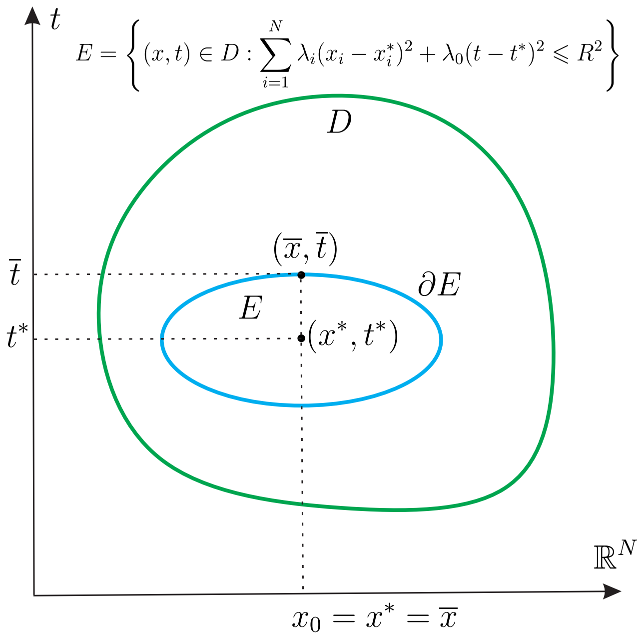


Рис. 16. Эллипсоид E в формулировке леммы 2.

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ — это единственная точка на ∂E, в которой $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$, так как в противном случае [1] мы можем взять меньший замкнутый эллипсоид e, лежащий в E и имеющий единственную общую точку $\overline{P}$ с ∂E (см. рисунок 15).

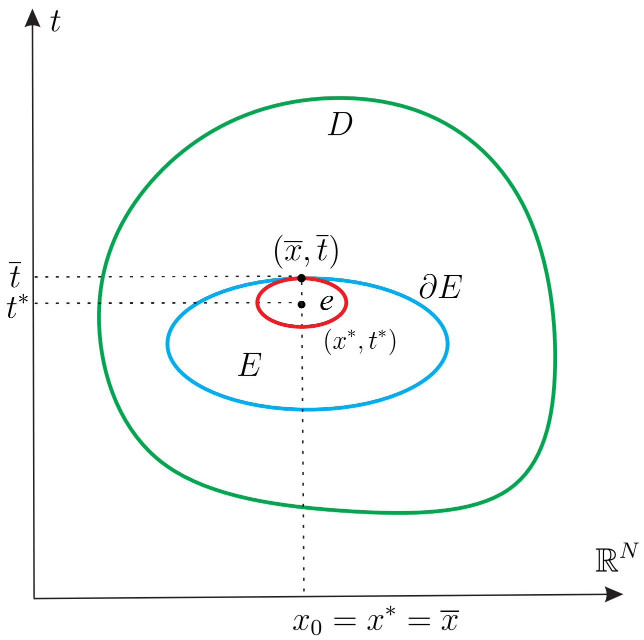


Рис. 17. Вложенный эллипсоид e.

Шаг 2. Предположим, что $\overline{x} \neq x^*$, и пусть C — замкнутый $(N + 1)$–мерный шар, содержащийся в D с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ и радиусом меньшим, чем $|\overline{x} - x^*|$. Тогда

$$|x - x^*| \geqslant const > 0 \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in C. \tag{6.1}$$

Граница шара C состоит из части $\partial C_1 \subset E$, и части ∂C_2, лежащей вне эллипсоида E (см. рисунок 16). Очевидно, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$u(x, t) < M - \delta \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial C_1, \tag{6.2}$$

поскольку по построению эллипсоида $E \subset D$ максимум M функции $u(x, t)$ достигается только в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \partial E$ (см. шаг 1).

Шаг 3. Введем следующую функцию:

---

[1] Заметим, что $u(x, t) < M$ во всех внутренних точках эллипсоида E.

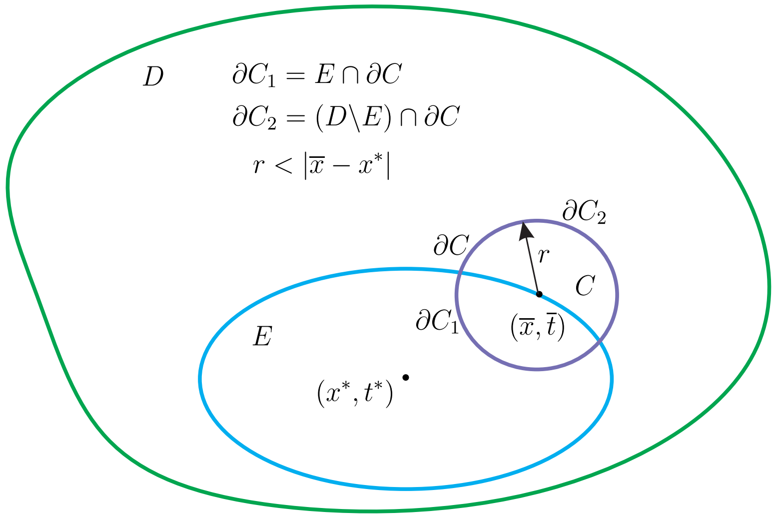


Рис. 18. Шар C.

$$h(x,t) = \exp\left\{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0\left(t - t^*\right)^2\right]\right\} - \\ - \exp\left[-\alpha R^2\right], \quad \alpha > 0. \tag{6.3}$$

Заметим, что по построению функция $h = h(x,t) > 0$ внутри E и равна нулю на границе ∂E и меньше нуля при $(x,t) \in D\backslash E$, т. е. вне замкнутого эллипсоида E. Кроме того, заметим, что

$$\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0\left(t - t^*\right)^2\right]\right\} Lh(x,t) = \\ = \left\{4\alpha^2\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j\left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) - \right. \\ \left. - 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{N} a_{ij}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0\left(t - t^*\right)\right] + c(x,t)\right\} - \\ - c(x,t)\exp\left[-\alpha R^2\right]\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0\left(t - t^*\right)^2\right]\right\}. \tag{6.4}$$

Поскольку в шаре C выполнено неравенство (6.1), то первое слагаемое в фигурных скобках в равенстве (6.4) положительно при достаточно большом $\alpha > 0$ будет больше нуля. Последний член больше или равен нуля, так как $c(x,t) \leqslant 0$. Итак,

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad C. \tag{6.5}$$

Шаг 4. Рассмотрим теперь в шаре C функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon h(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{6.6}$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое, то $v(x,t) < M$ на ∂C_1 в силу (6.2). На ∂C_2 функция $u(x,t) \leqslant M$ [1]) и $h(x,t) < 0$, поэтому $v(x,t) < M$. Таким образом,

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad \partial C \tag{6.7}$$

при малом $\varepsilon > 0$. Кроме того,

$$h(\overline{P}) = 0 \Rightarrow v(\overline{P}) = u(\overline{P}) = M. \tag{6.8}$$

Отсюда заключаем, что $v(x,t) < M$ на границе шара C и принимает максимальное положительное значение M в центре шара $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$. При этом выполнено неравенство (6.5). Следовательно, мы пришли в противоречие со слабым принципом максимума (см. лемму 1). Значит, имеет место равенство $\overline{x} = x^*$.

Лемма доказана.

Этап II. Теперь мы докажем следующую лемму:

Лемма 3. *Если $Lu \geqslant 0$ в области D и если $u(x,t)$ имеет положительный максимум в D, который достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, то $u(P) = u(P_0)$ для всех $P \in C(P_0)$.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда в $C(P_0)$ найдется точка $P_1 = (x_1, t_0)$, в которой $u(P_1) < u(P_0)$. Соединим P_1 с P_0 простой непрерывной кривой $\gamma \subset C(P_0)$. На γ существует точка $P^* = (x^*, t_0)$, в которой $u(P^*) = u(P_0)$, и такая, что $u(\overline{P}) < u(P_0)$ для всех $\overline{P} = (\overline{x}, t)$, лежащих на γ между P_1 и P^*.

Возьмем точку $\overline{P}$ на γ между P_1 и P^* так [2]), чтобы расстояние $d(\overline{P}, \partial C(P_0))$ до границы $\partial C(P_0)$ удовлетворяло неравенству

$$d(\overline{P}, \partial C(P_0)) \geqslant 2\overline{\overline{P}P^*}. \tag{6.9}$$

Шаг 2. Поскольку $u(\overline{P}) < u(P^*)$, существует достаточно малый замкнутый интервал σ_0, определяемый соотношениями

$$\sigma_0 \stackrel{def:}{=} \{x = \overline{x}, \quad t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon\}, \tag{6.10}$$

для всех точек $P \in \sigma_0$ которого

$$u(P) < u(P^*). \tag{6.11}$$

---

[1]) Это справедливо, поскольку, с одной стороны, $M > 0$ — это локальный максимум в области D, а с другой стороны, радиус $r > 0$ шара C может быть выбран малым.

[2]) Просто нужно взять точку $\overline{P}$ достаточно близкой к точке P^*.

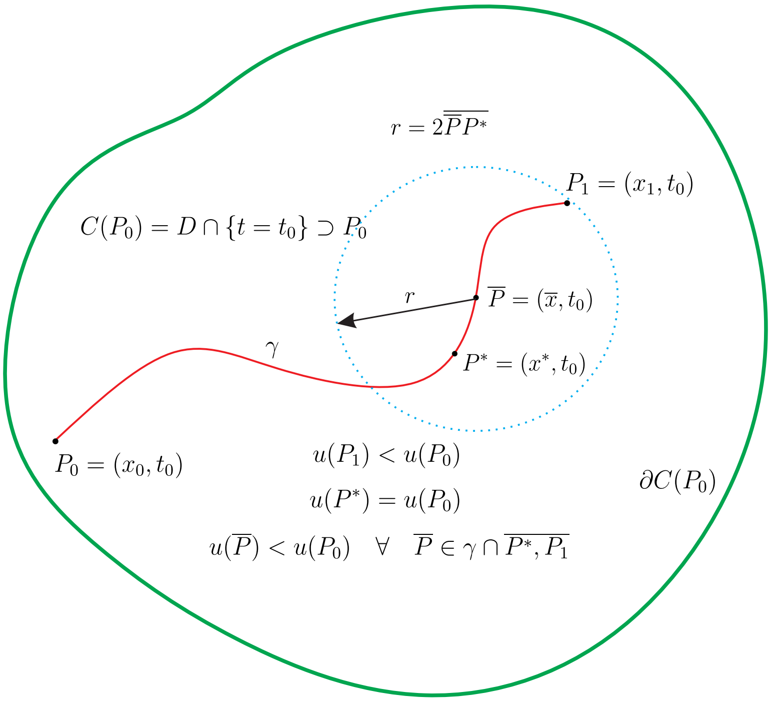


Рис. 19. Кривая $\gamma \in C(P_0)$.

Рассмотрим семейство эллипсоидов E_λ:

$$|x - \overline{x}|^2 + \lambda(t - t_0)^2 \leqslant \lambda\varepsilon^2. \tag{6.12}$$

Прежде всего заметим, что концы интервала σ_0 будут лежать на границе эллипсоида E_λ.

$\square$ Действительно, положим $x = \overline{x}$ в уравнении эллипсоида E_λ и получим неравенство

$$|t - t_0| \leqslant \varepsilon \Rightarrow (x = \overline{x}, t) \in \sigma_0. \quad \boxtimes$$

Кроме того, нетрудно убедиться в том, что справедливо предельное свойство (см. рисунок 18)

$$E_\lambda \to \sigma_0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +0. \tag{6.13}$$

С другой стороны, при $t = t_0$ имеем

$$E_\lambda \cap \{t = t_0\} = \left\{(x, t_0): \ x \in \mathbb{R}^N, \quad |x - \overline{x}| \leqslant \lambda\varepsilon^2\right\}.$$

Поэтому при возрастании $\lambda > 0$ пересечение $E_\lambda \cap \{t = t_0\}$ неограниченно возрастает.

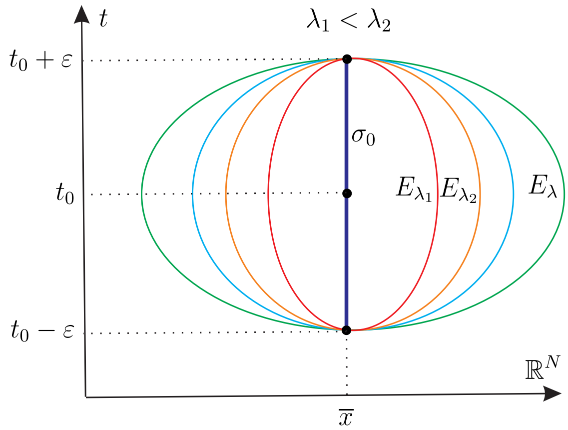


Рис. 20. Семейство E_λ и интервал σ_0.

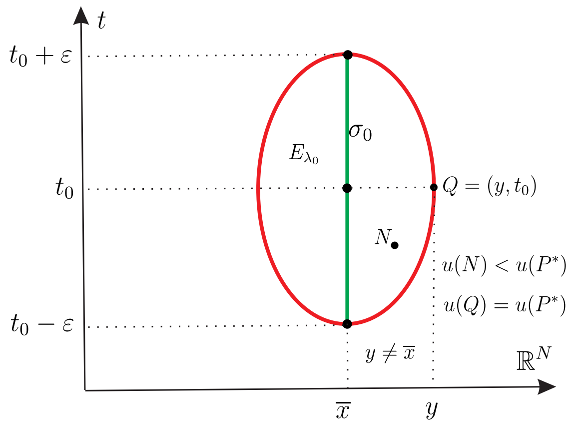


Рис. 21. Минимальный эллипсоид E_{λ_0}.

Следовательно, в силу неравенства (6.11) существует такое минимальное $\lambda = \lambda_0 > 0$, что $u < u(P^*)$ внутри E_{λ_0} и $u = u(P^*)$ в некоторой точке $Q = (y, t_0) \in \partial E_{\lambda_0}$.

В силу (6.11) точка Q не может принадлежать интервалу σ_0 и поэтому $y \neq \overline{x}$, но это противоречит результату леммы 2

Лемма доказана.

Этап III. Докажем теперь следующее утверждение:

Лемма 4. *Пусть R — параллелепипед*

$$x_{0i} - a_i \leqslant x_i \leqslant x_{0i} + a_i, \quad t_0 - a_0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{6.14}$$

содержащийся в D, [1]) *и пусть* $Lu \geqslant 0$ *в* D. *Если* $u(x,t)$ *имеет положительный максимум в* R, *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, *где* $x_0 = (x_{10}, ..., x_{N0})$, *тогда* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in R$.

Доказательство.

Шаг 1. Предположим, что лемма неверна. Тогда в параллелепипеде R должна найтись точка $Q \in R$, такая, что $u(Q) < u(P_0)$. Поскольку $u(x,t) < u(P_0)$ также и в некоторой окрестности Q, можно предполагать, что точка Q не лежит на гиперплоскости $t = t_0$.

На отрезке γ, соединяющем Q с P_0 существует точка P_1, такая, что $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1}$$

Можно считать, что $P_1 = P_0$ и точка Q лежит на гиперплоскости $t = t_0 - a_0$, поскольку в противном случае можно взять меньший параллелепипед.

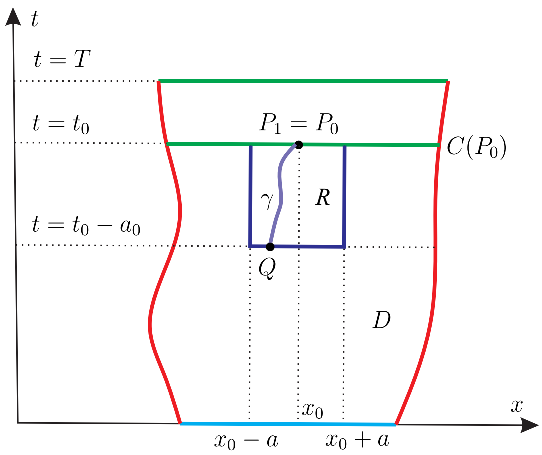


Рис. 22. Кривая γ и точка Q.

Шаг 2. Пусть R_0 обозначается параллелепипед R без верхней грани $t = t_0$. Для каждой точки $Q' \in R_0$ компонента $C(Q')$ содержит некоторую точку из γ, но $u < u(P_0)$ в точках γ. Поэтому если в некоторой точке Q' будет выполнено равенство $u(Q') = u(P_0)$, то в силу предыдущей леммы мы бы имели, что $u(Q') = u(P_0)$ для всех $Q' \in C(Q')$.

[1]) Для этого достаточно взять числа $a_i > 0$ и $a_0 > 0$ достаточно малыми, поскольку точка P_0 внутренняя в D.

Следовательно, в каждой точке $Q^{'} \in R_0$ выполнено следующее неравенство:

$$u(Q^{'}) < u(P_0) \quad \text{для всех} \quad Q^{'} \in R_0. \tag{6.15}$$

Шаг 3. Введем функцию

$$h(x,t) = t_0 - t - K|x - x_0|^2, \quad K > 0. \tag{6.16}$$

На параболоиде

$$M: \quad t_0 - t = K|x - x_0|^2$$

имеем $h(x,t) = 0$; выше параболоида M функция $h(x,t) < 0$, а ниже параболоида M имеем $h(x,t) > 0$. Кроме того, непосредственным вы-

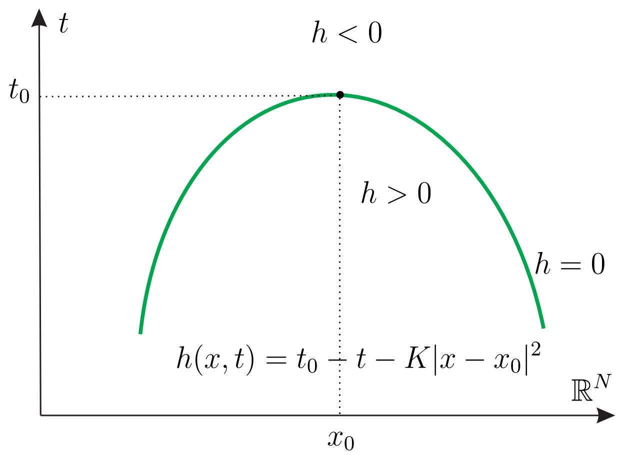


Рис. 23. Параболоид $h(x,t) = 0$.

числением получим, что

$$Lh(x,t) = -2K\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) - 2K\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i - x_{0i}) + \\ + c(x,t)\left[t_0 - t - K|x - x_0|^2\right] + 1 > 0 \quad \text{в} \quad R, \tag{6.17}$$

если потребовать, чтобы $K > 0$ было мало настолько, что

$$4K\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leqslant 1 \quad \text{в} \quad R$$

и размеры параллелепипеда R достаточно малы.

Шаг 4. Параболоид M разбивает параллелепипед R на две части. Обозначим часть, лежащую ниже параболоида M $(h > 0)$ через $R^{'}$.

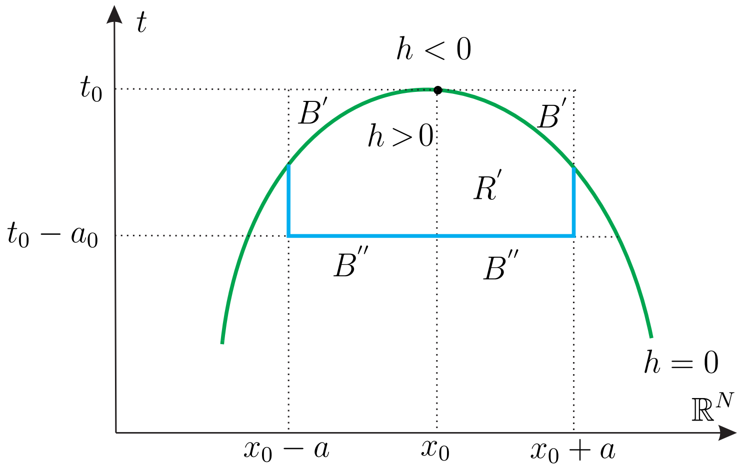


Рис. 24. Множество R'.

Верхняя граница B' множества R' касается гиперплоскости $t=t_0$ только в точке $P_0=(x_0,t_0)$. Поэтому на остальной части B'' границы R' получим

$$u(x,t)\leqslant u(P_0)-\delta \quad \text{для некоторого} \quad \delta>0.$$

Отсюда следует, что для функции

$$v(x,t)\stackrel{def:}{=}u(x,t)+\varepsilon h(x,t) \tag{6.18}$$

имеем

$$v(x,t)<u(P_0) \quad \text{при} \quad (x,t)\in B'' \tag{6.19}$$

для любого достаточно малого $\varepsilon>0$. Далее во всех точках верхней границы B' за исключением точки P_0, имеем

$$v(x,t)=u(x,t)<u(P_0), \quad v(P_0)=u(P_0). \tag{6.20}$$

Поскольку

$$Lv(x,t)=Lu(x,t)+\varepsilon Lh(x,t)>0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in R',$$

то в силу леммы 1 заключаем, что положительный максимум функции $v(x,t)$ достигается в точке P_0. Следовательно [1],

$$\frac{\partial v(P_0)}{\partial t}\geqslant 0, \quad \frac{\partial h(P_0)}{\partial t}=-1<0\Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t}>0. \tag{6.21}$$

[1] Неравенство $\partial v(P_0)/\partial t\geqslant 0$ выполнено, поскольку производная берется по времени в сторону возрастания времени, а в точке P_0 у функции $v(x,t)$ максимум.

З а м е ч а н и е 6. Докажем неравенство

$$\frac{\partial v(P_0)}{\partial t} \geqslant 0.$$

Действительно, поскольку функция $v(x,t)$ дифференцируема в окрестности точки P_0 и в этой точке у функции $v(x,t)$ строгий максимум, то при $t < t_0$ выполнено неравенство

$$\frac{v(x_0,t_0) - v(x_0,t)}{t_0 - t} > 0 \Rightarrow \frac{\partial v(P_0)}{\partial t} \geqslant 0.$$

С другой стороны, из предположения, что $u(x,t)$ достигает положительного максимума в точке P_0 находим, что

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_i} = 0, \quad c(P_0)u(P_0) \leqslant 0, \quad \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0)\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant Lu(P_0) \leqslant -\frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \leqslant 0,$$

что противоречит неравенству (6.21).

Л е м м а д о к а з а н а.

Э т а п IV. Теперь мы можем доказать утверждение теоремы 4.

Шаг 1. Предположим, что

$$u(x,t) \not\equiv u(P_0) \quad \text{в} \quad S(P_0).$$

Тогда найдется такая точка $Q \in S(P_0)$, что $u(Q) < u(P_0)$. Соединим точки Q и P_0 простой непрерывной кривой γ, расположенной в $S(P_0)$ так, чтобы t–координата не убывает от точки Q к точке P_0 (такая кривая существует согласно определению $S(P_0)$). На кривой γ существует точка P_1, в которой $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех точек} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1},$$

где мы обозначили через γ_{Q,P_1} часть кривой γ между Q и P_1.

Шаг 2. Теперь построим параллелепипед

$$x_{1i} - a \leqslant x_i \leqslant x_{1i} + a, \quad t_1 - a < t \leqslant t_1, \quad i = \overline{1,N},$$

где $P_1 = (x_{11}, ..., x_{1N}, t_1)$ и постоянная $a > 0$ настолько мала, что параллелепипед лежит в D. Из леммы 4 вытекает, что $u \equiv u(P_1)$ в этом параллелепипеде, а поэтому и на части кривой γ_{Q,P_1}, попадающей в параллелепипед. Пришли к противоречию.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

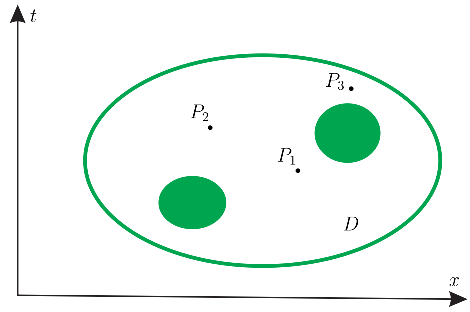


Рис. 25. К задаче 1.

Замечание 7. Заметим, что если в операторе L коэффициент $c(x,t) = 0$, то слова положительный максимум и отрицательный минимум можно заменить на максимум и минимум соответственно.

Задача 1. Изобразить множества $C(P_1)$, $C(P_2)$ и $C(P_3)$ (см. рисунок 25).

Решение. На рисунке 26 изображено множество $C(P_1)$.

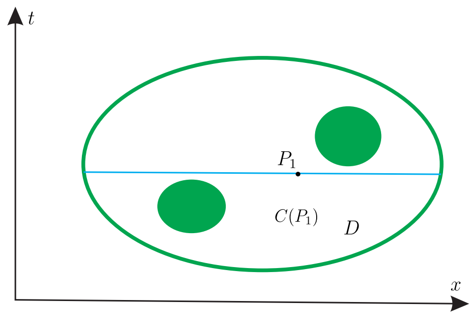


Рис. 26. Множество $C(P_1)$.

На рисунке 27 изображено множество $C(P_2)$.

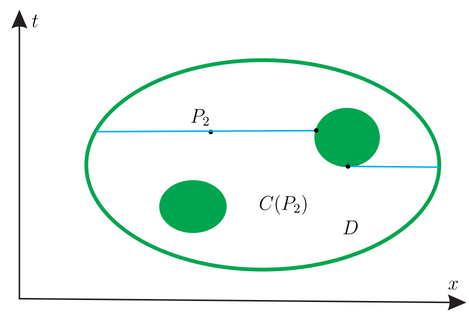


Рис. 27. Множество $C(P_2)$.

На рисунке 28 изображено множество $C(P_3)$.

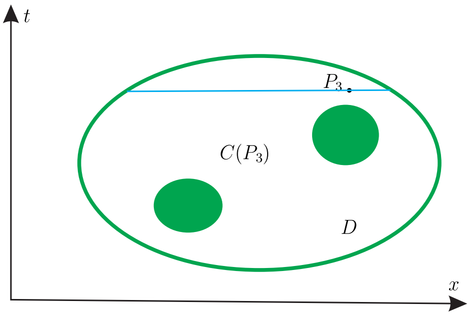


Рис. 28. Множество $C(P_3)$.

§ 7. Первая краевая задача

Напомним снова ряд обозначений, используемых в дальнейшем. Пусть D — ограниченная $(N+1)$–мерная область в $\mathbb{R}^{N+1}$, и пусть $(x,t) = (x_1, ..., x_N, t)$ — переменная точка в $\mathbb{R}^{N+1}$. Предположим, что граница ∂D области D состоит из замыкания области B, лежащей на гиперплоскости $t = 0$, области B_T, лежащей на гиперплоскости $t = T > > 0$, и многообразия S (не обязательно связного), лежащего в полосе $0 < t \leqslant T$.

Определение 1. *Множество $\partial' D \equiv S \cup \overline{B}$ называется нормальной границей области D.*

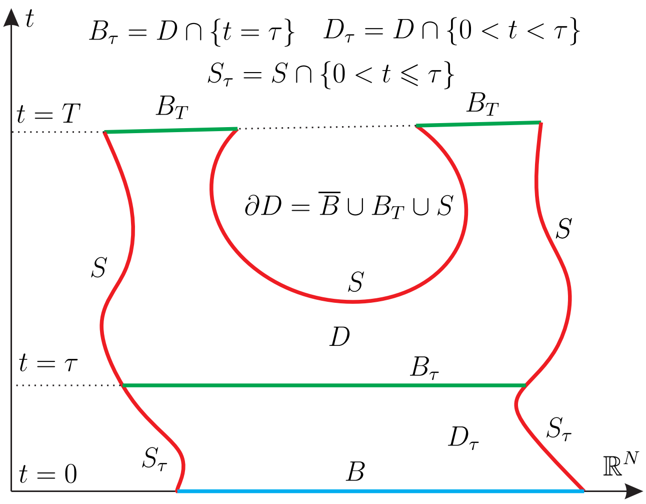


Рис. 29. Область D и ее подмножества.

Введем обозначения

$$D_\tau = D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau = D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau = S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}.$$

Допустим, что для каждого τ, $0 < \tau < T$, B_τ — область (связное открытое множество). В частности, на рисунке 23 область D не удовлетворяет этому условию, поскольку для некоторого τ_0 множество B_{τ_0} — не связно. А область, изображенная на рисунке 9, удовлетворяет этому условию.

Напомним постановку первой краевой задачи.

Определение 2. *Первая краевая задача состоит в нахождении решения уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{7.1}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{на} \quad \overline{B} \tag{7.2}$$

и граничным условиям

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{на} \quad S, \tag{7.3}$$

где f, φ, g — это заданные функции и L — параболический оператор.

Замечание 8. Условия (7.2) и (7.3) можно объединить в одно

$$u(x,t) = h(x,t) \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S. \tag{7.4}$$

Функцию $h(x,t)$ мы будем считать непрерывной на множестве $\overline{B} \cup S$, а решение $u(x,t)$ — непрерывной на $\overline{D}$, имеющей в $D \cup B_T$ непрерывные производные по x до второго порядка включительно, по t — первого порядка.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (A) *и* (B). *Тогда может существовать не более одного решения первой краевой задачи.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть сначала $c(x,t) \leqslant 0$ и $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ — это два решения первой краевой задачи (7.1)—(7.3). Тогда для функции

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

мы получим соответствующую однородную задачу. Следовательно, одновременно

$$Lv(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D \quad \text{и} \quad v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D, \tag{7.5}$$

$$Lv(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \quad \text{и} \quad v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial^{'} D. \tag{7.6}$$

Следовательно, в силу теоремы 2 из (7.5) имеем $v(x,t) \leqslant 0$ в D, а из (7.6) в силу той же теоремы мы получим, что $v(x,t) \geqslant 0$ в D. Значит, $v(x,t) = 0$ в D.

Шаг 2. Пусть теперь функция $c(x,t)$ может быть положительной в области D. Положим по определению

$$c_0 \stackrel{def:}{=} \sup_{(x,t)\in D} c(x,t) > 0.$$

Тогда перейдем к новой функции $w(x,t)$ следующего вида:

$$w(x,t) = e^{-c_0 t} u(x,t).$$

При этом уравнение $Lu(x,t) = 0$ перейдет в уравнение $(L - c_0)w(x,t) = 0$, в котором уже новый коэффициент $c(x,t) - c_0 \leqslant 0$. Далее рассуждаем как на шаге 1.

Теорема доказана.

Пример неединственности. [14] Заметим, что требование ограниченности коэффициентов параболического оператора L является существенным для применения принципа максимума с целью доказательства единственности решения первой краевой задачи. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{1}{t}u_{xx} + \frac{2}{t}u - u_t = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in (0,\pi), \tag{7.7}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{7.8}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{7.9}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$u(x,t) = at\sin x \quad \text{для любой постоянной} \quad a \in \mathbb{R}^1$$

является решением однородной первой краевой задачи (7.7)–(7.9).

Нелинейный параболический оператор. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$Lu(x,t) \stackrel{def:}{=} F\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{7.10}$$

где $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ — это нелинейная функция своих аргументов.

Определение 3. *Нелинейный оператор* L, *определенный формулой* (7.4), *называется параболическим в точке* $(x_0,t_0) \in D$, *если для любых* $p, p_1, ..., p_N, p_{11}, ..., p_{NN}$ *матрица*

$$\left(\frac{\partial F(x_0,t_0,p,p_i,p_{ij})}{\partial p_{hk}}\right) \tag{7.11}$$

является положительно определенной.

Заметим, что если функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ является непрерывно дифференцируемой по переменным (p,p_i,p_{ij}), то справедлива формула Адамара среднего значения следующего вида:

$$F(x,t,u,u_i,u_{ij}) - F(x,t,v,v_i,v_{ij}) = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(u_{ij}-v_{ij}) + \sum_{i=1}^{N} b_i(u_i - v_i) + c(u-v), \quad (7.12)$$

где

$$(a_{ij}, b_i, c) = \\ = \int_0^1 \left(F_{p_{ij}}, F_{p_i}, F_p\right)(x,t,su+(1-s)v, su_i+(1-s)v_i, su_{ij}+(1-s)v_{ij})\,ds. \quad (7.13)$$

Воспользовавшись формулой (7.12) мы можем распространить результат теоремы 5 на нелинейный случай.

Следствия из принципа максимума. Справедливы следующие утверждения:

Следствие 1. *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^N$ *— ограниченная область, справедливы свойства* (A), (B) *и* (C) *и выполнено равенство* $Lu(x,t) = 0$ *при* $(x,t) \in D$, *тогда справедлива следующая оценка*:

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |u(x,t)| \quad (7.14)$$

Доказательство.

Шаг 1. Введем следующее обозначение:

$$M = \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |u(x,t)|. \quad (7.15)$$

Тогда для новой функции

$$v(x,t) = u(x,t) - M$$

имеем

$$Lv(x,t) = -c(x,t)M \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in D, \quad v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Таким образом, в силу теоремы 2 получим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup \partial' D \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Шаг 2. Поскольку функция $-u(x,t)$ является решением уравнения $L(-u)=0$, то применяя результат шага 1 для функции $-u(x,t)$ мы получим оценку

$$-u(x,t) \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup \partial' D.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* $c(x,t) \leqslant c_0$ *при* $c_0 > 0$. *Если* $Lu(x,t) = 0$ *в* D, *то*

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant e^{c_0 T} \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |u(x,t)|. \tag{7.16}$$

Доказательство.

Достаточно применить результат следствия 1 к функции

$$\begin{aligned} v(x,t) = u(x,t)e^{-c_0 t} \Rightarrow (L - \mathrm{c}_0)v(x,t) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \max_{(x,t)\in\overline{D}} |v(x,t)| \leqslant \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |v(x,t)| \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-c_0 T} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} |u(x,t)| \end{aligned}$$

и получить неравенство.

Следствие доказано.

§ 8. Некоторые обобщения принципа максимума

Справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 6. *Пусть выполнены условия сильного принципа максимума* 4, *но без требования* $c(x,t) \leqslant 0$. *Если* $u(x,t) \leqslant 0$ $(u(x,t) \geqslant 0)$ *в области* D *и* $u(P_0) = 0$ *в точке* $P_0 \in D$ *и если* $Lu(x,t) \leqslant 0$ $(Lu(x,t) \leqslant 0)$ *в* D, *то* $u(x,t) \equiv 0$ *в* $C(P_0)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $u(x,t) \leqslant 0$ и $Lu(x,t) \geqslant 0$ в D.

Шаг 1. Функция

$$v(x,t) = u(x,t) \exp\left[-\alpha x_1\right] \quad \text{при} \quad \alpha > 0$$

удовлетворяет следующему неравенству:

$$\begin{aligned} \widetilde{L}v(x,t) \stackrel{def}{=} (L - c(x,t)I)v(x,t) + 2\alpha \sum_{i=1}^{N} a_{1i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} \geqslant \\ \geqslant -\Big(a_{11}(x,t)\alpha^2 + b_1(x,t)\alpha + c(x,t)\Big) v(x,t). \end{aligned} \tag{8.1}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} = e^{-\alpha x_1}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} - \alpha b_1(x,t)v(x,t),$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = e^{-\alpha x_1}\sum_{i,j=2,2}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + a_{11}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_1^2} + 2\sum_{i=2}^{N} a_{1i}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_1 \partial x_i},$$

$$a_{11}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_1^2} = -\alpha^2 a_{11}(x,t)v(x,t) + \\ + e^{-\alpha x_1}a_{11}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2} - 2\alpha a_{11}(x,t)e^{-\alpha x_1}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1},$$

$$2\sum_{i=2}^{N} a_{1i}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_1 \partial x_i} = 2e^{-\alpha x_1}\sum_{i=2}^{N} a_{1i}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1 \partial x_i} - \\ - 2\alpha\sum_{i=2}^{N} a_{1i}(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i},$$

$$2\alpha\sum_{i=1}^{N} a_{1i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} = 2\alpha\sum_{i=2}^{N} a_{1i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + 2\alpha a_{11}(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_1} = \\ = 2\alpha\sum_{i=2}^{N} a_{1i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + 2\alpha a_{11}(x,t)e^{-\alpha x_1}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1} - 2\alpha a_{11}(x,t)v(x,t).$$

Заметим, что

$$-2\alpha a_{11}(x,t)v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Собирая вместе полученные равенства, получим (8.1). ⊠

Шаг 2. В силу равномерной параболичности оператора L найдется такое $\vartheta > 0$, что

$$a_{11}(x,t) \geqslant \vartheta > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Поэтому при достаточно большом $\alpha > 0$ получим неравенство

$$a_{11}(x,t)\alpha^2 + b_1(x,t)\alpha + c(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{8.2}$$

Пусть $N \subset D$ — это произвольная окрестность точки P_0. Тогда

$$v(x,t) = u(x,t)\exp\left[-\alpha x_1\right] \leqslant 0 \quad \text{в} \quad N, \tag{8.3}$$

то из (8.2), (8.3) и (8.1) получим неравенство

$$\widetilde{L}v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad N. \tag{8.4}$$

Причем в операторе $\widetilde{L}$ отсутствует свободное слагаемое вида $\widetilde{c}(x,t)I$. Поэтому мы можем применить теорему 4 к функции

$$v(x,t)+1, \quad \widetilde{L}[v(x,t)+1] = \widetilde{L}v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad N$$

и заключить, что эта функция достигает положительного максимума в точке $P_0 \in D$.

Шаг 3. Следовательно,

$$v(x,t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad N \cap C(P_0) \Rightarrow u(x,t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad N \cap C(P_0). \tag{8.5}$$

Введем следующее множество:

$$\mathfrak{N} \equiv \left\{x \in C(P_0): \; u(x,t) = 0\right\}. \tag{8.6}$$

В силу свойства (8.5) и произвольности окрестности $N \subset D$ точки $P_0 \in D$ множество $\mathfrak{N}$ открыто в $C(P_0)$. С другой стороны, в силу того, что $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ это множество замкнуто в $C(P_0)$. Поскольку множество $C(P_0)$ связно, то $\mathfrak{N} = C(P_0)$.

Теорема доказана.

Непосредственным следствием этой теоремы является следующая:

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* (A) *и* (B). *Если* $u(x,t) \leqslant 0$ *и* $Lu(x,t) \geqslant 0$ *в* $S(P_0)$ *или* $u(x,t) \geqslant 0$ *и* $Lu(x,t) \leqslant 0$ *в* $S(P_0)$ *и* $u(P_0) = 0$, *то*

$$u(x,t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad S(P_0). \tag{8.7}$$

§ 9. Положительные решения задачи Коши

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения:

$$\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \quad \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

При этом функции $u(x,t)$ мы будем считать непрерывными в Ω.

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 5. *Пусть оператор* L *удовлетворяет предположениям* (A) *и* (B) *в* Ω_0, *и пусть* $c(x,t)$ *ограничено сверху. Если* $Lu(x,t) \leqslant 0$ *в* Ω_0, $u(x,0) \geqslant 0$ *в* $\mathbb{R}^N$ *и равномерно по* $t \in [0,T]$ *существует*

$$\liminf_{|x|\to+\infty} u(x,t) \geqslant 0,$$

то $u(x,t) \geqslant 0$ *в* Ω.

Доказательство.

Шаг 1. Можно считать, что $c(x,t) \leqslant 0$, в противном случае мы бы сделали преобразование $v = ue^{-\gamma t}$ при $\gamma \geqslant c(x,t)$. Далее для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$u(x,t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

а также

$$u(x,t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad |x| = R, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

причем

$$L(u(x,t) + \varepsilon) = c(x,t)\varepsilon \leqslant 0 \Rightarrow u(x,t) + \varepsilon > 0,$$

если $|x| \leqslant R$ и $t \in [0,T]$ в силу принципа максимума (см. теорему 2).

Шаг 2. Устремляя $\varepsilon \to +0$ мы получим утверждение этой леммы.

Лемма доказана.

Сделаем следующие предположения относительно коэффициентов параболического оператора L:

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(1+|x|), \quad |c(x,t)| \leqslant M(1+|x|^2) \tag{9.1}$$

при $(x,t) \in \Omega_0$ и $i,j = \overline{1,N}$. Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 8. *Пусть L — параболический оператор с коэффициентами, непрерывными в Ω_0 и удовлетворяющими условиям* (9.1). *Предположим, что $Lu(x,t) \leqslant 0$ в Ω_0 и*

$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega \tag{9.2}$$

для некоторых положительных постоянных[1] *B и β. Если $u(x,0) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$, то $u(x,t) \geqslant 0$ в Ω.*

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим функцию

$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{1-\mu t} + \nu t\right], \quad t \in [0, 1/(2\mu)], \tag{9.3}$$

удовлетворяющую равенству

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} = \frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)x_i x_j + \frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) + \frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)x_i + c(x,t) - \frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} - \nu. \tag{9.4}$$

[1] Здесь мы снова сталкиваемся с необходимостью рассматривать решения в классе растущих функций А. Н. Тихонова.

С помощью оценок (9.1) получаем следующую оценку:

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} \leqslant \left(16k^2N^2M^2 + 8kNM + M - \mu k\right)|x|^2 + (8kNM + M - \nu)\,. \tag{9.5}$$

Таким образом, для любого $k > 0$ найдутся такие достаточно большие постоянные $\mu > 0$ и $\nu > 0$, что будет выполнено неравенство

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0. \tag{9.6}$$

Шаг 2. Рассмотрим теперь функцию $v(x,t)$, определенную равенством

$$u(x,t) = H(x,t)v(x,t),$$

где $H(x,t)$ — это функция (9.3) с фиксированными $k > \beta$ и с $\mu > 0$ и $\nu > 0$, при которых выполняется неравенство (9.6) для $0 \leqslant t \leqslant 1/(2\mu)$. Заметим, что выполнены следующие неравенства:

$$v(x,t) \geqslant -B\frac{\exp\left\{\beta|x|^2\right\}}{H(x,t)} \geqslant -B\exp\left[-(k-\beta)|x|^2\right]e^{-\nu t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \liminf_{|x|\to+\infty} v(x,t) \geqslant 0$$

равномерно по $t \in [0, 1/(2\mu)]$.

Шаг 3. Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{L}v(x,t) \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \overline{b}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \overline{c}v - \frac{\partial v}{\partial t} = \overline{f},$$

где

$$\overline{f} = \frac{Lu(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0, \quad \overline{b}_i = b_i + 2\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \overline{c} = \frac{LH}{H} \leqslant 0.$$

При помощи леммы 5 мы приходим к выводу о том, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0, 1/(2\mu)].$$

Шаг 4. Далее повторяем рассуждения из шагов 1–3 но для области $\mathbb{R}^N \otimes [1/(2\mu), 1/\mu]$ с функцией

$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{2-\mu t} + \nu t\right].$$

Далее по индукции.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Замечание 9. Отметим, что доказанная теорема иногда носит название *теорема Фрагмена–Линделёфа*.

Задача 2. Пусть L — параболический в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T)$ оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими (9.1). Предположим, кроме того, $c(x,t) \geqslant 0$ и

$$u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$, и

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0.$$

Доказать, что из условия

$$u(x,0) \geqslant M > 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - M.$$

Поскольку $c(x,t) \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) - Mc(x,t) \leqslant 0.$$

Кроме того,

$$v(x,t) \geqslant -M - B \exp\left[\beta|x|^2\right] \geqslant -(M+B) \exp\left[\beta|x|^2\right], \quad v(x,0) \geqslant 0.$$

Следовательно, из теоремы 8, примененный к функции $v(x,t)$ мы получим, что

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Задача 3. [11] Пусть L — это параболический оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими условиям (9.1). Пусть, кроме того,

$$c(x,t) \geqslant \alpha|x|^2 + \gamma, \quad \alpha > 0, \tag{9.7}$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию роста

$$u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$. Предположим, что

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,0) \geqslant M_1 > 0.$$

Доказать, что выполнено неравенство

$$u(x,t) \geqslant M_1 \exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right], \quad \lambda > 0.$$

Решение. Рассмотрим [1] следующую функцию:

$$v(x,t) \overset{def:}{=} u(x,t) - M_1 \exp\left[\lambda |x|^2 t + \nu t\right].$$

Справедливы следующие вычисления:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \exp\left(\lambda |x|^2 t + \nu t\right) = 2\lambda x_i t \exp\left(\lambda |x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp\left(\lambda |x|^2 t + \nu t\right) = \left(\lambda |x|^2 + \nu\right) \exp\left(\lambda |x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \exp\left(\lambda |x|^2 t + \nu t\right) = \left(2\lambda t \delta_{ij} + 4\lambda^2 t^2 x_i x_j\right) \exp\left(\lambda |x|^2 t + \nu t\right).$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} Lv(x,t) = Lu(x,t) - M_1 L \exp\left(\lambda |x|^2 t + \nu t\right) \leqslant \\ \leqslant -M_1 \Biggl(4\lambda^2 t^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} + 2\lambda t \sum_{i=1}^{N} a_{ii} + \\ + 2\lambda t \sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c - (\lambda |x|^2 + \nu)\Biggr) \exp\left(\lambda |x|^2 t + \nu t\right). \end{aligned}$$

Заметим, что в силу равномерной параболичности оператора L вытекают неравенства

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} \geqslant \vartheta |x|^2, \quad a_{ii} \geqslant \vartheta.$$

Кроме того, в силу условий (9.1) и (9.7) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} Lv(x,t) \leqslant -M_1 \Biggl(4\lambda^2 t^2 \vartheta |x|^2 + 2\lambda t N \vartheta - \\ - 2\lambda t M |x|(1 + |x|) + (\alpha - \lambda)|x|^2 + \gamma - \nu\Biggr) \leqslant 0. \end{aligned}$$

при достаточно большом $\alpha > \lambda$ и при $\gamma > \nu$. Теперь заметим, что

$$v(x,t) \geqslant -B \exp\left(\beta |x|^2\right) - M_1 \exp\left(\lambda |x|^2 T + \nu T\right) \geqslant$$

[1] Переводчиками в этом месте в книге [11] допущена опечатка в выборе вспомогательной функции.

$$\geqslant -B_1(T)\exp\left(\beta_1(T)|x|^2\right)$$

при некоторых $B_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Кроме того,

$$v(x,0) \geqslant 0.$$

В силу теоремы 8 мы приходим к утверждению задачи.

Задача 4. [11] Пусть L — это параболический в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ оператор с непрерывными коэффициентами и для некоторой постоянной $M > 0$ выполнены неравенства

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(|x|^2+1), \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(|x|+1), \quad c(x,t) \leqslant M. \tag{9.8}$$

Доказать, что если

$$u(x,t) \geqslant -m(|x|^q+1) \quad \text{при} \quad \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T] \tag{9.9}$$

для некоторых положительных постоянных A и q, то из условия

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{9.10}$$

вытекает неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]. \tag{9.11}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].) Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{def}{=} \frac{2m}{r_0^{2p-q}}(|x|^2+Kt)^p e^{\alpha t}, \quad 2p > q. \tag{9.12}$$

Выберем постоянные $K > 0$ и $\alpha > 0$ таким образом, чтобы для всех $r_0 > 0$ величина $Lw(x,t)$ была отрицательной. Действительно,

$$a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{4mp}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[\frac{2x_i x_j}{|x|^2+Kt} + \delta_{ij}\right] a_{ij}(x,t),$$

$$b_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{4mp}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} x_i b_i(x,t),$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[pK + \alpha\left(|x|^2+Kt\right)\right].$$

Следовательно,

$$Lw(x,t) = \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\Bigg[4p\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\frac{x_i x_j}{|x|^2+Kt} + 2p\sum_{i=1}^{N} a_{ii} +$$

$$+ 2p\sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c\left(|x|^2 + Kt\right) - pK - \alpha\left(|x|^2 + Kt\right)\Bigg].$$

Рассмотрим два случая — $|x| \geqslant 1$ и $|x| < 1$. В первом случае с учетом неравенств (9.8) получим следующую оценку:

$$Lw(x,t) \leqslant \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\times \\ \times\left[\left(4pN^2 + 2p(N+1) + 1\right)M - \alpha\right]|x|^2 - \\ - pK + K(M-\alpha)t < 0, \quad (9.13)$$

если

$$\alpha > M\left(4pN^2 + 2p(N+1) + 1\right). \quad (9.14)$$

Во втором случае заметим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant 2M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant 2M, \quad c(x,t) \leqslant M. \quad (9.15)$$

Поэтому при $|x| < 1$ справедлива оценка

$$Lw(x,t) = \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\times \\ \times\left[16pM + M - pK + (M-\alpha)Kt\right] < 0 \quad (9.16)$$

при выполнении условия (9.14) на $\alpha > 0$ и условия на $K > 0$

$$16pM + M < pK. \quad (9.17)$$

Таким образом, имеем при выполнении неравенств (9.14) и (9.17)

$$L(w(x,t) + u(x,t)) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \quad (9.18)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$v(x,t) \overset{def:}{=} w(x,t) + u(x,t) \quad (9.19)$$

в цилиндре $D_{r_0,T} = \{|x| \leqslant r_0\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant T\}$. При $t = 0$ имеем

$$v(x,0) = u_0(x) + 2mr_0^q \geqslant 0, \quad (9.20)$$

а при $r = r_0$ имеем

$$v(x,t) \geqslant \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(r_0^q + Kt\right)^p e^{\alpha t} - m\left(r_0^q + 1\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2mr_0^q - m(r_0^q + 1) = m(r_0^q - 1) > 0 \quad (9.21)$$

при $r_0 > 1$. Согласно принципу максимума имеем

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) + w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_{r_0,T}. \qquad (9.22)$$

Осталось при фиксированном $(x,t) \in D_{r_0,T}$ перейти к пределу при $r_0 \to \to +\infty$ и из явного вида (9.12) функции $w(x,t)$ получить следующее неравенство:

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

Контрпример к задаче 4. Условия (9.8), налагаемые на коэффициенты оператора L, нельзя ослабить, если ограничиться оценками коэффициентов через степени $|x|$. Действительно, при любом $\delta > 0$ функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{F_\delta(x,t)}^{+\infty} \exp\{-y^2\}\,dy & \text{для} \quad 0 < t \leqslant T, \\ 0 & \text{для} \quad t = 0, \end{cases}$$

где

$$F_\delta(x,t) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^\delta}{2\sqrt{t}},$$

является непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^1 \otimes [0,T]$, обращается в нуль при $t = 0$ и удовлетворяет при $t > 0$ уравнению

$$\frac{1}{\delta^2}\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) u_{xx} + \\ + \frac{1}{\delta^2}\left(x - \delta\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) u_x - u_t = 0.$$

В этом уравнении коэффициент при u_{xx} растет не быстрее, чем $M|x|^{2+2\delta}$, а коэффициент при u_x растет не быстрее, чем $M|x|^{1+2\delta.}$ Следовательно, при таком росте коэффициентов нарушается единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций.

Задача 5. [11] Пусть коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ ограничены в $\Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$:

$$|a_{ij}(x,t)| < M, \quad |b_i(x,t)| < M, \quad |c(x,t)| < M, \qquad (9.23)$$

а функция $u(x,t)$ непрерывна в Ω и удовлетворяет в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ неравенствам

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,t) \geqslant -\exp\left[\beta(|x|^2+1)\right], \qquad (9.24)$$

где $\beta > 0$ — некоторая постоянная. Доказать, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T] \tag{9.25}$$

при условии

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{9.26}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].)

Для получения утверждения задачи нужно рассмотреть вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \exp\left[2\beta(|x|^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] \tag{9.27}$$

и повторить рассуждения при решении предыдущей задачи и проверить, что при надлежащим образом выбранной постоянной $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$Lw(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \tag{9.28}$$

Действительно, имеем

$$Lw(x,t) = w(x,t)e^{\alpha t}\left[4\beta\sum_{i=1}^{N} a_{ii} + 16\beta^2 e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}x_ix_j + \right.$$
$$\left. + 4\beta\sum_{i=1}^{N} b_i x_i + ce^{-\alpha t} - 2\beta\alpha(|x|^2+1)\right] < 0$$

при условии

$$t \leqslant t_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = M\left(\frac{1}{\beta} + 8N + 48\beta N\right).$$

Теперь рассмотрим новую функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t) + u(x,t). \tag{9.29}$$

В цилиндре $D_{r_0,t_0} = \{|x| \leqslant r_0\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ при $t = 0$ имеем

$$v(x,0) = u_0(x) + w(x,0) \geqslant \exp\left[2\beta(|x|^2+1) - \beta(r_0^2+1)\right] \geqslant 0,$$

а при $r = r_0$ имеем

$$v(x,t) = \exp\left[2\beta(r_0^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] + u_0(x) \geqslant$$
$$\geqslant \exp\left[\beta(r_0^2+1)\right] - \exp\left[\beta(r_0^2+1)\right] = 0. \tag{9.30}$$

В силу принципа максимума в цилиндре D_{r_0,t_0} мы получим, что

$$v(x,t) = u(x,t) + w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_{r_0,t_0}.$$

Переходя к пределу при $r_0 \to +\infty$ мы получим, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,t_0].$$

Далее нужно повторить рассуждения последовательно в полосах

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{2}{\alpha}, \quad \frac{2}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{3}{\alpha}, \cdots \frac{n}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{n+1}{\alpha}, \cdots$$

и в результате получим, что утверждение задачи выполнено для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$.

Замечание к задаче 5. Для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

известны более сильные результаты, чем результат задачи 4. В частности, в работе С. Тэклинда [15] доказано, что решение задачи Коши единственно в классе функций, удовлетворяющих условию

$$|u(x,t)| \leqslant \exp\left[\delta |x| h(|x|)\right] \quad \text{при} \quad |x| > 1,$$

где $\delta > 0$ — это произвольная постоянная, $h(r)$ — положительная неубывающая функция и

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dr}{h(r)} = +\infty.$$

Причем в случае сходимости последнего интеграла единственность решения задачи Коши нарушается.

Задача 6. [11] Пусть непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \tag{9.31}$$

причем

$$|u(x,0)| \leqslant M_1, \quad |f(x,t)| \leqslant M_2, \quad c(x,t) \leqslant M_3, \tag{9.32}$$

коэффициенты a_{ij} и b_i подчинены условиям (9.8). Тогда всюду в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ выполнено неравенство

$$|u(x,t)| \leqslant e^{M_3 t} \left(M_1 + M_2 t\right). \tag{9.33}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].)

Для доказательства рассмотрим вспомогательные функции

$$w_{\pm}(x,t) \stackrel{def:}{=} e^{M_3 t}\,(M_1 + M_2 t) \pm u(x,t).$$

По условию задачи имеем

$$w_{\pm}(x,0) \geqslant 0.$$

Вычислим $Lw_{\pm}(x,t)$. Имеем

$$Lw_{\pm}(x,t) = e^{M_3 t}\,[(c - M_3)(M_1 + M_2 t) - M_2] \pm f \leqslant -M_2 e^{M_3 t} \pm f \leqslant 0$$

Отметим, что в силу ограниченности в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ решения $u(x,t)$ найдется такая постоянная $m > 0$, что

$$u(x,t) \geqslant -m \Rightarrow u(x,t) \geqslant -m(|x|^q + 1).$$

В силу результата задачи 3 получим

$$w_{\pm}(x,t) \geqslant 0 \quad \text{всюду в} \quad \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает, что справедлива следующая теорема:

Теорема 9. *Пусть L — это параболический оператор с непрерывными в $\mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ коэффициенами и выполняются условия* (9.1). *Тогда существует не более одного решения задачи Коши*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \tag{9.34}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N, \tag{9.35}$$

удовлетворяющего условию роста А. Н. Тихонова

$$|u(x,t)| \leqslant B \exp\left[\beta |x|^2\right] \tag{9.36}$$

при некоторых положительных константах B и β.

Доказательство.

Пусть $f(x,t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$. Из условия (9.36) вытекает, что

$$u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta |x|^2\right] \quad \text{либо} \quad -u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta |x|^2\right].$$

в первом случае из теоремы 8 получим, что $u(x,t) \geqslant 0$, а во втором случае получим, что $-u(x,t) \geqslant 0$. Итак, $u(x,t) \equiv 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема Виддера. [4] Отметим, что имеет место следующий важный результат: *любая неотрицательная функция,* *непрерывная в* $\mathbb{R}^1 \otimes [0, +\infty)$, *равная нулю при* $t = 0$ *и удовлетворяющая уравнению теплопроводности*

$$u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{в} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^1 \otimes [0, +\infty),$$

равна нулю тождественно.

С другой стороны, А. Н. Тихонов предложил следующий пример:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \quad g(t) = \exp(-t^2) \quad t > 0, \quad g(0) = 0, \tag{9.37}$$

который показывает, что условие знакоположительности существенно. Кроме того, ясно, что функция (9.37) не удовлетворяет условию роста А. Н. Тихонова.

П р и м е р н е е д и н с т в е н н о с т и. [14] Заметим, что во всех теоремах единственности мы требовали, чтобы функция $u(x, t)$ была непрерывна вплоть до границы области D. Например, нельзя потребовать, чтобы функция была непрерывна по t для каждого x. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{9.38}$$

$$\lim_{t \to +0} u(x, t) = 0 \quad \text{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{9.39}$$

Решение этой задачи в классе А. Н. Тихонова имеет следующий явный вид:

$$u(x, t) = \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right]. \tag{9.40}$$

Отметим, что построенное решение является неограниченным в любой окрестности точки $(0, 0)$. Действительно, запишем функцию (9.40) в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{2}{t} \frac{x}{2\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right].$$

Будем стремить точку (x, t) к точке $(0, 0)$ по параболе

$$x = a2\sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \to +0, \quad a > 0,$$

тогда

$$u(x(t), t) = \frac{2}{t} a e^{-a^2} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

§ 10. Теорема типа Жиро

Для того, чтобы исследовать вопрос о единственности решения *второй* и *третьей краевой задачи* нам необходимо доказать так называемую *теорему* типа Жиро о знаке косой производной. Предварительно дадим определение *свойства строгой сферичности изнутри*.

Определение 4. *Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — это точка на границе ∂D области D. Если существует такой замкнутый шар B с центром в точке $(\overline{x}, \overline{t})$, что $B \subset \overline{D}$, $B \cap \partial D = \{P_0\}$, и если $\overline{x} \neq x_0$, то мы скажем что P_0 обладает свойством строгой сферичности изнутри.*

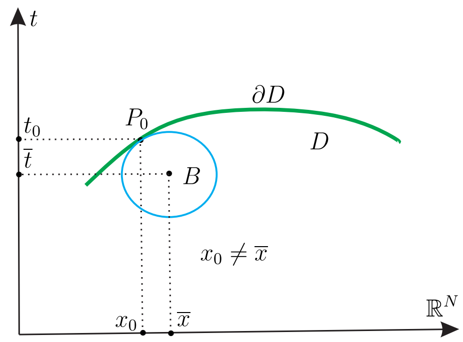


Рис. 30. К определению 4 строгой сферичности.

Замечание 10. Отметим, что если убрать требование $\overline{x} \neq x_0$ в определении 4, то мы получим *свойство сферичности изнутри*.

Замечание 11. Отметим, что свойство строгой сферичности не выполняется для многих естественных областей. Смотри рисунок 26. На этом рисунке, во–первых, отмечены точки A_0, B_0, C_0 и D_0, которые не обладают даже свойством сферичности (не строгой) изнутри, поскольку не существует малого шара, который коснулся бы этих точек оставаясь внутри области D. Далее, нижняя крышка $\overline{D} \cap \{t = 0\}$ цилиндра D обладает свойством сферичности изнутри, но никакая точка нижней крышки не обладает свойством строгой сферичности изнутри. Аналогичным образом верхняя крышка B_T цилиндра D также обладает лишь свойством сферичности изнутри, а не строгой сферичности изнутри. Наконец, лишь боковая поверхность $\overline{D} \cap \{0 < t < T\}$ обладает свойством строгой сферичности изнутри. Хотя, именно на боковой поверхности в случае второй и третьей краевых задач ставится условия с косой производной.

Предположим теперь, что $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и выполнены, стало быть, все условия теоремы 4, причем $u(x,t) \neq const$ в области D. Пусть, кроме того,

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{10.1}$$

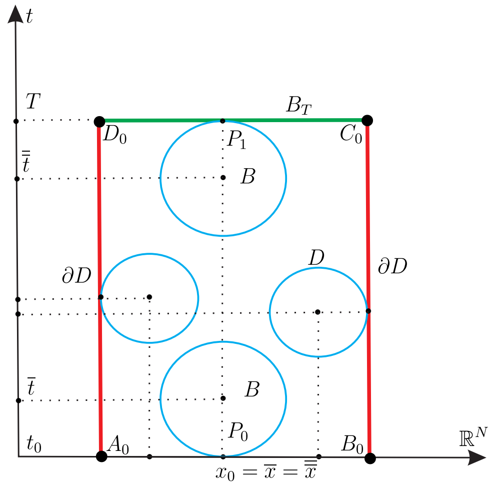


Рис. 31. К замечанию 11.

Если $u(x,t)$ имеет положительный максимум $M > 0$ в $\overline{D}$, то в силу условия теоремы 4 функция $u(x,t)$ в некоторой точке $P_0 \in \partial' D = S \cup \overline{B}$ (на параболической границе области D) достигает максимума

$$u(P_0) = M \quad \text{в точке} \quad P_0 \in \partial' D. \tag{10.2}$$

При этих условиях справедлива следующая *теорема типа Жиро*:

Теорема типа Жиро. *Если выполняются высказанные выше условия, точка P_0 обладает свойством строгой сферичности изнутри и существует окрестность V точки P_0, такая, что*

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad D \cap V, \tag{10.3}$$

то для любого некасательного внутреннего направления l_{P_0} выполнено неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) \stackrel{def}{=} \liminf_{|(x,t)-(x_0,t_0)| \to +0,\ (x,t) \in B} (l_{P_0}, D_{x,t})\, u(x,t) < 0, \tag{10.4}$$

где

$$D_{x,t} = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}, \partial_t)\,.$$

Замечание 12. Некасательным внутренним направлением мы называем направление из точки P_0 внутрь шара B, граница которого касается ∂D в точке P_0.

Доказательство.

Шаг 1. Можно считать, что внутренность замкнутого шара B лежит в $D \cap V$ [1]. Обозначим границу B через ∂B.

[1] Можно просто выбрать шар B достаточно малым.

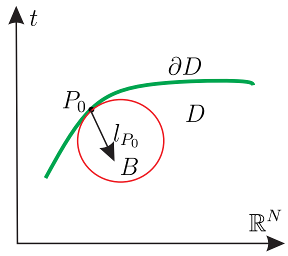


Рис. 32. Некасательное внутреннее направление и шар B.

Пусть π — это гиперплоскость, которая делит пространство $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ на два полупространства π^- и π^+ так, что

$$\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \pi^-, \quad P_0 = (x_0, t_0) \in \pi^+.$$

Так как $\overline{x} \neq x_0$, мы можем выбрать гиперплоскость π таким образом, чтобы

$$B^+ \stackrel{def:}{=} \pi^+ \cap B \neq \varnothing \quad \text{и} \quad |x - \overline{x}| \geqslant a > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in B^+.$$

При этом граница B^+ состоит из части $C_1 \in \partial B$ и другой части $C_2 \in B \cap \pi$.

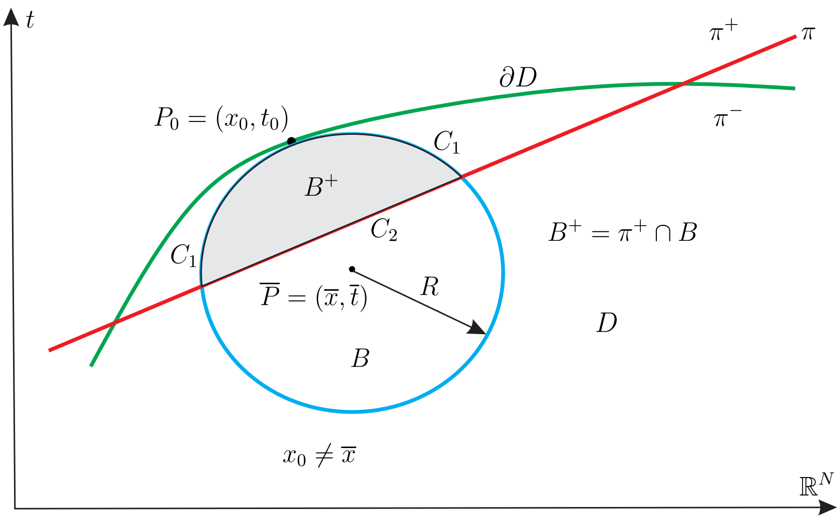


Рис. 33. Множество B^+ и его граница $C_1 \cup C_2$.

Шаг 2. Введем функцию

$$h(x,t) \stackrel{def:}{=} \exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2 + |t-\overline{t}|^2\right]\right\} - \exp\left\{-\alpha R^2\right\}, \qquad (10.5)$$

где R — это радиус сферы ∂B (граница шара B). Имеем

$$h(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in C_1, \quad h(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B^+}, \tag{10.6}$$

причем можно проверить, что [1])

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+ \tag{10.7}$$

при достаточно большом $\alpha > 0$.

Шаг 3. Введем следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t), \quad \varepsilon > 0. \tag{10.8}$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $v(x,t)$ будет удовлетворять условиям

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_2, \quad v(x,t) = u(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_1 \backslash \{P_0\}, \tag{10.9}$$

причем

$$v(P_0) = u(P_0) = M. \tag{10.10}$$

Поскольку

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+, \tag{10.11}$$

то функция $v(x,t)$ в силу принципа максимума не может принимать своего максимального значения $M > 0$ во внутренней точке B^+. Итак,

$$v(x,t) < M \quad \text{внутри} \quad B^+. \tag{10.12}$$

Шаг 4. Из (10.10) и (10.12) вытекает, что [2])

$$\frac{\partial v}{\partial l_{P_0}}(P_0) \leqslant 0. \tag{10.13}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial n_{x,t}} > 0, \quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial \tau_{x,t}} = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) = P_0, \tag{10.14}$$

где $n_{x,t}$ — это внутренняя нормаль к сфере ∂B в точке P_0, а $\tau_{x,t}$ — это касательная к сфере ∂B в той же точке P_0. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial l_{P_0}} = \cos(l_{P_0}, n_{P_0}) \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} + \cos(l_{P_0}, \tau_{P_0}) \frac{\partial}{\partial \tau_{P_0}},$$

---

[1]) Здесь существенно, что $x_0 \neq \overline{x}$ и поэтому выполнено следующее неравенство: $|x - \overline{x}| \geqslant a > 0$ для всех $(x,t) \in B^+$.

[2]) Ниже следующее неравенство выполнено, поскольку l_{P_0} — это внутреннее направление, а поскольку в граничной точке P_0 у функции $u(x,t)$ строгий максимум, то по любому внешнему направлению τ к точке P_0 выполнено неравенство $\partial v(P_0)/\partial \tau \geqslant 0$.

$$\cos(l_{P_0}, n_{P_0}) > 0, \quad \cos(l_{P_0}, \tau_{P_0}) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}}\,(P_0) > 0. \tag{10.15}$$

Итак, из (10.13) и (10.15) вытекает, что

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}\,(P_0) = \frac{\partial v}{\partial l_{P_0}}\,(P_0) - \varepsilon\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}}\,(P_0) < 0. \tag{10.16}$$

Лемма доказана.

Замечание 13. Предположение, что

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad D \cap V,$$

является, конечно, существенным, так как в противном случае $u(x,t)$ могла бы быть постоянной в $D \cap V$ и тогда бы

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}\,(P_0) = 0.$$

Контрпример к теореме типа Жиро 1. Заметим, что если P_0 — это угловая точка границы ∂D, то теорема типа Жиро может оказаться неверной. Например, если определить область D неравенствами

$$x^2 + t^2 < R^2, \quad t < \gamma_1 x, \quad t < \gamma_2 x, \quad \gamma_1 > 0 > \gamma_2,$$

и положить, что

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$
$$u(x,t) = (t - \gamma_1 x)(\gamma_2 x - t) + 1,$$

то

$$u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D, \quad u(x,t) = 1 \quad \text{в} \quad P_0,$$
$$Lu(x,t) = -2\gamma_1\gamma_2 + \overline{\overline{o}}(|x| + |t|) > 0,$$

если $R > 0$ достаточно малое. Однако,

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0$$

для любого направления l_{P_0}.

Контрпример к теореме типа Жиро 2. Заметим, что условие строгой сферичности изнутри нельзя заменить на условие сферичности изнутри, т.е. условие $x_0 \neq \overline{x}$ существенно. Действительно, рассмотрим область $D = \{(x,t) : \ x \in \mathbb{R}^1, \ t > 0\}$. Пусть

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad u(x,t) = 1 - t^2.$$

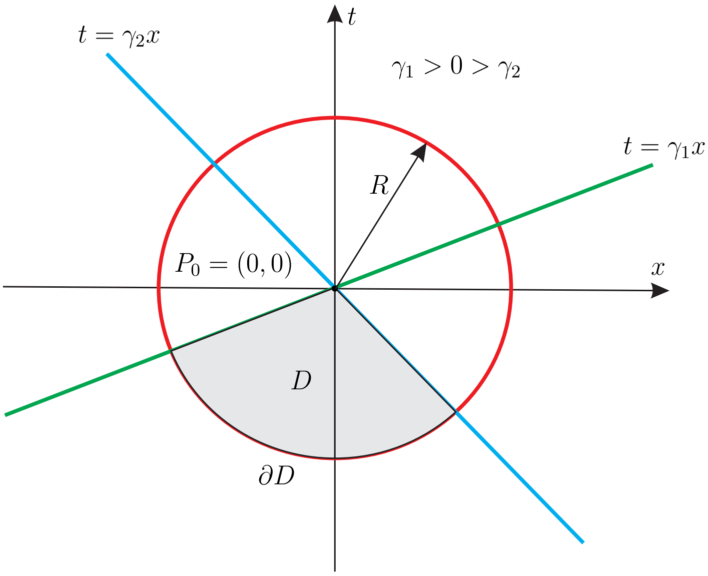


Рис. 34. Область D с угловой точкой $P_0 = (0,0)$.

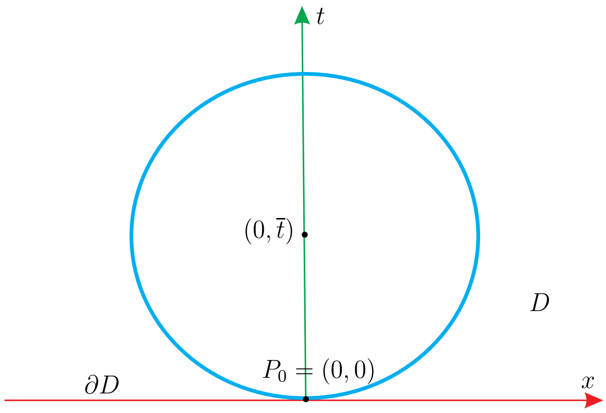


Рис. 35. Область D с условием нестрогой сферичности всей границы ∂D.

Отметим, что для заданной функции $u(x,t)$ имеем

$$Lu(x,t) = 2t > 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u(P_0) = 1, \quad u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D,$$

но при этом

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0$$

для любого направления l_{P_0}.

§ 11. Вторая и третья краевые задачи

Будем пользоваться обозначениями первого параграфа. Пусть $\beta = \beta(x,t) \in \mathbb{C}(S)$, где S — это боковая граница области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ и пусть $\tau = \tau(x,t)$ — это вектор эвклидова пространства $\mathbb{E}^{N+1}$, определенный на S и непрерывно меняющийся на S. Пусть заданы любые

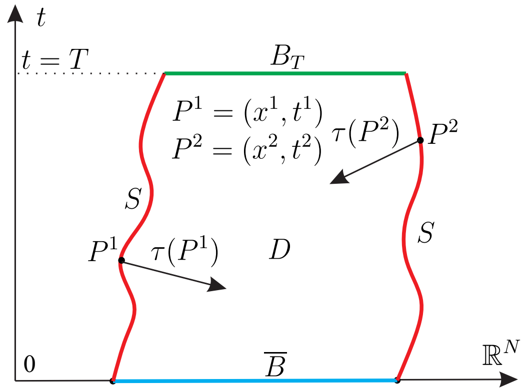


Рис. 36. Векторное поле на границе S.

функции $f(x,t)$ на $D \cup B_T$, $\varphi(x)$ на $\overline{B}$ и $\psi(x,t)$ на S.

Напомним постановку *третьей краевой задачи.*

Постановка третьей краевой задачи. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{11.1}$$

удовлетворяющую начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \tag{11.2}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x,t)u(x,t) = \psi(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \tag{11.3}$$

Замечание 14. Заметим, что если направление $\tau = \tau(x,t)$ нигде не касается поверхности S, то задача называется *регулярной.*

Пусть D цилиндр с основанием B и боковой границей S. Пусть, кроме того,

$$n_{x,t} = (n_{x,t,1}, ..., n_{x,t,N}, 0)$$

внутренняя нормаль к $(x,t) \in S$, тогда, напомним, *внутренней конормалью* называется величина

$$\nu_{x,t} = (\nu_{x,t,1}, ..., \nu_{x,t,N}, 0), \quad \nu_{x,t,i} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x,t) n_{x,t,j}.$$

В частном случае, когда $a_{ij} = \delta_{ij}$ внутренняя нормаль и внутренняя конормаль совпадают.

Заметим, что в некоторых учебных пособиях (см., например, [11]) используется такое определение второй краевой задачи:

Постановка второй краевой задачи. *Третья краевая задача* (11.1)–(11.3) *в случае когда* $\tau(x,t) = \nu_{x,t}$ — *направление внутренней конормали — называется* *вторая краевая задача.*

Справедлива следующая теорема:

Теорема единственности решения третьей краевой задачи. *Пусть L — параболический оператор с непрерывными в D коэффициентами. Предположим, что $c(x,t) \leqslant 0$, $\beta(x,t) \leqslant 0$ и каждая точка $P \in S$ обладает свойством строгой сферичности изнутри. Тогда существует не более одного решения третьей краевой задачи* (11.1)–(11.3). *Если τ не зависит от t, то предположение $c(x,t) \leqslant 0$ можно опустить.*

Доказательство. В силу линейности задачи нам нужно доказать, что если $f(x,t) \equiv 0$ в $D \cup B_T$, $\varphi(x) \equiv 0$ в $\overline{B}$ и $\psi(x,t) \equiv 0$ на S, то $u(x,t) \equiv 0$ в D.

Шаг 1. Последнее утверждение теоремы доказывается стандартным образом при помощи замены функции

$$v(x,t) = e^{-\gamma t} u(x,t), \quad \gamma \geqslant \max_{(x,t)\in\overline{D}} c(x,t).$$

Шаг 2. Допустим, что тем не менее $u(x,t) \not\equiv 0$. Можно считать, что $u(x,t)$ имеет положительный максимум $M > 0$ в $\overline{D}$. Если

$$u(P_0) = M,$$

то $P_0 \notin B_t$ при $0 < t \leqslant T$, так как из сильного принципа максимума следовало бы, что

$$u(x,t) \equiv M \quad \text{при} \quad (x,t) \in S(P_0),$$

а поскольку в силу наших исходных предположений существует кривая $\gamma \in D \cup B \cup B_T$, соединяющая некоторую точку $P^1 \in B_T$ с некоторой точкой $P^2 \in B$, вдоль которой координата t не возрастает.

Но тогда

$$u(x,0) = M > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in B,$$

но это противоречит нашему исходному предположению $\varphi(x) = 0$ на $\overline{B}$. Следовательно, $u(x,t)$ может достигать положительного максимума только на боковой границе S, на которой как раз и задано граничное условие с производной по направлению.

Шаг 3. Таким образом, имеем

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в некоторой точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S,$$

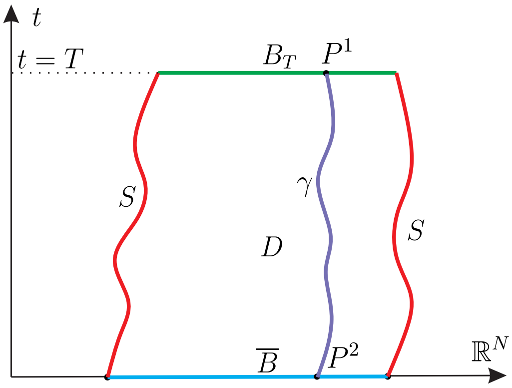


Рис. 37. Точки $P^1 \in B_T$ и $P^2 \in B$ и кривая γ, их соединяющая.

причем в силу шага 2 имеем [1])

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. Поскольку точка P_0 удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри, то мы можем применить теорему типа Жиро и получить, что

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(P_0) < 0 \Rightarrow 0 > \frac{\partial u}{\partial \tau}(P_0) = -\beta(P_0)u(P_0) \geqslant 0$$

и получить противоречие. Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ в $D \cup B_T$.

Теорема доказана.

Замечание 15. Заметим, что требование строгой сферичности на множестве $S \cap \{t = T\}$ является очень ограничительным — это означает, что область D должная выглядеть «приблизительно» так:

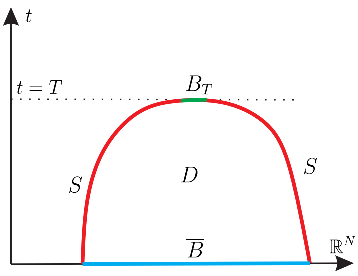


Рис. 38. Область D с условием сферичности точек множества $S \cap \{t = T\}$.

---

1) Внутри области D не может достигаться положительный относительный максимум в силу принципа максимума, если $u(x,t)$ не постоянная в $S(P_0)$.

Однако, условие строгой сферичности множества точек $S \cap \{t = T\}$ можно заменить требованием $\beta(x, T) < 0$. Более того, имеет место следующее утверждение:

Задача 7. Доказать, что можно опустить требование строгой сферичности всех точек боковой границы S, заменив его требованием

$$\beta(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S.$$

Указание. В качестве наводящих соображений отметим, что если не требовать условия строгой сферичности изнутри множества точек боковой границы S, то и нельзя применить теорему Жиро — это означает, что в данном случае можно доказать единственность третьей краевой задачи без теоремы типа Жиро.

Решение. В модификации нуждается только доказательство теоремы единственности третьей краевой задачи на шаге 3. Таким образом, имеем

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в некоторой точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S,$$

причем в силу шага 2 имеем [1]

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. Тогда в этой точке выполнено противоречивые неравенства:

$$0 \geqslant \frac{\partial u}{\partial \tau_{P_0}}(P_0) = -\beta(P_0)u(P_0) > 0.$$

§ 12. Теоремы сравнения — нелинейный случай

В этом параграфе мы рассмотрим теоремы сравнения для *нелинейных краевых задач* достаточно общего вида. Именно сначала рассмотрим следующую *первую краевую задачу*:

$$u_t - \Delta u = f(x, t, u, D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{12.1}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S, \tag{12.2}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. В этом параграфе мы будем использовать введенные в первом параграфе обозначения D, S, B, а также

$$D_\tau \stackrel{def:}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau \stackrel{def:}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{def:}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}.$$

При этом мы будем предполагать, что $D \subset \mathbb{R}^N$ — это область и $B_\tau \subset \subset \mathbb{R}^N$ — это область для каждого $\tau \in (0, T)$.

[1] Внутри области D не может достигаться положительный относительный максимум в силу принципа максимума, если $u(x,t)$ не постоянная в $S(P_0)$.

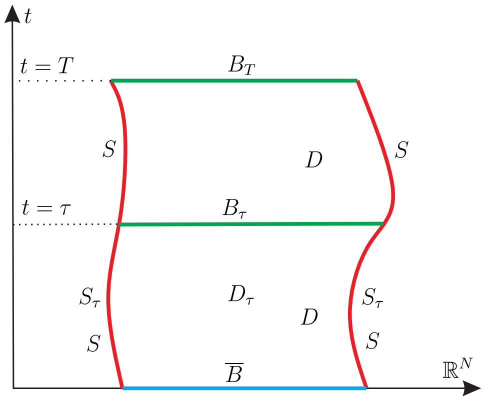


Рис. 39. Область D и множества D_τ, B_τ и S_τ.

В дальнейшем в спецкурсе профессора Н. Н. Нефедова студентам кафедры математики будет изложен *метод верхних и нижних решений* доказательства разрешимости краевых задач для нелинейных уравнений параболического и эллиптического типов [7]. Метод основан на признаке сравнения для соответствующих нелинейных краевых задач. Поэтому мы докажем признак сравнения регулярных решений первой краевой задачи (12.1), (12.2).

Справедлива следующая теорема:

Теорема 10. *Пусть $v(x,t)$ и $w(x,t)$ принадлежат классу $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)\cap \cap\, \mathbb{C}(\overline{D})$. Пусть, кроме того, функция $f(x,t,p,p_i)$ при $i=\overline{1,N}$ является непрерывной по всем переменным (x,t,p,p_i) в области*

$$E \stackrel{def:}{=} D\otimes\mathbb{R}^1\otimes\mathbb{R}^N.$$

Если

$$v_t-\Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \textit{в} \quad D, \tag{12.3}$$

$$w_t-\Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \textit{в} \quad D, \tag{12.4}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{на} \quad \overline{B}\cup S, \tag{12.5}$$

тогда

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{12.6}$$

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим следующее множество точек $\sigma\in\mathfrak{M}\subset(0,T)$ таких, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{для всех} \quad x\in\overline{B_t} \quad \text{для всех} \quad 0\leqslant t<\sigma.$$

Если мы докажем, что

$$\sup_{\sigma\in\mathfrak{M}}\{\sigma\}=T,$$

то теорема будет доказана.

Шаг 2. Пусть
$$t_0 \stackrel{def:}{=} \sup_{\sigma\in\mathfrak{M}}\{\sigma\}. \tag{12.7}$$

В силу (12.5) и того, что по условию теоремы $v(x,t), w(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, выполнено неравенство $t_0 > 0$. Если $t_0 < T$, то функция
$$z(x,t) \stackrel{def:}{=} v(x,t) - w(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad D_{t_0}, \quad z(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad B_{t_0}, \tag{12.8}$$

причем найдется такая точка $P_0 = (x_0, t_0) \in \overline{B_{t_0}}$, в которой
$$z(P_0) = 0. \tag{12.9}$$

С другой стороны, в силу того, что $\partial B_{t_0} \in S$ и выполнено строгое неравенство (12.5) точка $P_0 \notin \partial B_{t_0}$. Следовательно, $P_0 \in B_{t_0}$ и является точкой минимума функции $z(x,t)$ в области B_{t_0}. Итак, в точке P_0 выполнены необходимое и достаточное условие минимума
$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(P_0) = 0, \quad \Delta z(P_0) \geqslant 0. \tag{12.10}$$

Шаг 3. В силу равенств (12.9) и (12.10) и неравенств (12.12), (12.13) выполнено равенство
$$\begin{aligned} f(x_0, t_0, D_x v(P_0)) = f(x_0, t_0, D_x w(P_0)) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_t(P_0) - \Delta v(P_0) > w_t(P_0) - \Delta w(P_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow z_t(P_0) > \Delta z(P_0) \geqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) > w_t(P_0). \end{aligned} \tag{12.11}$$

С другой стороны, в силу определения (12.7) имеем [1)]
$$0 = z(P_0) < z(P) \quad \text{для всех} \quad D_{t_0}.$$

Следовательно,
$$z_t(P_0) \leqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) \leqslant w_t(P_0),$$
что противоречит неравенству (12.11).

Полученное противоречие доказывает, что $t_0 = T$

Теорема доказана.

Замечание 16. Заметим, что серия из двух условий (12.12) и (12.13) может быть заменена на следующую серию:
$$v_t - \Delta v \geqslant f(x,t,v,D_x v) \quad \text{в} \quad D, \tag{12.12}$$
$$w_t - \Delta w < f(x,t,w,D_x w) \quad \text{в} \quad D, \tag{12.13}$$

[1)] Заметим, что согласно определению $B_{t_0} \notin D_{t_0}$

Теперь мы рассмотрим примеры применения теоремы 10 сравнения решений.

Задача 8. [11] Пусть

$$\frac{\partial v}{\partial t} > \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + av^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M), \quad a > 0, \tag{12.14}$$

$$v(x,0) > \frac{\mu}{M}, \quad v(0,t) > \frac{\mu}{M}, \quad v(1,t) > \frac{\mu}{N} \tag{12.15}$$

при $(x,t) \in [0,1] \otimes [0,4M]$, а константы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$a\mu > 2M + \frac{1}{4}, \quad a > 0, \quad M > 0, \quad \mu > 0, \tag{12.16}$$

тогда

$$v(1/2,t) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to 4M. \tag{12.17}$$

Решение. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \frac{\mu}{M - tx(1-x)}. \tag{12.18}$$

Заметим, что при условии (12.16) имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leqslant \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M), \quad a > 0, \tag{12.19}$$

причем

$$w(x,0) = \frac{\mu}{M}, \quad w(0,t) = \frac{\mu}{M}, \quad w(1,t) = \frac{\mu}{N}. \tag{12.20}$$

Тогда применяя теорему 10 мы получим, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M). \tag{12.21}$$

Следовательно, при $x = 1/2$ имеем

$$v(1/2,t) > \frac{4\mu}{4M - t}.$$

Задача 9. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{12.22}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.23}$$

Прежде всего будем рассматривать только регулярные решения этой задачи Коши, т. е. $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Необходимо, используя признак сравнения решений, получить результат об остывании решения за конечное время.

Решение. Прежде всего предположим, что

$$0 \leqslant u_0(x) \leqslant M, \quad M > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.24}$$

Прежде всего, отметим, что ниже мы докажем более сильный признак сравнения, чем теорема 10, из которого будет следовать, что $u(x,t) \geqslant 0$. Заметим теперь, что функция $v(x,t) = M + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ является решением следующего дифференциального неравенства:

$$v_t - \Delta v > -|v|^p, \quad v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x). \tag{12.25}$$

Поэтому если в теореме 10 взять в качестве $w(x,t) = u(x,t)$, то мы получим следующее неравенство:

$$u(x,t) < M + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+.$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ получим искомое неравенство

$$u(x,t) \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{12.26}$$

Итак, $0 \leqslant u(x,t) \leqslant M$. Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{12.27}$$

нетрудно проверить, что решением этой задачи является следующая функция:

$$z(t) = \begin{cases} \left(M^{1-p} - (1-p)t\right)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \in [0, t_0]; \\ 0, & \text{если} \quad t > t_0, \end{cases} \tag{12.28}$$

где

$$t_0 = \frac{M^{1-p}}{1-p}. \tag{12.29}$$

Заметим, что функция

$$v(x,t) = z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{12.30}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{12.31}$$

Действительно, функция $z = z(t)$ удовлетворяет равенству

$$z_t - \Delta z = -z^p \Rightarrow (z+\varepsilon)_t - \Delta(z+\varepsilon) = -z^p > -(z+\varepsilon)^p.$$

Кроме того,

$$v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.32}$$

Опять применим теорему сравнения 10, в которой возьмем $w(x,t) = u(x,t)$ и получим неравенство

$$u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{12.33}$$

Итак, мы делаем важный вывод — *каждое решение задачи Коши* (12.22), (12.23) *обращается в нуль всюду в* $\mathbb{R}^N$ *за конечное время* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *при условиях* $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ *и* $u_0(x) \not\equiv 0$, *где время* $t_0 > 0$ *определено явной формулой* (12.29).

Задача 10. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{12.34}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.35}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить достаточные условия разрушения решения этой задачи за конечное время.

Решение. Прежде всего заметим, что

$$\Delta u - u_t = -|u|^p \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

Согласно теореме 3 (просто нужно вместо $u(x,t)$ рассмотреть $-u(x,t)$) о принципе максимума в неограниченных областях получим, что $u(x,t) \geqslant 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{12.36}$$

Его решение дается следующей явной формулой:

$$z(t) = \bigl(M^{1-p} - (p-1)t\bigr)^{-1/(p-1)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_0, \tag{12.37}$$

где

$$t_0 \overset{def:}{=} \frac{1}{(p-1)M^{p-1}}. \tag{12.38}$$

Отметим, что функция $z = z(t)$ является монотонно возрастающей, причем

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = +\infty.$$

Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$u_0(x) \geqslant M > 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.39}$$

Введем следующую функцию:

$$w(x,t) = z(t) - \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, M). \tag{12.40}$$

Эта функция удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству:

$$w_t - \Delta w > w^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{12.41}$$

Действительно,

$$z_t - \Delta z = z^p \Rightarrow (z-\varepsilon)_t - \Delta(z-\varepsilon) = z^p > (z-\varepsilon)^p$$

при $\varepsilon \in (0, M)$. Кроме того,

$$w(x,0) = M - \varepsilon < M \leqslant u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Осталось воспользоваться теоремой 10, в которой нужно взять $v(x,t) = u(x,t)$ и получить следующее неравенство:

$$u(x,t) > z(t) - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ мы получим искомую оценку снизу

$$u(x,t) \geqslant z(t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{12.42}$$

Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу — *при условии* $u_0(x) \geqslant M > 0$ *выполнена оценка* (12.42), *из которой вытекает, что для некоторого* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *решение задачи Коши* (12.34), (12.35) *разрушается за конечное время*:

$$\limsup_{t\to t_1} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u(x,t) = +\infty. \tag{12.43}$$

Задача 11. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{12.44}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.45}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно показать, что в нелинейном случае единственность решения этой задачи может быть нарушена, даже если решение ищется в классе Тихонова.

Решение. Действительно, как и в предыдущем примере, имеем $u(x,t) \geqslant 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = 0. \tag{12.46}$$

Его семейство всех решений (их бесконечно много) может быть представлено в следующем виде:

$$z(t) = (1-p)^{1/(1-p)} \begin{cases} (t-t_0)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \geqslant t_0; \\ 0, & \text{если} \quad t \in [0, t_0], \end{cases} \tag{12.47}$$

где $t_0 \geqslant 0$ — любое неотрицательное число. Ясно, что решения $u(x,t) = z(t)$ удовлетворяют условиям задачи Коши (12.44) и (12.45).

Задача 12. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{12.48}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.49}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить оценку сверху на скорость убывания решения во времени этой задачи.

Решение. Как и в первом примере, используя более сильный признак сравнения можно доказать, что $u(x,t) \geqslant 0$

Предположим, что $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0, \quad p > 1. \tag{12.50}$$

Единственное решение дается следующей формулой:

$$z(t) = \left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{-1/(p-1)}, \quad t \geqslant 0. \tag{12.51}$$

Как и ранее, можно легко показать, что функция

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{12.52}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{12.53}$$

причем

$$v(x,0) = M + \varepsilon > M \geqslant u_0(x) = u(x,0) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.54}$$

Осталось применить теорему сравнения 10, в которой положить $w(x,t) = u(x,t)$, и получить оценку

$$0 \leqslant u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t) = \\ = \frac{1}{\left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{1/(p-1)}} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{12.55}$$

Задача для самостоятельного решения 1. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u + |\nabla u|^q + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{12.56}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{12.57}$$

при условиях $q > 0$, $p \in (0,1)$, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ и $u(x,t) \geqslant 0$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (12.33)

Задача для самостоятельного решения 2. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q + |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{12.58}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{12.59}$$

при условиях $q > 0$, $1 < p$, $0 < M \leqslant u_0(x)$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (12.42).

Рассмотренные примеры показывают, что результат теоремы 10 может быть модифицирован следующим образом:

Теорема 11. *Пусть* $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *принадлежат классу* $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$. *Пусть, кроме того, функция* $f(x,t,p,p_i)$ *при* $i = \overline{1,N}$ *является непрерывной по всем переменным* (x,t,p,p_i) *в области*

$$E \stackrel{def}{=} D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N$$

и является строго монотонной по переменной $p \in \mathbb{R}^1$. *Если*

$$v_t - \Delta v \geqslant f(x,t,v,D_x v) \quad \text{в} \quad D, \tag{12.60}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \text{в} \quad D, \tag{12.61}$$

и если найдется такое $\varepsilon_0 > 0$

$$v(x,t) \geqslant w(x,t) + \varepsilon_0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S, \tag{12.62}$$

тогда

$$v(x,t) \geqslant w(x,t) \quad \text{в} \quad D. \tag{12.63}$$

Доказательство.

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что заменой

$$v(x,t) = \overline{v}(x,t) + \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

либо заменой [1)]

$$w(x,t) = \overline{w}(x,t) - \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

[1)] Одновременная замена допустима, но лишена смысла.

мы получим серию неравенств (с учетом замечания 16) для $\overline{v}$ и w или для v и $\overline{w}$ в формулировке теоремы 10. А после применения этой теоремы нужно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$, чтобы получить неравенство (12.63).

Теорема доказана.

Теперь мы рассмотрим *нелинейную третью краевую задачу* и докажем признак сравнения для нее. Именно сначала рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x, t, u, D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{12.64}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{на} \quad \overline{B}, \tag{12.65}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x, t, u(x,t)) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad S, \tag{12.66}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$.

Справедлива следующая теорема *о признаке сравнения для третьей краевой задачи*:

Теорема 12. *Пусть все предположения теоремы* 10 *остаются без изменения. Если*

$$v_t - \Delta v > f(x, t, v, D_x v) \quad \textit{в} \quad D, \tag{12.67}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x, t, w, D_x w) \quad \textit{в} \quad D \tag{12.68}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{на} \quad \overline{B}, \tag{12.69}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x, t, v(x,t)) < \frac{\partial w(x,t)}{\partial \tau} + \beta(x, t, w(x,t)) \quad \textit{на} \quad S, \tag{12.70}$$

где $\beta = \beta(x, t, p)$ — это любая функция определенная на множестве $S \otimes \mathbb{R}^1$, $\tau = \tau(x,t)$ — направленное внутрь $D_t \cup B_t$ непрерывное векторное поле. Тогда

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{12.71}$$

Доказательство.

Здесь нужно заметить, что доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы. Только точка P_0 не может принадлежать ∂B_{t_0}, поскольку с одной стороны в силу принципа максимума

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}(P_0) \geqslant 0,$$

а, с другой стороны, в силу неравенства (12.70) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}(P_0) < 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 17. Заметим, что если потребовать строгой сферичности изнутри части $S\backslash\partial B_T$ боковой границы S, что достаточно естественно [1]), то строгое неравенство (12.70) можно заменить на нестрогое неравенство

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial\tau}+\beta(x,t,v(x,t))\leqslant\frac{\partial w(x,t)}{\partial\tau}+\beta(x,t,w(x,t))\quad\text{на}\quad S \tag{12.72}$$

и при этом результат теоремы остается в силе, если применить теорему типа Жиро.

Замечание 18. Заметим, что результат теоремы сравнения остается в силе при замене строгих неравенств на нестрогие. Результатом также будет нестрогое неравенство [13].

Задача 13. [13] Рассмотрим следующую задачу с *нелинейными граничными условиями*:

$$u_t=\Delta u\quad\text{при}\quad(x,t)\in D=\Omega\otimes(0,T), \tag{12.73}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_x}=u^p(x,t)\quad\text{при}\quad(x,t)\in S=\partial\Omega\otimes(0,T],\quad p>1, \tag{12.74}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0\quad\text{при}\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{12.75}$$

где n_x — это вектор внешней нормали к ляпуновской границе $\partial\Omega\in\in A^{1,h}$ ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^N$. Нужно доказать, что всякое нетривиальное решение $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}_t((0,T];\mathbb{C}^{(2)}_x(\overline{\Omega}))\cap\mathbb{C}^{0,1}_{x,t}(\overline{\Omega}\otimes[0,T])$ разрушается за конечное время.

Решение.

Шаг 1. Прежде всего докажем, что

$$\inf_{x\in\Omega}u(x,\varepsilon)=c>0\quad\text{для достаточно малого}\quad\varepsilon>0. \tag{12.76}$$

□ Действительно, в силу доказанного признака сравнения и замечания 18 имеем

$$u(x,t)\geqslant 0,$$

поскольку $v(x,t)=0$ удовлетворяет уравнению (12.73), граничному условию (12.74) и $u_0(x)\geqslant 0=v(x,0)$. Теперь заметим, что если

$$u(x_0,\varepsilon)=0\quad\text{при}\quad x_0\in\Omega,$$

то в силу слабого принципа максимума имеем

$$u(x,t)=0\quad\text{для всех}\quad(x,t)\in\overline{\Omega}\otimes[0,\varepsilon],$$

а, стало быть, $u_0(x)=0$ для всех $x\in\overline{\Omega}$. Это противоречит тому, что $u_0(x)\not\equiv 0$. Кроме того, если $u(x,t)\not\equiv 0$ при $(x,t)\in\Omega\otimes[0,\varepsilon]$ и

$$u(x_0,\varepsilon)=0\quad\text{при}\quad x_0\in\partial\Omega,$$

[1]) Это условие выполнено для задач, возникающих в приложениях.

то в этой точке минимума в силу граничного условия (12.74) получим

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x_0, \varepsilon) = 0,$$

что противоречит теореме типа Жиро. ☒

Шаг 2. Меняя если необходимо $t = 0$ на $t = \varepsilon > 0$ без ограничения общности можем сразу же считать, что

$$\inf_{x \in \Omega} u_0(x) = c > 0. \tag{12.77}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\varphi_t = \Delta\varphi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{12.78}$$

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial n_x} = \varphi^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T), \tag{12.79}$$

$$\varphi(x,0) = c > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{12.80}$$

В силу признака сравнения с функцией $v(x,t) = c$, которая удовлетворяет системе уравнений

$$v_t = \Delta v \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial n_x} \leqslant v^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$v(x,0) = c > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega},$$

мы получим неравенство $\varphi(x,t) \leqslant c$ для всех $t > 0$ и, используя опять признак сравнения, получим неравенство

$$u(x,t) \geqslant \varphi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,T]. \tag{12.81}$$

Шаг 3. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(x,t) \stackrel{def:}{=} \varphi(x,t+\eta) - \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad \eta > 0. \tag{12.82}$$

Эта функция удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\psi_t = \Delta\psi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0, T-\eta], \tag{12.83}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial n_x} = p\left(\frac{\partial \varphi(x,t+\eta)}{\partial n_x} - \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial n_x}\right) = \\ = (\varphi^p(x,t+\eta) - \varphi^p(x,t)) = \\ = p\xi^{p-1}(x,t)\psi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T-\eta],\end{aligned} \tag{12.84}$$

где $\xi(x,t) \in [\varphi(x,t), \varphi(x,t+\eta)]$,

$$\psi(x,0) = \varphi(x,\eta) - c \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{12.85}$$

Используя признак сравнения мы получим, что

$$\psi(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0, T-\eta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{12.86}$$

Шаг 4. Отметим, что в классе $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}_t^{(1)}((0,T];\mathbb{C}_x^{(2)}(\overline{\Omega})) \cap \cap\, \mathbb{C}_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega} \otimes [0,T])$ функция

$$z(x,t) \stackrel{def:}{=} \varphi_t(x,t)$$

удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$z_t = \Delta z \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}(x,t) z(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$z(x,0) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Аналогично доказательству свойства (12.76) мы получим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\inf_{x \in \Omega} z(x,\varepsilon) = \inf_{x \in \Omega} \varphi_t(x,\varepsilon) > 0. \tag{12.87}$$

Шаг 5. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \varphi_t(x,t) - \delta\varphi^p(x,t). \tag{12.88}$$

Прежде всего имеем цепочку выражений

$$w_t - \Delta w = \varphi_{tt} - \delta p \varphi^{p-1}\varphi_t - \Delta\varphi_t + \delta\Delta\varphi^p = \\ = -\delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi + p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D\varphi|^2 + \delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi = \\ = p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D\varphi|^2 \geqslant 0, \tag{12.89}$$

поскольку

$$\varphi_{tt} = \Delta\varphi_t.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial w}{\partial n_x} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial n_x} - \delta\frac{\partial\varphi^p}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}\varphi_t - \delta p\varphi^{p-1}\varphi^p = p\varphi^{p-1}w. \tag{12.90}$$

Кроме того, при достаточно малом $\delta > 0$ в силу (12.87) выполнено следующее неравенство:

$$w(x, \varepsilon) = \varphi_t(x, \varepsilon) - \delta \varphi^p(x, \varepsilon) \geqslant 0. \tag{12.91}$$

Используя признак сравнения получим, что

$$w(x, t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]. \tag{12.92}$$

Шаг 6. Итак, выполнено неравенство

$$\varphi_t(x, t) \geqslant \delta \varphi^p(x, t) \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]. \tag{12.93}$$

Решением этого дифференциального неравенства является следующее неравенство:

$$\varphi(x, t) \geqslant (\varphi(x, \varepsilon) - (p-1)\delta(t - \varepsilon))^{-1/(p-1)} \tag{12.94}$$

для всех $(x, t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. В силу неравенства (12.81) мы получим, что имеет место неравенство

$$u(x, t) \geqslant (\varphi(x, \varepsilon) - (p-1)\delta(t - \varepsilon))^{-1/(p-1)} \tag{12.95}$$

для всех $(x, t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. Это неравенство означает, что $T < +\infty$.

Таким образом, утверждение задачи доказано.

§ 13. Случай нелинейного эллиптического оператора общего вида. Теорема сравнения

В этом параграфе мы докажем признак сравнения для общего оператора (эллиптического оператора) следующего вида:

$$L(u)(x, t) \stackrel{def:}{=} F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{13.1}$$

в котором функция $F = F(x, t, p, p_i, p_{ij})$ определена на множестве $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$, на котором она является непрерывно дифференцируемой функцией от $N^2 + 2N + 2$ переменных. Потребуем, чтобы функция $F = F(x, t, p, p_i, p_{ij})$ определяла эллиптический оператор. Для этого достаточно потребовать, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \xi_i \xi_j > 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N \tag{13.2}$$

и для всех $(x, t, p, p_i, p_{ij}) \in D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$. Теперь предположим, что область D является цилиндрической:

$$D = \Omega \otimes (0, T), \; S = \partial\Omega \otimes (0, T], \; B = \Omega \otimes \{t = 0\}, \; B_T = \Omega \otimes \{t = T\}.$$

Рассмотрим следующее нелинейное параболическое уравнение:

$$L(u)(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{13.3}$$

а также дифференциальное неравенство

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T. \tag{13.4}$$

Введем функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - w(x,t). \tag{13.5}$$

В силу выражений (13.3) и (13.4) для функции $v(x,t)$ в области D выполнено следующее неравенство:

$$F(x,t,u,u_{x_i},u_{x_ix_j}) - F(x,t,w_i,w_{x_i},w_{x_ix_j}) - \\ - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{13.6}$$

Теперь применим формулу Адамара среднего значения следующего вида:

$$F(x,t,u,u_{x_i},u_{x_ix_j}) - F(x,t,w,w_{x_i},w_{x_ix_j}) = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)v(x,t), \tag{13.7}$$

где

$$(a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t)) = \int\limits_0^1 \left(F_{p_{ij}}, F_{p_i}, F_p\right) \Big(x,t,\vartheta u + (1-\vartheta)w, \\ , \vartheta u_{x_i} + (1-\vartheta)w_{x_i}, \vartheta u_{x_ix_j} + (1-\vartheta)w_{x_ix_j}\Big)\, ds. \tag{13.8}$$

Итак, с учетом (13.6) и (13.7) мы получим следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \geqslant 0 \tag{13.9}$$

в области D. Предположим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D = S \cup \overline{B}, \tag{13.10}$$

тогда применяя принцип максимума (теоремы 2, 3) для решения $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ в ограниченной и неограниченной области D мы получим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{13.11}$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме [14]:
Теорема 13. *Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — это решение уравнения* (13.3) *в цилиндрической области D* [1]. *Предположим, кроме того, функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям*

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{на} \quad \overline{B} = \overline{\Omega}, \tag{13.12}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \textit{на} \quad S = \partial\Omega \otimes (0,T]. \tag{13.13}$$

Пусть $v(x,t)$ и $w(x,t)$ класса $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ удовлетворяют неравенствам

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \leqslant L(v)(x,t) \quad \textit{в} \quad D, \tag{13.14}$$

причем оператор L является параболическим в подобласти E области $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} E = \Big\{ &(x,t,p,p_i,p_{ij}) : \\ &p \in \{\vartheta u(x,t) + (1-\vartheta)v(x,t)\} \cup \{\vartheta u(x,t) + (1-\vartheta)w(x,t)\}, \\ &p_i \in \{\vartheta u_{x_i}(x,t) + (1-\vartheta)v_{x_i}(x,t)\} \cup \{\vartheta u_{x_i}(x,t) + (1-\vartheta)w_{x_i}(x,t)\}, \\ &p_{ij} \in \{\vartheta u_{x_ix_j}(x,t) + (1-\vartheta)v_{x_ix_j}(x,t)\} \cup \{\vartheta u_{x_ix_i}(x,t) + (1-\vartheta)w_{x_ix_j}(x,t)\}, \\ &(x,t) \in D,\ i,j = \overline{1,N} \Big\}. \end{aligned}$$

Если

$$v(x,0) \leqslant u_0(x) \leqslant w(x,0) \quad \textit{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{13.15}$$

$$v(x,t) \leqslant \psi(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \textit{на} \quad S, \tag{13.16}$$

тогда

$$v(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{13.17}$$

Задача 14. [9] Рассмотрим следующую первую краевую задачу для *уравнения нелинейной диффузии*:

$$u_t = \Delta u^{1+p} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,+\infty), \quad p > 0, \tag{13.18}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{13.19}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes (0,+\infty). \tag{13.20}$$

Рассматривая решения этой задачи с разделенными переменными, с помощью признака сравнения получить оценки решения во времени.

---

[1] Ограниченной или неограниченной.

Решение. Прежде всего заметим, что $u(x,t) \geqslant 0$ в силу теоремы 13, в которой нужно взять $v(x,t) = 0$. Будем искать частное решение уравнения (13.18) в виде

$$u_a(x,t) = f_a(x)\varphi_a(t).$$

Подставляя в уравнение (13.18), мы получим равенство

$$\varphi_{at}(t)f_a(x) = \varphi_a^{1+p}(t)\Delta f_a^{1+p}(x) \Rightarrow \frac{\varphi_{at}(t)}{\varphi_a^{1+p}(t)} = \frac{\Delta f_a^{1+p}(x)}{f_a(x)} = \lambda.$$

Нужно рассмотреть два случая: $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

Случай первый: глобальная разрешимость. Для удобства положим

$$\lambda = -\frac{1}{p}.$$

Откуда получим два уравнения

$$\varphi_{at}(t) + \frac{1}{p}\varphi_a^{1+p}(t) = 0, \quad \Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p}f_a(x) = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{13.21}$$

Функция $\varphi_a(t)$ имеет следующий явный вид:

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{(T+t)^{1/p}}, \tag{13.22}$$

где $T > 0$ — произвольная постоянная. А относительно функции $f_a(x)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла условию

$$f_a(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{13.23}$$

Итак, функция

$$u_a(x,t) \stackrel{def:}{=} \frac{f_a(x)}{(T+t)^{1/p}}, \quad T > 0 \tag{13.24}$$

удовлетворяет уравнению

$$u_{at} = \Delta u_a^{p+1} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,+\infty), \tag{13.25}$$

и граничным условиям

$$u_a(x,0) = \frac{f_a(x)}{T^{1/p}} \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \quad u_a(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes (0,+\infty). \tag{13.26}$$

Пусть начальное условие $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_a(x)}{T_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_a(x)}{T_2^{1/p}}, \quad T_1 > 0,\ T_2 > 0, \tag{13.27}$$

тогда в силу теоремы 13, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_a(x)}{(T_1+t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_a(x)}{(T_2+t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_a(x)}{(T_1+t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_a(x)}{(T_2+t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,+\infty). \tag{13.28}$$

Отметим, что существует (см. [9]) не нулевое решение $f_a(x) \not\equiv 0$ краевой задачи

$$\Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p} f_a(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad f_a(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{13.29}$$

Случай второй: разрушение за конечное время. Для удобства положим

$$\lambda = \frac{1}{p}.$$

Рассуждая аналогичным образом, мы получим следующую функцию:

$$u_b(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T-t)^{1/p}}, \quad T > 0 \tag{13.30}$$

— это произвольная постоянная,

$$\Delta f_b^{p+1}(x) - \frac{1}{p} f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{13.31}$$

$$f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{13.32}$$

Нетривиальное решение краевой задачи (13.31), (13.32) существует (см. монографию [16]). Предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_b(x)}{T_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_b(x)}{T_2^{1/p}}, \quad 0 < T_2 < T_1, \tag{13.33}$$

тогда в силу теоремы 13, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_1-t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_2-t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_b(x)}{(T_1-t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_b(x)}{(T_2-t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T_2). \tag{13.34}$$

Отметим, что из неравенства снизу в (13.34) вытекает *разрушение за конечное время* $T_0 \in [0,T_1]$.

Тематическая лекция 3

ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА

В этой лекции мы рассмотрим параболические пространства Гельдера, априорные оценки первой краевой задачи в пространствах Гельдера, называемые априорными оценками Шаудера, и, наконец, используя метод продолжения по параметру мы докажем существование и единственность решения первой краевой задачи в параболических пространствах Гельдера.

§ 1. Параболические пространства Гельдера

В пространстве $(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ изначально определено расстояние между точками $z_1 = (x_1, t_1)$ и $z_2 = (x_2, t_2)$ следующего вида:

$$d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|. \tag{1.1}$$

Однако, для наших дальнейших целей метрическое пространство $(\mathbb{R}^{N+1}, d)$ не удобно. Поэтому введем так называемое параболическое расстояние следующего вида:

$$\rho(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}. \tag{1.2}$$

Нужно только проверить, что функция $\rho(z_1, z_2)$ удовлетворяет аксиомам расстояния. Действительно, нужно только доказать, что

$$\rho(z_1, z_2) \leqslant \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2). \tag{1.3}$$

Для этого заметим, что имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|t_1 - t_2| \leqslant |t_1 - t_3| + |t_3 - t_2| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |t_1 - t_2|^{1/2} \leqslant (|t_1 - t_3| + |t_3 - t_2|)^{1/2} \leqslant |t_1 - t_3|^{1/2} + |t_3 - t_2|^{1/2}.$$

Из этой цепочки неравенств сразу же вытекает неравенство треугольника (1.3).

Замечание 1. Отметим, что параболическое расстояние $\rho(z_1, z_2)$ обладает следующим важным свойством — если $z_1 = (rx_1, r^2 t)$ и $z_2 = (rx_2, r^2 t)$, то

$$\rho(z_1, z_2) = r\left(|x_1 - x_2| + |t_2 - t_1|^{1/2}\right).$$

Это свойство инвариантности относительно указанного растяжения важно для параболических уравнений.

Для функции $u(x,t)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, введем следующие обозначения:

$$[u]_{\delta/2,\delta;D} \stackrel{def:}{=} \sup_{z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^\delta(z_1, z_2)}, \tag{1.4}$$

$$|u|_{\delta/2,\delta;D} \stackrel{def:}{=} |u|_{0;D} + [u]_{\delta/2,\delta;D}, \quad |u|_{0;D} = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \tag{1.5}$$

для $\delta \in (0,1]$. Через $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ мы обозначаем пространство всех функций $u(x,t)$, для которых конечна *норма* $|u|_{\delta/2,\delta;D} < +\infty$.

Параболическое пространство Гельдера $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ определим как множество всех вещественнозначных функций $u(x,t)$, заданных в D и таких, что

$$|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \stackrel{def:}{=} |u|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;D} + [u]_{1+\delta/2;2+\delta;D} < +\infty, \tag{1.6}$$

где

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta;D} \stackrel{def:}{=} [u_t]_{\delta/2,\delta;D} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [u_{x_i x_j}]_{\delta/2,\delta;D}. \tag{1.7}$$

Можно доказать, что пространства $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ являются банаховыми, т. е. полными нормированными пространствами относительно норм (1.5) и (1.6). Действительно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пространства* $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ *и* $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ *являются банаховыми относительно норм* $|\cdot|_{\delta/2,\delta;D}$ *и* $|\cdot|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$ *соответственно.*

Доказательство. Доказательство проведем для пространства $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

То, что величина $|\cdot|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$ является нормой очевидно. Поэтому нам нужно доказать полноту пространства $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

Шаг 1. Пусть $\{u_m\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$, т. е.

$$|u_m - u_k|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m,k \to +\infty. \tag{1.8}$$

Отсюда сразу же имеем, что числовая последовательность $|u_m - u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$ является ограниченной для каждого фиксированного

$k_1 \in \mathbb{N}$, поэтому в силу неравенства треугольника справедливо следующее неравенство:

$$|u_m|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant |u_m - u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} + |u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant K, \quad (1.9)$$

где $K > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Шаг 2. В частности, справедливы следующие неравенства [1]:

$$\sup_{(x,t)\in D} \left|D_x^2 u_m\right| \leqslant K, \quad [D_x^2 u_m]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant K. \quad (1.10)$$

Из первого неравенства получим, что последовательность $\{D_x^2 u_m\}$ является равномерно ограниченной, а из второго неравенства имеем

$$\left|D_x^2 u_m(x_1,t_1) - D_x^2 u_m(x_2,t_2)\right| \leqslant K\left[|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}\right]^\delta,$$

но это означает, что последовательность $\{D_x^2 u_m\}$ является равностепенно непрерывной. По теореме Арцела существует такая подпоследовательность $\{D_x^2 u_{m'}\}$, которая равномерно сходится в $\mathbb{C}(\overline{D})$, т.е. существует такая функция $v^{2x}(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, что

$$\sup_{(x,t)\in D} \left|D_x^2 u_{m'} - v^{2x}(x,t)\right| \to +0 \quad \text{при} \quad m' \to +\infty. \quad (1.11)$$

Аналогичным образом, доказываются аналогичные результаты для самой последовательности $\{u_m\}$, последовательностей $\{D_t u_m\}$, $\{D_{x_i} u_m\}$ и $\{D_{x_i x_j} u_m\}$.

Шаг 3. Нам нужно доказать, что если $\{u_{m''}\}$ — это итоговая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ и при этом

$$u_{m''}(x,t) \rightrightarrows u(x,t) \quad \text{равномерно в} \quad (x,t) \in D \quad \text{при} \quad m'' \to +\infty, \quad (1.12)$$

то

$$D_{x_i} u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_{x_i} u(x,t), \quad D_{x_i x_j} u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_{x_i x_j} u(x,t), \quad (1.13)$$

$$D_t u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_t u(x,t) \quad (1.14)$$

равномерно в D. Но это следствие того, что из фундаментальности последовательности $\{u_m\}$ в $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ вытекает ее фундаментальность в $\mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(D) \supset \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$, которое является банаховым пространством.

Шаг 4. Докажем теперь, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$. Для этого достаточно доказать, что

$$[D_t u(x,t)]_{\delta/2,\delta;D} < +\infty, \quad [D_x^2 u(x,t)]_{\delta/2,\delta;D} < +\infty.$$

[1] Здесь мы используем обозначение $D_x^2 u$ для любой частной производной второго порядка от функции u.

Докажем, например, первое неравенство. Действительно, имеем

$$\frac{\left|D_x^2 u_m(P) - D_x^2 u_m(Q)\right|}{\rho^\delta(P,Q)} \leqslant K.$$

Возьмем в этом неравенстве $m = m''$ и устремим $m'' \to +\infty$. В результате получим, что

$$\frac{\left|D_x^2 u(P) - D_x^2 u(Q)\right|}{\rho^\delta(P,Q)} \leqslant K.$$

Итак, $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

Шаг 5. Осталось доказать, что $\{u_m\}$ сходится по норме к $u(x,t)$. Заметим, что справедливо неравенство

$$|u_m - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant \\ \leqslant |u_{m''} - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} + |u_m - u_{m''}|_{1+\delta/2,2+\delta;D}, \quad (1.15)$$

а поскольку в силу фундаментальности $\{u_m\}$ имеем

$$|u_m - u_{m''}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m, m'' \to +\infty, \quad (1.16)$$

то нам достаточно доказать, что

$$|u_{m''} - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m'' \to +\infty. \quad (1.17)$$

В силу фундаментальности $\{u_m\}$ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие достаточно большие m'' и k'', что

$$\left[D_x^2 u_{m''} - D_x^2 u_{k''}\right]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \varepsilon. \quad (1.18)$$

Отсюда получаем, что для любых $P, Q \in D$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\rho^\delta(P,Q)} \left|D_x^2 u_{m''}(P) - D_x^2 u_{k''}(P) - D_x^2 u_{m''}(Q) + D_x^2 u_{k''}(Q)\right| \leqslant \varepsilon. \quad (1.19)$$

стремим в этом неравенстве $k'' \to +\infty$ и получим, что имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{\rho^\delta(P,Q)} \left|D_x^2 u_{m''}(P) - D_x^2 u(P) - D_x^2 u_{m''}(Q) + D_x^2 u(Q)\right| \leqslant \varepsilon. \quad (1.20)$$

Взяв supremum от обеих частей этого неравенства $P, Q \in D$, $P \neq Q$, в результате мы получим, что

$$\left[D_x^2 u_{m''} - D_x^2 u(Q)\right]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[D_x^2 u_{m''} - D_x^2 u(Q)\right]_{\delta/2,\delta;D} \to +0 \quad (1.21)$$

при $m'' \to +\infty$. Аналогичным образом можно рассмотреть все слагаемые в выражении (1.17) и доказать его справедливость.

Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что если область D достаточно «хорошая», например, если область D выпуклая, то рассматриваемые банаховы пространства совпадают с банаховыми пространствами $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(\overline{D})$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{D})$.

Справедливы следующие неравенства:

$$[uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D}, \quad (1.22)$$

$$|uv|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{\delta/2,\delta;D}|v|_{\delta/2,\delta;D} \quad (1.23)$$

для всех $u, v \in \mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$.

□ Действительно, прежде всего справедливо следующее элементарное неравенство:

$$|u(z_1)v(z_1) - u(z_2)v(z_2)| \leqslant |u(z_1)||v(z_1) - v(z_2)| + |v(z_2)||u(z_1) - u(z_2)|,$$

из которого разделив обе части на $\rho^\delta(z_1, z_2)$ мы получим следующее неравенство:

$$[uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D}. \quad (1.24)$$

Теперь заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}|uv|_{\delta/2,\delta;D} &= |uv|_{0;D} + [uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \\ &\leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \\ &\leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D} + [u]_{\delta/2,\delta;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} = \\ &= |u|_{\delta/2,\delta;D}|v|_{\delta/2,\delta;D}. \quad \boxtimes \quad (1.25)\end{aligned}$$

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 1. *Для всякой функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ и для всех $a_{ij}(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ найдется такая постоянная $M > 0$, не зависящая от u, что имеет место следующее неравенство*:

$$|Lu|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant M|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}, \quad (1.26)$$

$$Lu(x,t) \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

где $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — это ограниченная область.

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что в силу неравенства (1.25) имеем

$$\left|a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |a_{ij}|_{\delta/2,\delta;D}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant M_1|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \tag{1.27}$$

Шаг 2. В силу неравенства (1.25) и формулы Тейлора имеем

$$|cu|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |c|_{\delta/2,\delta;D}|u|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant$$
$$\leqslant M_2\left[|u_t|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N}|u_{x_i}|_{0;D}\right] \leqslant M_2|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \tag{1.28}$$

Шаг 3. Справедливо неравенство

$$|u_t|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \tag{1.29}$$

Из неравенств (1.27)–(1.27) вытекает оценка (1.26).

Лемма доказана.

§ 2. Эквивалентные полунормы

Отметим, что величины $[u]_{1+\delta/2;2+\delta;D}$ и $[u]_{\delta/2,\delta;D}$ являются *полунормами*, т. е. функциями для которых выполнены все свойства нормы за исключением того свойства, что

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

поскольку, например, из равенства $[u]_{\delta/2,\delta;D} = 0$ вытекает, что $u = const$. В дальнейшем при выводе априорной оценки Шаудера в $\mathbb{R}^{N+1}$ по методу Сафонова нам нужно ввести эквивалентную полунорму $[u]'_{1+\delta/2;2+\delta;D}$.

Итак, пусть $\mathcal{P}_2$ — это множество всех полиномов вида

$$\mathcal{P}_2 \overset{def:}{=} \left\{\alpha t + \sum_{i=1}^{N}\alpha^i x_i + \sum_{i,j=1,1}^{N,N}\alpha^{ij}x_i x_j + \beta\right\} \tag{2.1}$$

с вещественными коэффициентами относительно переменных $t, x_1, ..., x_N$. Пусть

$$B_\rho(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < \rho\right\}, \quad Q_\rho(z) = (t-\rho^2, t) \otimes B_\rho(x) \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

при $z = (t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Определим следующую полунорму:

$$[u]'_{1+\delta/2,2+\delta} \overset{def:}{=} \sup_{z=(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}} \sup_{\rho>0} \frac{1}{\rho^{2+\delta}} \inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z) - p(z)|_{0;Q_\rho(z)}. \tag{2.2}$$

Справедливая следующая теорема:

Теорема 2. *Существует константа* $c_1 = c_1(N) > 0$ *такая, что для любой функции* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$ *справедливы оценки*

$$[u]'_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant c_1[u]_{1+\delta/2,2+\delta}, \quad [u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant c_1[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}. \tag{2.3}$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем первое неравенство в (2.3). Согласно формуле Тейлора для любых точек $z = (t,x)$, $z_0 = (t_0,x_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} u(z) = u(t_0,x) + (t-t_0)u_t(\vartheta,x) = \\ = u(z_0) + (t-t_0)u_t(\vartheta,x) + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_ix_j}(t_0,\xi)(x_i-x_{0i})(x_j-x_{0j}), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\vartheta \in [t,t_0]$ и $\xi \in [x,x_0]$. С другой стороны для полинома Тейлора по определению имеем

$$\begin{aligned} T_{z_0}u(z) \stackrel{def:}{=} u(z_0) + (t-t_0)u_t(z_0) + \\ + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}(z_0)(x_i-x_{0i}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_ix_j}(z_0)(x_i-x_{0i})(x_j-x_{0j}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Пусть $\rho(z,z_0) \leqslant \rho$, где

$$\rho(z,z_0) = |x-x_0| + |t-t_0|^{1/2}.$$

Тогда получим, в частности,

$$|t-t_0| \leqslant \rho^2, \quad |x-x_0| \leqslant \rho.$$

Из (2.4) и (2.5) получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |u(z) - T_{z_0}u(z)| \leqslant |t-t_0|\,|u_t(\vartheta,x) - u_t(z_0)| + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|u_{x_ix_j}(z_0) - u_{x_ix_j}(t_0,\xi)\right| |x_i-x_{0i}||x_j-x_{0j}| \leqslant \\ \leqslant \rho^2\,|u_t(\vartheta,x) - u_t(z_0)| + \rho^2\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|u_{x_ix_j}(z_0) - u_{x_ix_j}(t_0,\xi)\right| \leqslant \\ \leqslant c_1(N)\rho^2[u]_{1+\delta/2,2+\delta}\left(\rho^\delta\left((\vartheta,x),z_0\right) + \rho^\delta\left((t_0,\xi),z_0\right)\right) \leqslant \end{aligned}$$

$$\leqslant c_{11}\rho^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (2.6)$$

Из этого неравенства вытекает цепочка неравенств

$$\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)|\leqslant c_{11}\rho^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^{2+\delta}}\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)|\leqslant c_{11}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{z\in\mathbb{R}^{N+1}}\sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^{2+\delta}}\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)|\leqslant c_{11}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow [u]'_{1+\delta/2,2+\delta}\leqslant c_{11}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (2.7)$$

Шаг 2. Докажем [1] теперь второе неравенство в (2.3). Прежде всего обозначим через ∂ один из операторов

$$\frac{\partial}{\partial t},\quad \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Стандартным образом сопоставим этим операторам следующие конечно–разностные операторы σ_h при $h>0$:

$$u(t,x)\to\frac{1}{h^2}\Big[u(t,x)-u(t-h^2,x)\Big], \quad (2.8)$$

$$u(t,x)\to\frac{1}{h^2}\Big[u(t,x+he_i+he_j)-$$
$$-u(t,x+he_i)-u(t,x+he_j)+u(t,x)\Big]. \quad (2.9)$$

Кроме того, введем операторы σ'_h, следующего вида:

$$u(t,x)\to u_t(t-h^2,x), \quad (2.10)$$

$$u(t,x)\to\frac{1}{2}\Big[u_{x_ix_i}(t,x+he_i+he_j)+u_{x_jx_j}(t,x+he_i+he_j)+$$
$$+2u_{x_ix_j}(t,x+he_i+he_j)-u_{x_ix_i}(t,x+he_i)-u_{x_jx_j}(t,x+he_j)\Big] \quad (2.11)$$

Используя формулу Тейлора в выражениях (2.8) и (2.9) мы получим следующее равенство:

$$\sigma_h u(z)=\sigma'_{h'}u(z)\quad\text{при}\quad h'=h'(z)\leqslant h. \quad (2.12)$$

[1] Эта часть доказательства в силу его сложности доказывается в курсе в том случае, если имеется дополнительное время.

В частности, для любого $p(z) \in \mathcal{P}_2$ выражение $\sigma_h p(z)$ — это константа, не зависящая от h и z. Кроме того, если σ_h соответствует ∂ и $u(z) \in \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$, то справедлива цепочка выражений

$$|\sigma_h u(z) - \partial u(z)| = \left|\sigma'_{h'} u(z) - \partial u(z)\right| \leqslant c_2 h^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta}, \tag{2.13}$$

где c_2 — это абсолютная постоянная.

Теперь возьмем z_1, z_2 и обозначим $\rho = \rho(z_1, z_2)$ и выберем $h = \varepsilon\rho$, где константу $\varepsilon \in (0,1)$ мы выберем позже. Без ограничения общности будем считать, что $t_1 \leqslant t_2$. Тогда все точки

$$(t_n - h^2, t_n), \quad (t_n, x_n + he_i + he_j) \in Q_{3\rho}(z_2), \quad n = 1, 2.$$

Следовательно, для любого $p(z) \in \mathcal{P}_2$ имеем

$$\begin{aligned}|\partial u(z_1) - \partial u(z_2)| \leqslant |\partial u(z_1) - \sigma_h u(z_1)| + |\partial u(z_2) - \sigma_h u(z_2)| + \\ + |\sigma_h(u-p)(z_1) - \sigma_h(u-p)(z_2)| \leqslant 2c_2 h^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta} + \\ + |\sigma_h(u-p)(z_1)| + |\sigma_h(u-p)(z_2)|,\end{aligned}$$

причем

$$|\sigma_h(u-p)(z_i)| \leqslant \frac{4}{h^2}|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)} \leqslant c_3 \varepsilon^{-2} \rho^\delta [u]'_{1+\delta/2,2+\delta},$$

поскольку это верно для любых $p(z) \in \mathcal{P}_2$. Итак, получаем

$$|\partial u(z_1) - \partial u(z_2)| \leqslant 2c_2\varepsilon^\delta \rho^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta} + c_3\varepsilon^{-2}\rho^\delta [u]'_{1+\delta/2,2+\delta}.$$

Отсюда разделив обе части на ρ^δ и взяв supremum от обеих частей неравенства, приходим к следующему неравенству:

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant 2c_2\varepsilon^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta} + c_3\varepsilon^{-2}[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}.$$

Осталось выбрать величину $\varepsilon \in (0,1)$ настолько малым, чтобы

$$2c_2\varepsilon^\delta \leqslant \frac{1}{2}$$

и получим требуемое неравенство.

Теорема доказана.

§ 3. Оценки Бернштейна

В этом параграфе мы рассмотрим очень важные для дальнейших рассмотрений так называемые оценки, полученные методом Бернштейна. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $R > 0$ *и* $Q_R = B_R \otimes (-R^2, 0)$, $B_R = \{x \in \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$. *Предположим, что функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_R)$ *и бесконечное число раз дифференцируема в* Q_R *и удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \text{в} \quad Q_R.$$

Тогда при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ *и целом* $n \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$|D_t^n D_x^\alpha u(0)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha|+2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_R}. \tag{3.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что уравнение $\Delta u - u_t = 0$ инвариантно при замене $u(x,t)$ на $u(Rx, R^2 t.)$ Следовательно, достаточно доказать (3.1) только для $R = 1$, а затем сделать параболическое растяжение.

Шаг 2. Теперь мы применим метод Бернштейна. Возьмем функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ с носителем в $B_R \otimes (-R^2, R^2)$, предположим, что $\varphi(0) = 1$ и рассмотрим функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} \varphi^2(x,t)|D_x u|^2 + \mu^2 |u|^2, \quad \mu > 0, \tag{3.2}$$

причем выбор постоянной μ будет сделан ниже. Тогда, поскольку

$$\Delta u - u_t = 0, \quad \Delta u_{x_i} - u_{x_i t} = 0,$$

то имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}\Delta w - w_t = |D_x u|^2 \Delta(\varphi^2) + \varphi^2 \left[2u_{x_i} \Delta u_{x_i} + 2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}^2 \right] + \\ + 8\varphi\varphi_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} + 2\mu |D_x u|^2 + 2\mu u \Delta u - 2\varphi\varphi_t |D_x u|^2 - 2\varphi^2 u_{x_i} u_{x_i t} - \\ - 2\mu u u_t = |D_x u|^2 [2\mu + \Delta(\varphi^2) - 2\varphi\varphi_t] + \\ + 2\varphi^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}^2 + 8[\varphi_{x_i} u_{x_j}][\varphi u_{x_i x_j}] \geqslant \\ \geqslant |D_x u|^2 \left[2\mu + \Delta(\varphi^2) - 8|D_x \varphi|^2 - 2\varphi\varphi_t \right],\end{aligned} \tag{3.3}$$

где мы воспользовались следующими неравенствами:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij} b_{ij} \leqslant \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad a_{ij}, b_{ij} \geqslant 0,$$

$$\left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}^2 \right)^{1/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Взяв
$$a_{ij} = \varphi_{x_i} u_{x_j}, \quad b_{ij} = \varphi u_{x_i x_j}, \quad \varepsilon = 2,$$
мы получим следующую оценку:
$$2\varphi^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_i x_j} + 8[\varphi_{x_i} u_{x_j}][\varphi u_{x_i x_j}] \geqslant -8|D_x u|^2 |D_x \varphi|^2.$$

Шаг 3. Выбирая $\mu > 0$ достаточно большим, из цепочки выражений (3.3) получим неравенство
$$\Delta w - w_t \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Согласно принципу максимума имеем следующую цепочку выражений:
$$|D_x u|^2(0) \leqslant \sup_{(x,t)\in Q_1} w(x,t) \leqslant \sup_{(x,t)\in \partial' Q_1} w(x,t) = \mu \sup_{(x,t)\in \partial' Q_1} |u|^2. \tag{3.5}$$

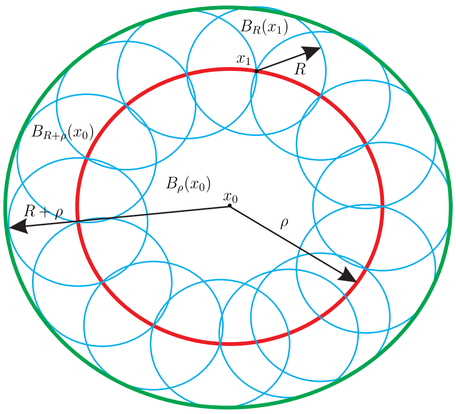
Отсюда получаем (3.1) для $|\alpha| = 1$, $n = 0$ и $R = 1$ и, следовательно, для всех $R > 0$.

Шаг 4. Для доказательства этого утверждения $|\alpha| = 2$ и $n = 0$ заметим, что
$$\Delta D_j u - (D_j u)_t = 0,$$
поэтому имеем
$$|D_i D_j u(0)| \leqslant \frac{M(N)}{R/2} |D_i u|_{0;Q_{R/2}} \leqslant \frac{M(N)}{R/2} \frac{M(N)}{R/2} |u|_{0;Q_R}.$$

Те же рассуждения справедливы при любом $|\alpha|$. Так что неравенство (3.1) доказано при $n = 0$. При $n \geqslant 1$ достаточно заметить, что
$$D_t D^\alpha u = \Delta D^\alpha u, \cdots, D_t^n D^\alpha u = \Delta^n D^\alpha u,$$
откуда получаем (3.1) для $n \geqslant 1$.

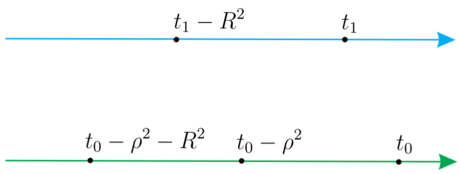
Теорема доказана.

Замечание 3. Отметим, что выбор начала координат является несущественным. Тогда при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ и целом $n \geqslant 0$ справедлива оценка
$$|D_t^n D_x^\alpha u(z)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n} (|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_R(z)}, \tag{3.6}$$
где $Q_R(z) = z + Q_R$. Более того, из оценки (3.6) вытекает следующая оценка:
$$|D_t^n D_x^\alpha u(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n} (|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_{R+\rho}(z_0)}, \tag{3.7}$$



$$\sup_{x_1 \in B_\rho(x_0)} |u|_{0;B_R(x_1)} = |u|_{0;B_{\rho+R}(x_0)}$$

Рис. 40. К формуле (3.7) «x переменная».



$$\sup_{t_1 \in (t_0-\rho^2, t_0)} |u|_{0;(t_1-R^2,t_1)} = |u|_{0;(t_0-\rho^2-R^2,t_0)}$$

Рис. 41. К формуле (3.7) «t переменная».

Теорема типа Лиувилля. *Решение* $u = u(x,t) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\mathbb{R}^{N+1})$ *уравнения*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^{N+1},$$

удовлетворяющая условию $|u(x,t)| \leqslant M_1$ $(M_1 > 0)$, *является постоянной*

$$u(x,t) = const.$$

Доказательство.
В силу неравенства (3.6) и условия $|u(x,t)| \leqslant M$ мы получим два неравенства

$$|D_t u(z)| \leqslant \frac{M_2}{R^2}, \quad |D_x^\alpha u(z)| \leqslant \frac{M_3}{R}, \quad |\alpha| = 1, \tag{3.8}$$

где постоянные $M_2 > 0$ и $M_3 > 0$ не зависят от $R > 0$. Устремим теперь $R \to +\infty$ в неравенствах (3.8) и получим следующие равенства:

$$|D_t u(z)| = 0, \quad |D_x^\alpha u(z)| = 0, \quad |\alpha| = 1 \Rightarrow u(z) = const$$

для всех $z = (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Теорема доказана.

§ 4. Априорная оценка Шаудера

Прежде чем формулировать теорему об априорных оценках Шаудера нам нужно напомнить некоторые обозначения. Предположим, что $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — ограниченная область. Область D ограничивается замыканием $\overline{B}$ области $B \in \mathbb{R}^N$ при $t = 0$, областью B_T на гиперплоскости $t = T$ и многообразием S (не обязательно связным), лежащим в полосе $0 < t \leqslant T$. Положим

$$B_\tau = D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau = S \cap \{t \leqslant \tau\}, \quad D_\tau = D \cap \{t < \tau\}.$$

Предположим, что B_τ является областью в $\mathbb{R}^N$ для любого $\tau \in (0, T)$. Кроме того, предположим, что существуют некоторая точка Q_1 на нижней крышке B и некоторая точка Q_2 на верхней крышке B_T, которые можно соединить простой непрерывной кривой γ, вдоль которой от Q_1 к Q_2 координата t не убывает.

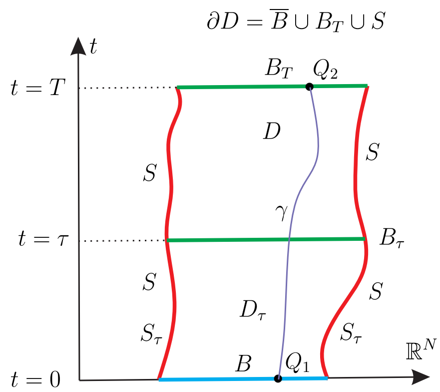


Рис. 42. Область D и некоторые множества.

Определение 1. *Мы скажем, что область D обладает свойством* (E), *если для каждой точки $Q \in \overline{S}$ существует $(N+1)$–мерная окрестность V, такая, что $V \cap \overline{S}$ может быть представлено в виде*

$$x_i = h(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N, t), \tag{4.1}$$

где h, $\partial_x h$, $\partial_x^2 h$, $\partial_t h$ — непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha \in \in (0, 1]$ относительно параболического расстояния (1.2).

Замечание 4. Отметим, что из этого определения вытекает, что касательные гиперплоскости к $\overline{S}$ ни в одной из точек $\overline{S}$ не могут иметь вида $t = const$. Смотри рисунок 43.

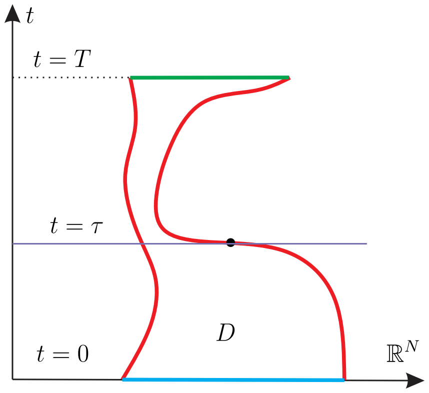


Рис. 43. Область D с точкой касания гиперплоскостью $t = const$.

Теперь нам следует изучить вопрос о возможности существования функции $\Psi(x,t)$, определенной на замыкании $\overline{D}$ всей области D, являющейся продолжением функции $\psi(x,t)$, определенной на нормальной границе $\partial^{'} D = \overline{B} \cup S$ области D. Эта функция напомним возникает при рассмотрении первой краевой задачи при задании граничного условия

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad \partial^{'} D.$$

Дадим следующее определение:

Определение 2. *Говорят, что функция $\psi(x,t)$, определенная на нормальной границе $\partial^{'} D = \overline{B} \cup S$ принадлежит классу $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, если в $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ существует хотя бы одна функция $\Psi(x,t)$, такая, что $\Psi = \psi$ на $\partial^{'} D$.*

При этом введем следующую величину:

$$|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \stackrel{def:}{=} \inf_{\Psi} |\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}. \tag{4.2}$$

Замечание 5. Отметим, что при выполнении условия (E) и при условии, что $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, то для всякого продолжения $\Psi(x,t)$ функции $\psi(x,t)$ производная

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \Psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$$

однозначно определяется по непрерывности на границе ∂B области B (нижней крышке области D). Соответственно на границе ∂B определена функция

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Аналогичным образом можно определить по непрерывности все слагаемые в выражении $L\psi$.

Наконец, сделаем следующие предположения:

($\overline{\text{A}}$) Коэффициенты параболического оператора L принадлежат классу $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$, причем

$$|a_{ij}|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1, \quad |b_i|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1, \quad |c|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1. \tag{4.3}$$

($\overline{\text{B}}$) Для любой точки $(x,t) \in D$ и любого действительного вектора ξ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant K_2|\xi|^2, \quad K_2 > 0. \tag{4.4}$$

($\overline{\text{C}}$) Функция $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$.

Теперь мы в состоянии рассмотреть вопрос об априорных оценках вблизи границы для решения $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ первой краевой задачи следующего вида:

$$Lu(x,t) \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t), \tag{4.5}$$

при $(x,t) \in D \cup B_T$,

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на нормальной границе} \quad \partial' D = \overline{B} \cup S. \tag{4.6}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Если выполняются условия* ($\overline{\text{A}}$), ($\overline{\text{B}}$) *и* ($\overline{\text{C}}$), *область* D *удовлетворяет свойству* (E) *и* $\psi \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, *то существует постоянная* $K_3 = K_3(K_1, K_2, \alpha, D)$, *такая, что для решения* $u(x,t)$ *класса* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ *задачи* (4.5), (4.6) *имеет место следующая априорная оценка Шаудера*:

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3\left(|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |f|_{\alpha/2,\alpha;D}\right). \tag{4.7}$$

Доказательство.

Доказательство этой сложной теоремы будет частично доказано в следующем параграфе.

Теорема доказана.

§ 5. Доказательство априорной оценки Шаудера в $\mathbb{R}^{N+1}$ по методу Сафонова [1)]

В этом разделе мы приведем доказательство основной априорной оценки в параболических пространствах Гельдера, доказанная оригинальным методом Сафоновым примерно в 1984 г. Пусть $\delta \in (0,1)$.

[1)] Этот параграф не входит в практический курс лекций.

Теорема 5. *Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^{N+1})$. Положим $f = \Delta u - u_t$. Тогда существует константа $M = M(N,\delta)$ такая, что*

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}. \tag{5.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Возьмем $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\rho > 0$ и константу $K \geqslant 1$, которую уточним ниже. Выберем также функцию $\varphi(z) \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^{N+1})$ такую, что

$$\varphi(z) = 1 \quad \text{в} \quad z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0) = B_R(x_0) \otimes (t_0 - (K+1)^2\rho^2, t_0).$$

Определим теперь следующую величину:

$$T_{z_0}u(z) \overset{def:}{=} u(z_0) + (t-t_0)u_t(z_0) + \\ + u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2}u_{x_ix_j}(z_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}), \tag{5.2}$$

где $\rho(z,z_0) \leqslant \rho$ и поэтому, в частности, $|t-t_0| \leqslant \rho^2$ и $|x - x_0| \leqslant \rho$. Пусть

$$g(z) \overset{def:}{=} \Delta\left(\varphi(z)T_{z_0}u(z)\right) - \left(\varphi(z)T_{z_0}u(z)\right)_t, \quad z = (x,t). \tag{5.3}$$

Справедливо следующее равенство:

$$g(z) = \Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) - \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = f(z_0) \tag{5.4}$$

при $z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$.

□ Действительно, непосредственным вычислением с учетом определения (5.2) величины $T_{z_0}u(z)$ получим равенство

$$\Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) = \Delta u(z_0), \quad \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = u_t(z_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta\left(T_{z_0}u(z)\right) - \left(T_{z_0}u(z)\right)_t = \Delta u(z_0) - u_t(z_0) = f(z_0). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Прежде всего заметим, что в силу того, что $u(x,t) \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^{N+1})$, то имеет место следующее равенство:

$$u(x,t) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s,x-y)f(y,s)\,dy\,ds = -G_0 * f, \quad f = \Delta u - u_t, \tag{5.5}$$

где

$$G_0(x,t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right].$$

И, аналогично, в силу (5.3) имеем

$$\varphi(z)T_{z_0}u(z) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s,x-y)g(y,s)\,dy\,ds = -G_0 * g. \tag{5.6}$$

Поэтому при $z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$ в силу (5.4) имеет место следующая цепочка равенств:

$$u(z) - T_{z_0}u(z) = u(z) - \varphi(z)T_{z_0}u(z) = -G_0 * (f - g) = \\ = G_0 * \left[(f(z_0) - f(z))I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}\right] + G_0 * [(g - f)I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}] = \\ = r(z) + h(z), \quad (5.7)$$

где

$$I_D(z) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad z \in D; \\ 0, & \text{если} \quad z \notin D, \end{cases} \quad D^c = \mathbb{R}^N \backslash D.$$

Шаг 3. Прежде всего заметим, что

$$h(z) = G_0 * [(g - f)I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}] = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t - s, x - y) \left[(g(y,s) - f(y,s))I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}(y,s)\right] dy\, ds, \quad (5.8)$$

то при $z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$ особенности у подынтегрального выражения нет — она просто равно нулю при $(y,s) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$, а особенность фундаментального решения $G(t-s, x-y)$ имеется как раз при $t = s$ и $x = y$, а при $t > s$ и $x \neq y$ фундаментальное решение бесконечное число раз дифференцируемо по (x,t). Следовательно,

$$h(z) \in \mathbb{C}^\infty(Q_{(K+1)\rho}(z_0)), \quad (5.9)$$

$$\Delta h(z) - (h(z))_t = 0 \quad \text{при} \quad z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0). \quad (5.10)$$

Шаг 4. Применим теперь к функции $h(z)$ процедуру (2.6), которую мы для удобства воспроизведем. Прежде всего заметим, что для $z = (x,t) \in Q_\rho(z_0)$ в силу формулы Тейлора имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|h_t(\vartheta, x) - h_t(z_0)| \leqslant \rho^2 \left|D_t^2 h\right|_{0;Q_\rho(z_0)} + \rho \left|D_x D_t h\right|_{0;Q_\rho(z_0)}. \quad (5.11)$$

Наконец, в силу (2.6) и оценок Бернштейна (3.7) справедлива следующая оценка (2.6)

$$|h(z) - T_{z_0}h(z)| \leqslant |t - t_0|\, |h_t(\vartheta, x) - h_t(z_0)| + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|h_{x_i x_j}(z_0) - h_{x_i x_j}(t_0, \xi)\right| |x_i - x_{0i}||x_j - x_{0j}| \leqslant \\ \leqslant \rho^4 \left|D_t^2 h\right|_{0;Q_\rho(z_0)} + \rho^3 \left|D_x D_t h\right|_{0;Q_\rho(z_0)} +$$

$$+\rho^3 \sum_{i,j,k=1,1,1}^{N,N,N} |D_i D_j D_k h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant$$

$$\leqslant M\left(K^{-4}+K^{-3}\right)|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant MK^{-3}|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)}. \quad (5.12)$$

Шаг 5. Теперь оценим функцию $r(z)$ из (5.7). Действительно,

$$|r(z)| = \left|G_0 * \left[(f(z_0)-f(z))I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\right]\right| =$$

$$= \left|G_0 * \left[\left(\frac{f(z_0)-f(z)}{\rho^\delta(z,z_0)}\right) I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\rho^\delta(z,z_0)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant [f]_{\delta/2,\delta}\,[(K+1)\rho]^\delta \left|G_0 * I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\right| \leqslant$$

$$\leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}\,[(K+1)\rho]^{2+\delta}, \quad (5.13)$$

где мы воспользовались легко доказываемым неравенством

$$|G_0 * I_{Q_R}| \leqslant MR^2.$$

□ Действительно,

$$G_0 * I_{Q_R(z_0)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, G_0(x-y,t-s) I_{Q_R(z_0)}(y,s) =$$

$$= \int\limits_{t_0-R^2}^{t_0} ds \int\limits_{B_R(x_0)} dy\, \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right]. \quad (5.14)$$

Теперь сделаем следующую замену переменных

$$s = R^2 s_1, \quad y = Ry^1$$

в результате которой получим

$$G_0 * I_{Q_R(z_0)} =$$

$$= R^2 \int\limits_{t_0/R^2-1}^{t_0/R^2} ds^1 \int\limits_{|y^1-x_0/R|\leqslant 1} dy^1\, \frac{R^N}{(4\pi(t-R^2s^1))^{N/2}} \exp\left[-\frac{|x-y^1R|^2}{4(t-R^2s^1)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant MR^2,$$

где постоянная $M>0$ не зависит от $R>1$. ⊠

Теперь мы можем воспользоваться снова неравенством (2.6), которое имеет следующий вид:

$$|u(z) - T_{z_0}u(z)|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant M[(K+1)\rho]^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (5.15)$$

Наконец, в силу (5.13) и (5.15) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} = |u - T_{z_0}u - r|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant \\
\leqslant |u - T_{z_0}u|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} + |r|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant \\
\leqslant M(K+1)^{2+\delta}\rho^{2+\delta}\left([f]_{\delta/2,\delta} + [u]_{1+\delta/2,2+\delta}\right) \quad (5.16)
\end{aligned}
$$

Шаг 6. В силу неравенств (5.12), (5.13) и (5.16) имеем

$$
\begin{aligned}
\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z) - p(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant |u(z) - T_{z_0}u(z) - T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \\
\leqslant |u(z) - T_{z_0}u(z) - h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} + |h(z) - T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} = \\
= |r|_{0;Q_\rho(z_0)} + |h(z) - T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \\
\leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}\left[(K+1)\rho\right]^{2+\delta} + \\
+ K^{-3}M(K+1)^{2+\delta}\rho^{2+\delta}\left([f]_{\delta/2,\delta} + [u]_{1+\delta/2,2+\delta}\right) \quad (5.17)
\end{aligned}
$$

Разделим обе части последнего неравенства на $\rho^{2+\delta}$ и взяв supremum от обеих частей по всем $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ и $\rho > 0$ в силу эквивалентности полунорм $[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}$ и $[u]_{1+\delta/2,2+\delta}$ получим следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant \\
\leqslant MK^{-3}(K+1)^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta} + M(K+1)^{2+\delta}[f]_{\delta/2,\delta}. \quad (5.18)
\end{aligned}
$$

Осталось выбрать $K > 0$ настолько большим, чтобы величина

$$
MK^{-3}(K+1)^{2+\delta} \leqslant \frac{1}{2},
$$

поскольку по условию $\delta \in (0,1)$.

Теорема доказана.

Теперь мы можем продолжить результат теоремы 5 на случай функций класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$. Действительно, справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть* $u \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$. *Определим* $f = \Delta u - u_t$. *Тогда существует константа* $M = M(N,\delta)$ *такая, что*

$$
[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}. \quad (5.19)
$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала предположим, что $u(x,t)$ бесконечное число раз дифференцируема. Пусть $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ — это такая функция, что $|\varphi(x)| \leqslant 1$ и $\varphi(0) = 1$. По этой функции определим

$$
\varphi_R(z) = \varphi\left(\frac{z}{R}\right) \quad \text{и} \quad u_R(z) = u(z)\varphi_R(z). \quad (5.20)
$$

Тогда в силу теоремы 5 имеем

$$[u_R]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M[\Delta u_R - u_{Rt}]_{\delta/2,\delta}. \tag{5.21}$$

Заметим, что

$$\Delta u_R(z) - u_{Rt} =$$
$$= \varphi_R(z) f(z) + \frac{1}{R^2} u(z) \left(\Delta\varphi\right)(z/R) - \frac{1}{R} u(z)\varphi_t(z/R) + \frac{2}{R} u_{x_i}(z)\varphi_{x_i}(z/R),$$

причем

$$[\varphi_R]_{\delta/2,\delta} = \sup_{z_1\neq z_2} \frac{|\varphi_R(z_1) - \varphi_R(z_2)|}{\rho^\delta(z_1,z_2)} \leqslant \frac{M}{R^{\delta/2}}.$$

Теперь, воспользовавшись неравенством (1.22):

$$[uv]_{\delta/2,\delta} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta}, \tag{5.22}$$

получим

$$\begin{gathered}[\Delta u_R(z) - u_{Rt}]_{\delta/2,\delta} \leqslant |f|_{0;D}[\varphi_R]_{\delta/2,\delta} + |\varphi_R|_{0;D}[f]_{\delta/2,\delta} + \\ + \frac{1}{R^2}[u(z)\left(\Delta\varphi\right)(z/R)]_{\delta/2,\delta} + \frac{1}{R}[u(z)\varphi_t(z/R)]_{\delta/2,\delta} + \\ + \frac{2}{R}[u_{x_i}(z)\varphi_{x_i}(z/R)]_{\delta/2,\delta} \leqslant \frac{M}{R^{\delta/2}} + [f]_{\delta/2,\delta}\end{gathered} \tag{5.23}$$

Шаг 2. В силу определения функции u_R имеем и результата (5.23)

$$|u_R|_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M, \tag{5.24}$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от $R \geqslant 1$. Возьмем теперь $R = m \in \in \mathbb{N}$. Используя известный результат теории банаховых пространств мы получим, что существует такая подпоследовательность $\{u_{m'}\} \subset \{u_m\}$, что

$$|u|_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant \liminf_{m'\to+\infty} |u_{m'}|_{1+\delta/2,2+\delta}, \tag{5.25}$$

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1}) \quad \text{при} \quad m' \to +\infty, \tag{5.26}$$

причем в силу вполне непрерывного вложения $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K)$ в $\mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(K)$ для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$ имеем

$$D_t u_{m'}(x,t) \rightrightarrows D_t u(x,t), \quad D^\alpha_x u_{m'}(x,t) \rightrightarrows D^\alpha_x u(x,t), \quad |\alpha| \leqslant 2 \tag{5.27}$$

равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Полунорма $[\cdot]_{1+\delta/2,2+\delta;K}$ является слабо полунепрерывной снизу на банаховом пространстве $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K)$ для любого компакта $K \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

$\square$ Действительно, пусть $\{u_{m'}\} \subset \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K)$ и

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K) \quad \text{при} \quad m' \to +\infty,$$

тогда в силу вполне непрерывного вложения $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K) \hookrightarrow \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(K)$ имеем

$$u_{m'} \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(K) \quad \text{при} \quad m' \to +\infty.$$

Поскольку полунорму $[\cdot]_{1+\delta/2,2+\delta;K}$ можно представить в следующем виде:

$$[u]_{1+\delta/2;2+\delta;K} = \\ = |u|_{1+\delta/2,2+\delta;K} - |u|_{0;K} - \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;K} + |u_t|_{0;K} - \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;K}, \tag{5.28}$$

где норма $|u|_{1+\delta/2,2+\delta;K}$ является слабо полунепрерывной снизу на $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K)$, а норма

$$\|u\| \overset{def:}{=} |u|_{0;K} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;K} + |u_t|_{0;K} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;K}$$

слабо непрерывна на $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K) \hookrightarrow \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(K)$, то в силу (5.28) полунорма $[\cdot]_{1+\delta/2,2+\delta;K}$ является слабо полунепрерывной снизу на банаховом пространстве $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(K)$. $\boxtimes$

Поэтому в силу (5.21), (5.23) и (5.25) мы получим, что

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta;K} \leqslant \liminf_{m' \to +\infty} [u_{m'}]_{1+\delta/2,2+\delta;K} \leqslant \\ \leqslant \liminf_{m' \to +\infty} [u_{m'}]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}, \tag{5.29}$$

где константа M не зависит от выбора компакта $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Следовательно,

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} = \sup_{K \subset \mathbb{R}^N} [u]_{1+\delta/2,2+\delta;K} \leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}. \tag{5.30}$$

Шаг 3. Рассмотрим функцию $\omega_\varepsilon(z) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ следующего явного вида:

$$\omega(z) \overset{def:}{=} \begin{cases} c_1 \exp\left\{-\frac{1}{1-|z|^2}\right\}, & \text{если} \quad |z| \leqslant 1; \\ 0, & \text{если} \quad |z| \geqslant 1, \end{cases} \tag{5.31}$$

$$\omega_\varepsilon(z) \overset{def:}{=} \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \omega\left(\frac{z}{\varepsilon}\right), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^{N+1}} \omega(z)\, dz = 1.$$

Теперь мы можем ввести срезку функции $u(z) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$

$$u_\varepsilon(z) = \omega_\varepsilon * u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x-y, t-s) u(y,s)\, dy\, ds. \tag{5.32}$$

Известен следующий результат:

$$u_\varepsilon(z) \in \mathbb{C}_b^\infty(\mathbb{R}^{N+1}). \tag{5.33}$$

Кроме того, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} = \lim_{\varepsilon \downarrow +0} [u^\varepsilon]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M \limsup_{\varepsilon\downarrow+0} [\Delta u_\varepsilon - u_{\varepsilon t}]_{\delta/2,\delta} = \\ = M \limsup_{\varepsilon\downarrow+0} \left[(\Delta u - u_t)_\varepsilon\right]_{\delta/2,\delta} \leqslant M \left[\Delta u - u_t\right]_{\delta/2,\delta}. \tag{5.34}$$

Лемма доказана.

Замечание 6. Заметим, что если полная граница ∂D (нормальная граница + верхняя крышка — $\partial' D \cup B_T$) является гладкой, то применяя срезку решения можно получить априорную оценку Шаудера в области D.

Однако, многочисленные разумные задачи таковы, что полная граница области не обладает свойством гладкости. Кроме того, краевые условия задаются только на нормальной границе $\partial' D$ и поэтому мы apriori не знаем значение решения на верхней крышке B_T. Поэтому в отличие от эллиптического случая мы не можем так просто получить априорную оценку Шаудера в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

§ 6. Решение первой краевой задачи

Для того чтобы провести редукцию первой краевой задачи (4.5), (4.6) к случаю $\psi(x,t) \equiv 0$ нужно в дополнение привести следующее определение:

Определение 3. *Если область D обладает свойством* (E) *и, кроме того, производные $\partial_x \partial_t h$ и $\partial_t^2 h$ от функций h, локально представляющих $\overline{S}$, являются непрерывными, то мы скажем, что D обладает свойством* ($\overline{\text{E}}$).

Теорема 6. *Если выполняются условия* ($\overline{\text{A}}$), ($\overline{\text{B}}$), ($\overline{\text{C}}$), *область D обладает свойством* ($\overline{\text{E}}$), $\psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, $L\psi = f$ *на* ∂B, [1]) *то существует единственное решение $u(x,t)$ первой краевой задачи* (4.5), (4.6) *класса* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$.

Доказательство.

Шаг 1. Единственность была ранее доказана с помощью принципа максимума.

[1]) Это естественное условие согласования.

Шаг 2. Проведем редукцию исходной задачи (4.5), (4.6) к случаю $\psi(x,t)$. Если $\Psi \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, то в силу свойства (A) получим, что

$$|L\Psi|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant c_1 |\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}.$$

Таким образом, мы можем ввести новую функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - \Psi(x,t)$$

с какой–нибудь функцией $\Psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, совпадающей с ψ на нормальной границе $\partial' D = \overline{B} \cup S$ и учесть, что

$$\begin{aligned}|Lv|_{\alpha/2,\alpha;D} &\leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + |L\Psi|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \\ &\leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + c_1|\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + 2c_1|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}\end{aligned}$$

А далее нужно использовать эту априорную оценку вместо (4.7).

Шаг 3. Изложим схему доказательства *метода продолжения по параметру*. Рассмотрим однопараметрическое семейство параболических операторов

$$L_\lambda = \lambda L + (1-\lambda) L_0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{6.1}$$

где

$$L_0 \stackrel{def:}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Обозначим через Σ множество всех значений λ, для которых задача

$$L_\lambda u_\lambda(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.2}$$

$$u_\lambda(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S \tag{6.3}$$

имеет единственное решение $u_\lambda(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$ такой, что $f(x,t) = 0$ на ∂B.

Нам нужно доказать следующие свойства:

(i) Σ содержит $\lambda = 0$, т. е. множество Σ не пусто;

(ii) Σ — открытое множество в сегменте $[0,1]$, т. е. если $\lambda_0 \in \Sigma$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что все λ такие, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ содержатся в Σ;

(iii) Σ — замкнутое множество, т. е. для любой последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Sigma$ таких, что $\lambda_n \to \overline{\lambda}$ следует, что $\overline{\lambda} \in \Sigma$.

Если $\Sigma \subset [0,1]$ удовлетворяет свойствам (i)–(iii), то это множество является непустым открыто–замкнутым множеством в метрическом пространстве $([0,1], d(a,b) = |a-b|)$. Но известно, что в этом метрическом пространстве имеется только два открыто–замкнутых множества — это пустое множество $\varnothing$ и сам отрезок $[0,1]$. Поскольку в силу (i) множество $\Sigma \neq \varnothing$, то следовательно $\Sigma = [0,1]$, а, значит, краевая задача

$$L_1 u_1(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.4}$$

$$u_1(x,t)=0 \quad \text{на} \quad \overline{B}\cup S \tag{6.5}$$

имеет единственное решение $u_1(x,t)\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ для любой $f(x,t)\in\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$ такой, что $f(x,t)=0$ на ∂B. Это и есть решение первой краевой задачи для параболического оператора L.

Теперь приступим к реализации этой схемы.

Шаг 4. Прежде всего заметим, что доказательство свойства (i) довольно сложное, однако гораздо проще, чем непосредственное доказательство однозначной разрешимости первой краевой задачи для общего параболического уравнения. Тем самым, считаем результат (i) известным.

Шаг 5. Запишем $L_\lambda u_\lambda=f$ в следующем эквивалентном виде:

$$L_{\lambda_0}u_\lambda=(L_{\lambda_0}u_\lambda-L_\lambda u_\lambda)+f=F(u_\lambda). \tag{6.6}$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$v=A(u),$$

определенное следующим образом: для функции $u(x,t)\in\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, равной нулю на $\overline{B}\cup S$, возьмем в качестве $A(u)$ (единственное) решение задачи

$$L_{\lambda_0}v=F(u) \quad \text{при} \quad (x,t)\in D\cup B_T, \quad v=0 \quad \text{на} \quad \overline{B}\cup S. \tag{6.7}$$

Так как $\lambda_0\in\Sigma$ и $F(u)\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, $F=0$ на ∂B, то преобразование $v=Au$ определено для всех $u\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, равных нулю на $\overline{B}\cup S$.

Если мы докажем, что для некоторой функции $u(x,t)$ выполняется равенство $Au=u$, то u будет единственным решением задачи (6.2), (6.3) и, следовательно, $\lambda\in\Sigma$.

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}F(u)=f+[\lambda_0L+(1-\lambda_0)L_0]\,u-[\lambda L+(1-\lambda)L_0]\,u=\\ =f+(\lambda_0-\lambda)Lu+(\lambda-\lambda_0)L_0u,\end{aligned} \tag{6.8}$$

из которой вытекает следующая оценка:

$$|F(u)|_{\alpha/2,\alpha;D}\leqslant K_4|\lambda-\lambda_0||u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}+|f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \tag{6.9}$$

где K_4 — это постоянная, не зависящая от λ, u и f. Здесь мы воспользовались следующими неравенствами:

$$|Lu|_{\alpha/2,\alpha;D}\leqslant M|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}, \quad |L_0u|_{\alpha/2,\alpha;D}\leqslant M_0|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D},$$

справедливость которых вытекает из оценки (1.26).

Применяя априорную оценку Шаудера (4.7), получим из (6.7 и (6.9) следующее неравенство:

$$|v|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3 K_4 |\lambda - \lambda_0| |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + K_3 |f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \qquad (6.10)$$

где K_3 не зависит от λ, u и f. Теперь воспользуемся снова априорной оценкой Шаудера (4.7) и получим, что, в частности,

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3 |f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \qquad (6.11)$$

С другой стороны, если потребовать, чтобы

$$K_3 K_4 |\lambda - \lambda_0| \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |v|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3 |f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \qquad (6.12)$$

Обозначая теперь через X_0 замкнутое в $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ множество, определенное следующим образом:

$$X_0 \stackrel{def:}{=} \left\{ u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D) : \; |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3 |f|_{\alpha/2,\alpha;D} \right\} \bigcap \\ \bigcap \left\{ u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad (x,t) \in \overline{B} \cup S \right\}. \qquad (6.13)$$

Из (6.11) и (6.12) приходим к выводу о том, что линейный оператор A отображает X_0 в X_0.

Докажем, что оператор A сжимающий на X_0. Действительно, пусть

$$v_1 = Au_1, \quad v_2 = Au_2, \quad u_1, u_2 \in X_0.$$

Тогда

$$L_{\lambda_0}(v_1 - v_2) = L_{\lambda_0}(u_1 - u_2) - L_\lambda(u_1 - u_2) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T,$$

$$v_1 - v_2 = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S.$$

Аналогичными рассуждениями при помощи априорной оценки Шаудера (4.7) получим неравенство

$$|v_1 - v_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant \\ \leqslant K_3 K_4 |\lambda - \lambda_0| |u_1 - u_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant \frac{1}{2} |u_1 - u_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$$

при условии

$$K_3 K_4 |\lambda - \lambda_0| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, оператор при таких λ является сжимающим на X_0 —замкнутом, выпуклом и ограниченном множестве из $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$. Следовательно, в силу теоремы о сжимающем отображении мы приходим к выводу о существовании единственной неподвижной точки $u(x,t) \in X_0$.

Шаг 6. Пусть $\lambda_m \in \Sigma$ и

$$\lambda_m \to \sigma \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Нам нужно доказать, что $\sigma \in \Sigma$, т. е. для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$, равной нулю на ∂B, существует функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, такая, что

$$L_\sigma u = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.14}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S. \tag{6.15}$$

По предположению для каждого m существует функция $u_m(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, такая, что

$$L_{\lambda_m} u_m = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.16}$$

$$u_m = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S. \tag{6.17}$$

Заметим, что коэффициенты семейства операторов L_λ удовлетворяют условиям $(\overline{\text{A}})$ и $(\overline{\text{B}})$ с константами K_1 и K_2, не зависящими от λ. Поэтому применяя априорную оценку Шаудера (4.7), мы получим следующее неравенство

$$|u_m|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3 |f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \tag{6.18}$$

где K_3 не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее используя теорему Асколи–Арцела, как при доказательстве теоремы 1, докажем, что существует подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, которую мы снова обозначим через $\{u_m\}$, такая, что

$$\{u_m\}, \quad \{D_x u_m\}, \quad \{D_x^2 u_m\}, \quad \{D_t u_m\} \tag{6.19}$$

равномерно сходятся в D. Кроме того, если $u_m \to u$ равномерно в D, то соответствующие последовательности производных сходится равномерно к соответствующим производным u, причем

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D).$$

Переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенствах (6.16) и (6.17), записанных для соответствующей подпоследовательности $\{u_m\}$, получим равенства

$$L_\sigma u = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.20}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B} \cup S. \tag{6.21}$$

Следовательно, $\sigma \in \Sigma$ — множество Σ замкнуто.

Теорема доказана.

Тематическая лекция 4

ПАРАМЕТРИКС

В этой лекции мы рассмотрим вопрос о построении фундаментальных решений равномерно параболических операторов второго порядка с переменными коэффициентами. При этом мы воспользуемся хорошо известным методом Леви. Помимо этой цели в настоящей лекции мы попутно изучим свойства объемного потенциала.

§ 1. Определения

Рассмотрим следующий оператор в частных производных:

$$Lu \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (1.1)$$

где коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ определены в цилиндре

$$\Omega \equiv \overline{D} \otimes [T_0, T_1] \equiv \left\{(x,t): \ x \in \overline{D}, \quad T_0 \leqslant t \leqslant T_1\right\},$$

причем D — это ограниченная область $\mathbb{R}^N$.

Относительно коэффициентов предположим, что симметричная матрица $(a_{ij}(x,t))$ является положительно определенной в каждой точке $(x,t) \in \Omega$. Это равносильно следующему неравенству:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N. \qquad (1.2)$$

Определение 1. *Оператор L при условии* (1.2) *называется параболическим.*

Помимо условия (1.2) мы будем также использовать следующее более сильное — найдутся такие постоянные $\overline{\lambda}_0 > 0$ и $\overline{\lambda}_1 > 0$

$$\overline{\lambda}_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \overline{\lambda}_1|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^N \qquad (1.3)$$

и для всех $(x,t) \in \Omega$.

Определение 2. *Оператор L при условии* (1.3) *называется равномерно параболическим.*

Всюду в этой главе мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(A_1) оператор L — равномерно параболический в Ω;

(A_2) коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ непрерывные функции в Ω и для всех $(x_0,t_0)\,,(x,t)\in\Omega$ выполнены неравенства при $\alpha\in(0,1)$

$$|a_{ij}(x,t)-a_{ij}(x_0,t_0)|\leqslant A\left(|x-x_0|+|t-t_0|^{1/2}\right)^{\alpha}, \tag{1.4}$$

$$|b_i(x,t)-b_i(x_0,t)|\leqslant A\,|x-x_0|^{\alpha}, \tag{1.5}$$

$$|c(x,t)-c(x_0,t)|\leqslant A\,|x-x_0|^{\alpha}. \tag{1.6}$$

Определение 3. *Непрерывная функция $u(x,t)$ называется классическим решением уравнения $Lu=0$ в области $Q\subset\mathbb{R}^{N+1}$, если все слагаемые входящие в оператор Lu, т.е.*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},\quad \frac{\partial u}{\partial t},$$

являются непрерывными функциями в области Q и уравнение $Lu(x,t)=0$ выполнено в каждой точке $(x,t)\in Q$.

Замечание 7. Отметим, что, в частности, мы не требуем ограниченности самого решения $u(x,t)$ и его непрерывности вплоть до границы ∂Q области Q.

Дадим теперь определение фундаментального решения уравнения $Lu(x,t)=0$ в цилиндрической области $\Omega=D\otimes(T_0,T_1)$.

Определение 4. *Фундаментальным решением $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ называется функция, определенная для всех $(x,t)\in\Omega$, $(\xi,\tau)\in\Omega$, $t>\tau$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *для фиксированных $(\xi,\tau)\in\Omega$ она как функция (x,t) при $x\in D$ и $\tau<t\leqslant T_1$ удовлетворяет уравнению $L\Gamma(x,t;\xi,\tau)=0$;*

(ii) *для каждой функции $f(x)\in\mathbb{C}(\overline{D})$ справедливо предельное свойство*

$$\lim_{\tau\to t-0}\int\limits_D \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi)\,d\xi=f(x). \tag{1.7}$$

Замечание 8. Например, фундаментальным решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0 \tag{1.8}$$

является следующая функция

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)\overset{def}{=}\frac{\vartheta(t-\tau)}{(4\pi(t-\tau))^{N/2}}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]. \tag{1.9}$$

§ 2. Параметрикс

Идея построения фундаментального решения равномерно параболического оператора по методу Леви заключается в построении фундаментального решения (в смысле пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$) оператора L_0

$$L_0 \overset{def:}{=} \sum_{i,j=1}^{N,N} a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}. \tag{2.1}$$

с замороженными коэффициентами в некоторой точке $(\xi,\tau) \in \Omega$. Для построения фундаментального решения этого оператора запишем следующее уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^{N,N} a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial^2 Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial t} = -\delta(x-\xi,t-\tau). \tag{2.2}$$

Поскольку матрица $(a_{ij}(\xi,\tau))$ является положительно определенной, то существует ортогональная матрица $P(\xi,\tau)$ такая, что

$$P(\xi,\tau)(a_{ij}(\xi,\tau))P^T(\xi,\tau) = I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det(PP^T)\det(a_{ij}) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det P(\xi,\tau) = \left(\det(a_{ij}(\xi,\tau))\right)^{-1/2},$$

поскольку

$$\det P^T = \det P.$$

Сделаем ортогональное преобразование $y = P(\xi,\tau)(x-\xi)$ в уравнении (2.2). Тогда поскольку

$$\delta(x-\xi) = \det P(\xi,\tau)\delta(y)$$

мы после этого преобразования $P(\xi,\tau)$ мы получим следующее уравнение:

$$\Delta_y E(y,t;\xi,\tau) - \frac{\partial E(y,t;\xi,\tau)}{\partial t} = -\det P(\xi,\tau)\delta(y)\delta(t-\tau), \tag{2.3}$$

где

$$E(y,t;\xi,\tau) \overset{def:}{=} Z(\xi + P^{-1}y,t;\xi,\tau).$$

Уравнение (2.3) имеет решение следующего вида

$$E(y,t;\xi,\tau) = \frac{\vartheta(t-\tau)}{(4\pi(t-\tau))^{N/2}}\left[\det(a_{ij}(\xi,\tau)\right]^{-1/2}\exp\left(-\frac{|y|^2}{4(t-\tau)}\right). \tag{2.4}$$

Возвращаясь к переменной x по формуле $x - \xi = P^{-1}(\xi, \tau)y$ и воспользовавшись очевидными равенствами для обратной матрицы $\left(a^{ij}(\xi, \tau)\right)$ к матрице $(a_{ij}(\xi, \tau))$

$$\det(a_{ij}) = \frac{1}{\det(a^{ij})}, \quad P^{-1}(P^T)^{-1} = (a_{ij}(\xi, \tau)) \Rightarrow a^{ij}(\xi, \tau) = P^T P \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |y|^2 = y^T \cdot y = (x-\xi)^T P^T P (x - \xi) =$$
$$= \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^{ij}(\xi, \tau)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j),$$

мы получим следующее выражение для искомой функции $Z(x, t; \xi, \tau)$:

$$Z(x, t; \xi, \tau) = \frac{\vartheta(t-\tau)}{\left(4\pi(t-\tau)\right)^{N/2}} \left(\det(a^{ij}(\xi, \tau)\right)^{1/2} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\sum\limits_{i,j=1,1}^{N,N} a^{ij}(\xi, \tau)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{4(t-\tau)} \right), \quad (2.5)$$

где функция $\vartheta(t - \tau)$ — это функция Хевисайда и имеет следующий явный вид:

$$\vartheta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \geqslant \tau; \\ 0, & \text{если} \quad t < \tau. \end{cases} \quad (2.6)$$

Справедливо следующее определение:

Определение 5. *Функция $Z(x, t; \xi, \tau)$ называется параметриксом.*

Для удобства дальнейших вычислений перепишем параметрикс $Z(x, t; \xi, \tau)$ в следующем виде:

$$Z(x, t; \xi, \tau) = C(\xi, \tau) w^{\xi, \tau}(x, t; \xi, \tau), \quad (2.7)$$

где

$$w^{y,\sigma}(x, t; \xi, \tau) = \vartheta(t-\tau)(t-\tau)^{-N/2} \exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\sigma}(x, \xi)}{4(t-\tau)} \right], \quad (2.8)$$

$$C(\xi, \tau) = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}} \left[\det(a^{ij}(\xi, \tau))\right]^{1/2}, \quad (2.9)$$

$$\vartheta^{y,\sigma}(x, \xi) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^{ij}(y, \sigma)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j). \quad (2.10)$$

Заметим, что поскольку матрица $(a_{ij}(x,t))$ удовлетворяет условиям (A_1) и (A_2), то обратная матрица $(a^{ij}(x,t))$ как рациональная функция от элементов матрицы $(a_{ij}(x,t))$ со знаменателем вида $\det(a_{ij}(x,t))$, который в силу неравенства снизу (1.3) отделен снизу от нуля равномерно по $(x,t) \in \overline{\Omega}$, удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\lambda_0|x-\xi|^2 \leqslant \vartheta^{y,\sigma}(x,\xi) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^{ij}(y,\sigma)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j) \leqslant \lambda_1|x-\xi|^2, \tag{2.11}$$

$$\left|a^{ij}(x,t) - a^{ij}(x_0,t_0)\right| \leqslant A' \left(|x-x_0|^\alpha + |t-t_0|^{\alpha/2}\right) \tag{2.12}$$

для всех (x,t) и $(x_0,t_0) \in \Omega$, где константы λ_0, λ_1 и A' зависят только от констант $\overline{\lambda}_0$, $\overline{\lambda}_1$ и A.

Дальнейшие наши рассмотрения связаны с рассмотрением следующего интегрального уравнения

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z(x,t;\xi,\tau) + \int_\tau^t \int_D Z(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma, \tag{2.13}$$

где искомая функция $\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)$ определяется условием, что $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ является фундаментальным решением оператора L в смысле определения 4, а заданная явно функция $Z(x,t;\xi,\tau)$ — это параметрикс. После доказательства ряда свойств интегрального оператора в правой части равенства (2.13) функция $\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)$ будет найдена методом последовательных приближений.

З а м е ч а н и е 9. В случае, когда $b_i(x,t) = 0$, $c(x,t) = 0$ и $(a_{ij}(x,t))$ — это постоянная матрица, $\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z(x,t;\xi,\tau)$ и, следовательно, $\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau) = 0$.

Отметим, что параметрикс $Z(x,t;\xi,\tau)$ имеет «главную» особенность при $|x-\xi| \to +0$ и при $\tau \to t$, а интегральное слагаемое в (2.13) «гладкое».

Предварительно докажем следующую важную теорему:

Т е о р е м а 7. *Пусть $f(x,t)$ — функция, непрерывная в области $\Omega = D \otimes (T_0,T_1)$. Тогда*

$$J(x,t,\tau) \overset{def:}{=} \int_D Z(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi \tag{2.14}$$

непрерывна по (x,t,τ) при $x \in \overline{D}$, $T_0 \leqslant \tau < t \leqslant T_1$, и при $\tau \to t$ справедливо предельное свойство

$$J(x,t,\tau) \to f(x,t) \tag{2.15}$$

равномерно по отношению к (x,t), когда $x \in S$ и $T_0 < t \leqslant T_1$, где S — любое замкнутое подмножество D.

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу явного вида параметрикса $Z(x, t; \xi, \tau)$ мы приходим к выводу о том, что функция $J(x, t, \tau)$ непрерывна по (x, t, τ) при $x \in \overline{D}$, $T_0 \leqslant \tau < t \leqslant T_1$.

Шаг 1. Рассмотрим сначала случай, когда функция f и матрица (a_{ij}) являются постоянными.

Рассмотрим линейное преобразование

$$y = P(x - \xi), \quad P^T P = (a^{ij}) \tag{2.16}$$

которое переводит квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^{ij}(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) \Rightarrow |y|^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2.$$

При преобразовании (2.16) область D переходит в область D^*. Отметим, кроме того, что якобиан этого линейного преобразования

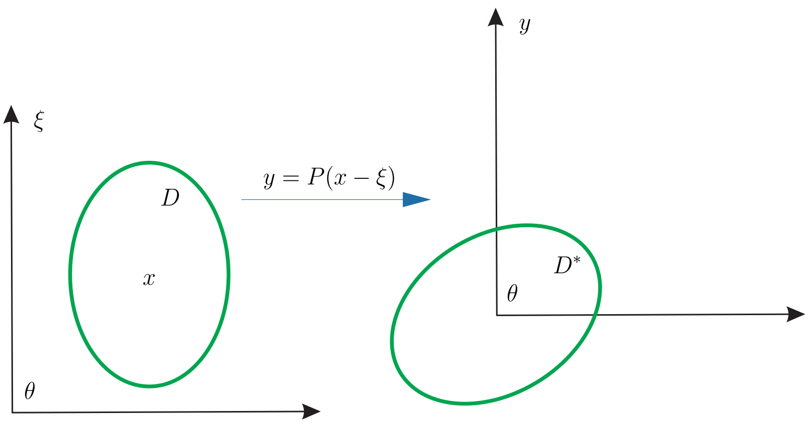


Рис. 44. Преобразование области D на область D^*.

равен

$$\left|\frac{D(y_1, ..., y_N)}{D(\xi_1, ..., \xi_N)}\right| = \det P = [\det(a^{ij})]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{D(\xi_1, ..., \xi_N)}{D(y_1, ..., y_N)}\right| = \frac{1}{[\det(a^{ij})]^{1/2}}. \tag{2.17}$$

В результате такого преобразования выражение для $J(x, t, \tau)$ примет следующий вид:

$$J(x, t, \tau) = \int\limits_{D^*} \frac{f}{(4\pi)^{N/2}} \frac{1}{(t - \tau)^{N/2}} \exp\left[-\frac{|y|^2}{4(t - \tau)}\right] dy. \tag{2.18}$$

Поскольку область D^* содержит начало координат, поэтому найдется такое $R > 0$, что шар $\{y \in \mathbb{R}^N : \ |y| < R\} \subset D^*$. Разобьем интеграл в равенстве (2.18) на две части

$$J(x,t,\tau) = \int\limits_{|y|\leqslant R} \frac{f}{(4\pi)^{N/2}} \frac{1}{(t-\tau)^{N/2}} \exp\left[-\frac{|y|^2}{4(t-\tau)}\right] dy +$$
$$+ \int\limits_{D^*\setminus\{|y|\leqslant R\}} \frac{f}{(4\pi)^{N/2}} \frac{1}{(t-\tau)^{N/2}} \exp\left[-\frac{|y|^2}{4(t-\tau)}\right] dy = J_R + J_R^0. \quad (2.19)$$

Нас интересует вопрос о пределе выражения для $J(x,t,\tau)$ при $\tau \to \to t$. Сначала рассмотрим предел J_R. Перейдем к сферической системе координат в этом интеграле, тогда получим следующее выражение:

$$J_R = \frac{f}{(4\pi)^{N/2}} \omega_N \frac{1}{(t-\tau)^{N/2}} \int\limits_0^R \exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right] r^{N-1}\, dr =$$
$$= f \frac{2^{N-1}\omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \int\limits_0^{R^2/(4(t-\tau))} \sigma^{(N/2)-1} e^{-\sigma}\, d\sigma =$$
$$= \frac{f}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int\limits_0^{R^2/(4(t-\tau))} \sigma^{(N/2)-1} e^{-\sigma}\, d\sigma, \quad (2.20)$$

где

$$\omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

Теперь осталось заметить, что

$$\int\limits_0^{R^2/(4(t-\tau))} \sigma^{(N/2)-1} e^{-\sigma}\, d\sigma \to \int\limits_0^{+\infty} \sigma^{(N/2)-1} e^{-\sigma}\, d\sigma = \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \quad \text{при} \quad \tau \to t.$$

Таким образом, приходим к выводу о том, что

$$\lim_{\tau \to t} J_R = f.$$

Поскольку область $D^*\setminus\{|y| \leqslant R\}$ не содержит замкнутый шар $\{|y| \leqslant R\}$, то интеграл J_R^0 сходится к нулю при $\tau \to t$.

Шаг 2. Теперь мы можем рассмотреть общий случай. С этой целью заметим, что параметрикс $Z(x,t;\xi,\tau)$ умноженный на функцию $f(\xi,\tau)$ можно представит в следующем эквивалентном виде:

$$Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau) = C(\xi,\tau)w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau) =$$
$$= f(x,\tau)C(x,t)w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)+$$
$$+ f(x,\tau)\left[C(\xi,\tau)w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - C(x,t)w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)\right] +$$
$$+ C(\xi,\tau)w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]. \quad (2.21)$$

При этом выражение для $J(x,t,\tau)$ можно представить в следующем виде:

$$J(x,t,\tau) = J_1(x,t,\tau) + J_2(x,t,\tau) + J_3(x,t,\tau), \quad (2.22)$$

где

$$J_1(x,t,\tau) = f(x,\tau)C(x,t)\int\limits_D w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)\,d\xi, \quad (2.23)$$

$$J_2(x,t,\tau) = f(x,\tau)\int\limits_D \left[C(\xi,\tau)w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - C(x,t)w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)\right]\,d\xi, \quad (2.24)$$

$$J_3(x,t,\tau) = \int\limits_D C(\xi,\tau)w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]\,d\xi. \quad (2.25)$$

Прежде всего рассмотрим явное выражение для $J_1(x,t,\tau)$. Действительно,

$$J_1(x,t,\tau) = f(x,\tau)\frac{1}{(4\pi)^{N/2}}\left[\det\left(a^{ij}(x,t)\right)\right]^{1/2} \times$$
$$\times \int\limits_D (t-\tau)^{-N/2}\exp\left[-\frac{1}{4(t-\tau)}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^{ij}(x,t)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)\right]\,d\xi. \quad (2.26)$$

Заметим, что матрица $(a^{ij}(x,t))$ не зависит от ξ и поэтому можно точно также как на первом шаге получить, что

$$J_1(x,t,\tau) \to f(x,t) \quad \text{при} \quad \tau \to t. \quad (2.27)$$

Теперь мы рассмотрим выражение для $J_2(x,t,\tau)$. Точно также разобьем интеграл в выражении для J_2 на две части

$$J_2 = J_{21} + J_{22}, \quad (2.28)$$

где

$$J_{21} = f(x,\tau)\int\limits_{|x-\xi|\leqslant R}\left[C(\xi,\tau)w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - C(x,t)w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)\right]\,d\xi, \quad (2.29)$$

$$J_{22} = f(x,\tau) \int\limits_{D\setminus\{|x-\xi|\leqslant R\}} \left[C(\xi,\tau) w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - C(x,t) w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)\right] d\xi \tag{2.30}$$

при достаточно малом $R>0$ таком, чтобы $\{|x-\xi|\leqslant R\}\subset D$. Сразу же отметим, что выражение J_{22} стремится к нулю при $\tau\to t$. Рассмотрим теперь выражение для J_{21}.

Прежде всего заметим, что в силу неравенства снизу (2.11) справедлива следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}
&\left|w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{(t-\tau)^{N/2}} \left|\exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{\vartheta^{x,t}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{1}{(t-\tau)^{N/2}} \exp\left[-\frac{1}{4(t-\tau)} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^{ij}(\xi^*,\tau^*)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)\right] \times \\
&\times \frac{1}{4(t-\tau)} \left|\vartheta^{\xi,\tau}(x,\xi) - \vartheta^{x,t}(x,\xi)\right| \leqslant \frac{1}{4(t-\tau)^{(N+2)/2}} \exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] \times \\
&\qquad\qquad \times \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|a^{ij}(\xi,\tau) - a^{ij}(x,t)\right| |x_i-\xi_i||x_j-\xi_j| \leqslant \\
&\qquad \leqslant N^2 \frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)^{(N+2)/2}} \max_{i,j} \left|a^{ij}(\xi,\tau) - a^{ij}(x,t)\right| \exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right].
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Подынтегральное выражение в J_2 можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
I \overset{def:}{=} &\left[C(\xi,\tau) - C(x,t)\right] w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) + \\
&+ C(x,t)\left[w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)\right].
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Отметим, что в силу свойства (2.12) для любого $\varepsilon>0$ существуют достаточно малые $R>0$ и $\delta>0$, такие, что при

$$|\xi - x| \leqslant R \quad \text{и} \quad t-\tau<\delta$$

функция I будет ограничена величиной

$$|I| \leqslant \varepsilon(t-\tau)^{-N/2}\left[1+\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right]\exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right].$$

Отметим, что мажоранта для $|I|$ интегрируема по замкнутому шару $|x-\xi|\leqslant R$. Далее переходя к сферической системе координат в интеграле для J_{21} мы получим, что имеет место следующая оценка:

$$|J_{21}| \leqslant c_1\varepsilon,$$

где c_1 не зависит от $\varepsilon > 0$. Тем самым, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы приходим к выводу, что

$$\lim_{\tau \to t} J_2 = 0. \tag{2.33}$$

Осталось рассмотреть выражение J_3. Опять разобьем область интегрирования D на две части $\{|x - \xi| \leqslant R\}$ и $D \setminus \{|x - \xi| \leqslant R\}$ при достаточно малом $R > 0$ таком, что $\{|x - \xi| \leqslant R\} \subset D$. Итак, получим

$$J_3 = J_{31} + J_{32}.$$

Ясно, что

$$\lim_{\tau \to t} J_{32} = 0.$$

С другой стороны, поскольку функция $f(x, y)$ является непрерывной, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие малые $R > 0$ и $\delta > 0$, что $t - \tau < \delta$ и при этом подынтегральное выражение в J_{31} ограничено величиной

$$\varepsilon \frac{1}{(t - \tau)^{N/2}} \exp\left[-\frac{\lambda_0 |x - \xi|^2}{4(t - \tau)}\right].$$

Поскольку эта мажоранта интегрируема по замкнутому шару $\{|x - - \xi| \leqslant R\}$, то получим неравенство

$$|J_{31}| \leqslant c_2 \varepsilon.$$

Итак,

$$\lim_{\tau \to t} J_3 = 0. \tag{2.34}$$

Теорема доказана.

§ 3. Тепловой объемный потенциал

По определению тепловым объемным потенциалом называется величина

$$W(x, t) \stackrel{def:}{=} \int_{T_0}^{t} \int_{D} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{3.1}$$

где $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ — это фундаментальное решение параболического оператора L вида (1.1) в области $\Omega = D \otimes (T_0, T_1)$ вида (2.13). В силу этого вида тепловой объемный потенциал представим в следующем виде:

$$W(x, t) = V(x, t) + U(x, t), \tag{3.2}$$

где

$$V(x, t) = \int_{T_0}^{t} \int_{D} Z(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{3.3}$$

$$U(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} Z(x,t;\xi,\tau)\widehat{f}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{3.4}$$

$$\widehat{f}(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} \Phi(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{3.5}$$

В этом параграфе мы изучим свойства теплового потенциала $V(x,t)$. Эти свойства нам потом потребуются при доказательстве существования фундаментального решения $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$.

Прежде всего заметим, что справедливы некоторые оценки на функции

$$w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau), \quad \frac{\partial w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i}.$$

Действительно, запишем $w^{y,\tau}$ в следующем виде:

$$w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau) = \\ = \frac{1}{(t-\tau)^{\mu}} \left(\vartheta^{y,\tau}\right)^{\mu - N/2} \left[\frac{\vartheta^{y,\tau}}{t-\tau}\right]^{N/2-\mu} \exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}}{4(t-\tau)}\right], \quad \mu \in (0,1), \tag{3.6}$$

поэтому при $N \geqslant 2$, малых $t-\tau$ и малых $|x-\xi|$ имеет место оценка сверху следующего вида:

$$|w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{const}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{N-2\mu}}, \quad \mu \in (0,1). \tag{3.7}$$

Рассмотрим теперь случай $N=1$. В этом случае мы имеем более сильную оценку вида

$$|w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Следовательно, неравенство (3.7) имеет место и в случае $N=1$ при условии, что $\mu \in [1/2, 1)$.

Теперь мы рассмотрим оценку для функции

$$\frac{\partial w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i} = \\ = -\frac{1}{4} \frac{1}{(t-\tau)^{N/2}} \frac{1}{t-\tau} \sum_{j=1}^{N} a^{ij}(y,\tau)(x_j - \xi_j) \exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]. \tag{3.8}$$

Из этого выражения мы получим следующую оценку:

$$\left|\frac{\partial w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{N}{4}\max_{i,j}|a^{ij}(y,\tau)|\frac{1}{(t-\tau)^{N/2+1/2}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\frac{[\vartheta^{y,\tau}(x,\xi)]^{1/2}}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right] \leqslant$$
$$\leqslant c_2(t-\tau)^{-\mu}\frac{1}{[\vartheta^{y,\tau}(x,\xi)]^{(N+1)/2-\mu}}\times$$
$$\times\frac{[\vartheta^{y,\tau}(x,\xi)]^{(N+2)/2-\mu}}{(t-\tau)^{(N+2)/2-\mu}}\exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{const}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{N+1-2\mu}}, \quad \mu \in (1/2,1). \tag{3.9}$$

Заметим, что эта оценка уже справедлива при $N \geqslant 1$.

Сформулируем без доказательства следующую вспомогательную лемму:

Лемма 3. *Пусть $f(x,y)$ — непрерывная функция от (x,y), когда x и y изменяются в компактной области $S \subset \mathbb{R}^N$ и $x \neq y$. Пусть, кроме того,*

$$\int\limits_{S(x,\varepsilon)} |f(x,y)|\,dy \to +0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to +0$$

равномерно по $x \in S$, где $S(x,\varepsilon)$ — пересечение S и шара с центром в x радиуса $\varepsilon > 0$. Тогда для любой ограниченной измеримой функции $g(y)$ в S несобственный интеграл

$$\varphi(x) = \int\limits_S f(x,y)g(y)\,dy$$

будет непрерывной функцией в S.

Прежде всего в силу этой леммы справедлив следующий результат:

Теорема 8. *Если $f(x,t)$ — ограниченная и измеримая в Ω функция, то объемный потенциал $V(x,t)$ представляет собой функцию, непрерывную в Ω.*

Сейчас наша задача доказать следующий важный результат:

Теорема 9. *Если функция $f(x,t)$ — непрерывная в Ω функция, то $V(x,t)$ имеет непрерывные первые производные по x при $x \in D$, $T_0 < t \leqslant T_1$ и справедливо равенство*

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} = \int\limits_{T_0}^{t}\int\limits_{D}\frac{\partial}{\partial x_i}Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{3.10}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что производная по x_i параметрикса $Z(x,t;\xi,\tau)$ имеет интегрируемую особенность в силу оценки (3.9) и поэтому мы можем воспользоваться леммой 3 и получить, что функция

$$\int\limits_{T_0}^{t}\int\limits_{D}\frac{\partial}{\partial x_i}Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

является непрерывной по $x\in D$ и $T_0<t\leqslant T_1$. Поэтому нам остается доказать равенство (3.10).

Шаг 2. Пусть

$$J(x,t,\tau)=\int\limits_{D}Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi,\quad V(x,t)=\int\limits_{T_0}^{t}J(x,t,\tau)\,d\tau. \tag{3.11}$$

В силу теоремы 7 функция $J(x,t,\tau)$ является непрерывной функцией по $(x,t,\tau)\in D\otimes(T_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T_1)$ при условии, что мы потребуем, чтобы

$$J(x,t,t)\stackrel{def:}{=}f(x,t)=\lim_{\tau\to t}J(x,t,\tau). \tag{3.12}$$

При $t>\tau$ имеем

$$\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}=\int\limits_{D}\frac{\partial}{\partial x_i}Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{3.13}$$

В силу оценки (3.9) мы отсюда получим следующую оценку:

$$\left|\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right|\leqslant\frac{const}{(t-\tau)^{\mu}},\quad \frac{1}{2}<\mu<1. \tag{3.14}$$

Шаг 3. Теперь мы определим следующую функцию

$$V_i(x,t)=\int\limits_{T_0}^{t}\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)\,d\tau. \tag{3.15}$$

В силу оценки (3.14) этот интеграл абсолютно и равномерно по $(x,t)\in\in\overline{\Omega}$ сходится.

Положим $x^h=(x_1,...,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},...,x_N)$ и рассмотрим выражение

$$I(x,t,h)\stackrel{def:}{=}\frac{V(x^h,t)-V(x,t)}{h}-V_i(x,t)=$$

$$=\int\limits_{T_0}^{t}\left[\frac{J(x^h,t,\tau)-J(x,t,\tau)}{h}-\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)\right]d\tau=$$

$$= \int\limits_{T_0}^{t} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} J(x^*, t, \tau) - \frac{\partial}{\partial x_i} J(x, t, \tau) \right] d\tau, \quad (3.16)$$

где $x^* \in [x^h, x]$ — отрезок соединяющий x^h с x.

Теперь для любого $\varepsilon > 0$ мы представим выражение для $I(x, t, h)$ в следующем виде:

$$I(x,t,h) = \int\limits_{T_0}^{t_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} J(x^*, t, \tau) - \frac{\partial}{\partial x_i} J(x, t, \tau) \right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial}{\partial x_i} J(x^*, t, \tau)\, d\tau - \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial}{\partial x_i} J(x, t, \tau)\, d\tau, \quad (3.17)$$

где $t - t_\varepsilon$ достаточно мало настолько, чтобы в силу оценки (3.14) имели место неравенства

$$\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} J(x^*, t, \tau) \right| d\tau < \varepsilon, \quad \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} J(x, t, \tau) \right| d\tau < \varepsilon. \quad (3.18)$$

С другой стороны, для заданного $\varepsilon > 0$ при $\tau \in [T_0, t_\varepsilon]$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_\varepsilon)$, что при $|h| < \delta$ имеет место оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} J(x^*, t, \tau) - \frac{\partial}{\partial x_i} J(x, t, \tau) \right| < \frac{\varepsilon}{T_1 - T_0}. \quad (3.19)$$

Из(3.17)–(3.19) получим оценку

$$|I| < 3\varepsilon \quad \text{при} \quad |h| < \delta.$$

Следовательно, имеет место поточечное равенство

$$V_i(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i}.$$

Теорема доказана.

Замечание 10. Заметим, что справедлива следующая оценка:

$$\left| \frac{\partial^2 w^{y,\tau}(x, t; \xi, \tau)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leqslant \frac{const}{(t-\tau)^\mu |x - \xi|^{N+2-2\mu}}, \quad (3.20)$$

которая получается точно также как и оценка (3.9).

Теперь наша задача доказать следующий важный результат:

Теорема 10. *Пусть $f(x,t)$ — функция, непрерывная в Ω, и локально непрерывная по Гельдеру с показателем β по $x \in D$ равномерно по отношению к $t \in [T_0, T_1]$. Тогда $V(x,t)$ имеет непрерывные вторые производные по $x \in D$, $T_0 < t \leqslant T_1$ и*

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int\limits_{T_0}^{t} d\tau \int\limits_{D} \frac{\partial^2 Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\, d\xi, \tag{3.21}$$

причем порядок интегрирования в выражении (3.21) существенен.

Доказательство.

Шаг 1. По теореме 9 справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} = \int\limits_{T_0}^{t} \frac{\partial}{\partial x_i} J(x,t,\tau)\, d\tau, \tag{3.22}$$

где

$$J(x,t,\tau) = \int\limits_{D} Z(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi.$$

Причем мы можем записать выражение для $\partial J/\partial x_i$ в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i} = f(y,\tau)C(y,\tau) \int\limits_{D} \frac{\partial}{\partial x_i} w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\, d\xi + \\ + f(y,\tau) \int\limits_{D} \left[C(\xi,\tau) \frac{\partial}{\partial x_i} w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - C(y,\tau) \frac{\partial}{\partial x_i} w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau) \right] d\xi + \\ + \int\limits_{D} \frac{\partial}{\partial x_i} Z(x,t;\xi,\tau)[f(\xi,\tau) - f(y,\tau)]\, d\xi,\end{gathered} \tag{3.23}$$

где $y \in D$ — фиксированная точка.

Шаг 2. Обозначим через $K = K(x,\varepsilon)$ — шар с центром в точке $x \in \in D$ радиуса $\varepsilon > 0$ настолько малого, чтобы $K \subset D$, а через $K^* = D \backslash K$. Пусть, кроме того, $y \in K$. Тогда к первому слагаемому в выражении (3.23) можно применить формулу Остроградского–Гаусса и получить следующее равенство:

$$\begin{gathered}f(y,\tau)C(y,\tau) \int\limits_{D} \frac{\partial}{\partial x_i} w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\, d\xi = \\ = f(y,\tau)C(y,\tau) \int\limits_{K} \frac{\partial}{\partial x_i} w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\, d\xi +\end{gathered}$$

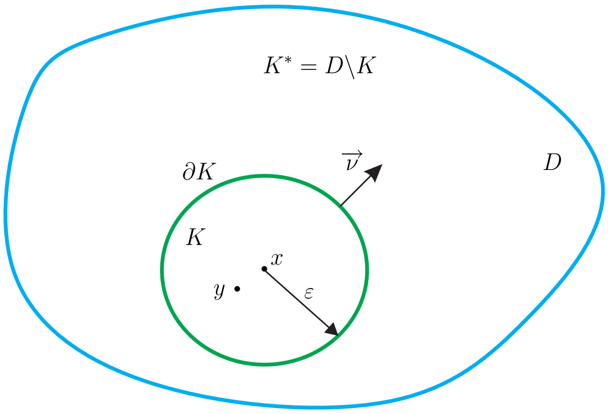


Рис. 45. Разбиение области $D = K \cup K^*$.

$$+ f(y,\tau)C(y,\tau) \int\limits_{K^*} \frac{\partial}{\partial x_i} w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\, d\xi =$$

$$= f(y,\tau)C(y,\tau) \int\limits_{\partial K} w^{y,\tau}(x,t;\eta,\tau) \cos(\nu,\eta_i)\, dS_\eta +$$

$$+ f(y,\tau)C(y,\tau) \int\limits_{K^*} \frac{\partial}{\partial x_i} w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\, d\xi, \quad (3.24)$$

где ν — внешняя нормаль к ∂K и dS_η — это элемент поверхности сферы ∂K.

Шаг 3. Теперь подставим в выражение (3.23) вместо первого слагаемого выражение (3.24) и продифференцируем обе части по x_j, после чего положим $y = x$. В результате получим следующее равенство:

$$\frac{\partial^2 J(x,t,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= f(x,\tau)C(x,\tau) \left[\int\limits_{\partial K} \frac{\partial}{\partial x_j} w^{y,\tau}(x,t;\eta,\tau) \cos(\nu,\eta_i) dS_\eta \right]_{y=x} +$$

$$+ f(x,\tau)C(x,\tau) \left[\int\limits_{K^*} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\, d\xi \right]_{y=x} +$$

$$+ f(x,\tau) \int\limits_D \left[C(\xi,\tau) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - \right.$$

$$\left. - C(x,\tau) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau) \right]_{y=x} d\xi +$$

$$+\int\limits_D \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} Z(x,t;\xi,\tau)\right][f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]\,d\xi =$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \quad (3.25)$$

Прежде всего, поскольку x — это центр шара K, то имеют место предельные равенства

$$\lim_{\tau\to t} I_1 = 0, \quad \lim_{\tau\to t} I_2 = 0. \quad (3.26)$$

Рассмотрим теперь четвертый интеграл I_4. С этой целью воспользуемся оценкой (3.20), а также условием теоремы о локальной по Гельдеру непрерывности по $x \in D$ равномерно по $t \in [T_0, T_1]$ с показателем β и получим следующую оценку:

$$|I_4| \leqslant \frac{const}{(t-\tau)^\mu}\int\limits_D \frac{|f(\xi,\tau)-f(x,\tau)|}{|x-\xi|^{N+2-2\mu}}\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \frac{const}{(t-\tau)^\mu}\int\limits_D \frac{1}{|x-\xi|^{N+2-2\mu-\beta}}\,d\xi \leqslant \frac{const}{(t-\tau)^\mu}, \quad (3.27)$$

если

$$2-2\mu-\beta<0 \quad \text{и} \quad 0<\mu<1 \Rightarrow 1-\frac{\beta}{2}<\mu<1.$$

Причем $const > 0$ не зависит от (x,t,τ).

Шаг 4. Рассмотрим выражение I_3. Прежде всего заметим, что справедлива следующая явная формула:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{4}(t-\tau)^{-2-N/2}\exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]\times$$
$$\times\left[-2(t-\tau)a^{ij}(y,\tau)+\sum_{h=1}^N a^{ih}(y,\tau)(x_h-\xi_h)\sum_{k=1}^N a^{jk}(y,\tau)(x_k-\xi_k)\right]. \quad (3.28)$$

Кроме того, справедлива следующая оценка:

$$\left|\exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{\vartheta^{x,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4(t-\tau)}\exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi^*,\tau}}{4(t-\tau)}\right]\left|\vartheta^{\xi,\tau}(x,\xi)-\vartheta^{x,\tau}(x,\xi)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{const}{t-\tau}\exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]|x-\xi|^{2+\alpha}. \quad (3.29)$$

Используя явное выражение (3.28) и оценку (3.29), мы получим следующую оценку:

$$H \stackrel{def}{=} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) - \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau) \right]_{y=x} \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 (t-\tau)^{-(N/2)-1} \exp\left[-\frac{\lambda_0 |x-\xi|^2}{4(t-\tau)} \right] \left[1 + \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} + \frac{|x-\xi|^4}{(t-\tau)^2} \right] |x-\xi|^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant c_2 (t-\tau)^{-(N/2)-1} \exp\left[-\frac{\lambda_0^* |x-\xi|^2}{4(t-\tau)} \right] |x-\xi|^\alpha \quad (3.30)$$

для любого $\lambda_0^* < \lambda_0$. Из оценки(3.30) стандартным образом получим следующую оценку:

$$H \leqslant \frac{const}{(t-\tau)^\mu |x-\xi|^{N+2-2\mu-\alpha}}, \quad 1 - \frac{\alpha}{2} < \mu < 1. \quad (3.31)$$

Заметим, что

$$|C(x,\tau) - C(\xi,\tau)| \leqslant const |x-\xi|^\alpha. \quad (3.32)$$

Следовательно, подынтегральное выражение в I_3 ограничено мажорантой (3.31) и тогда мы приходим к следующему неравенству:

$$|I_3| \leqslant \frac{const}{(t-\tau)^\mu}.$$

В итоге, из выражения (3.25) получим следующую оценку:

$$\left| \frac{\partial^2 J(x,t,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leqslant \frac{const}{(t-\tau)^\mu}, \quad 1 - \frac{\delta}{2} < \mu < 1, \quad \delta = \min\{\alpha, \beta\}. \quad (3.33)$$

Шаг 5. Теперь введем обозначение

$$V_{ij}(x,t) = \int_{T_0}^{t} \frac{\partial^2 J(x,t,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} \, d\tau. \quad (3.34)$$

Рассуждая точно также как на шаге 3 теоремы 9 мы можем доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right) = V_{ij}.$$

Непрерывность функции

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}$$

доказывается аналогичным образом как и в лемме 3.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 11. *Пусть функция $f(x,t)$ такая же, как в теореме 4. Тогда*

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

существует и непрерывна при $x \in D$, $T_0 < t \leqslant T_1$ и справедливо равенство

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = f(x,t) + \int\limits_{T_0}^{t} d\tau \int\limits_{D} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(\xi,\tau) \frac{\partial^2 Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{3.35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Прежде всего по определению параметрикса имеем при $t > \tau$ равенство

$$\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial t} = \int\limits_{D} \frac{\partial}{\partial t} Z(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{D} a_{ij}(\xi,\tau) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} Z(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{3.36}$$

Точно также как при доказательстве теоремы 10 мы получим оценку

$$\left| \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial t} \right| \leqslant \frac{const}{(t-\tau)^{\mu}} \quad \text{при} \quad 1 - \frac{\delta}{2} < \mu < 1, \quad \delta = \min\{\alpha, \beta\}. \tag{3.37}$$

Шаг 2. Докажем теперь, что функция

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$

существует и

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = J(x,t,t) + \int\limits_{T_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} J(x,t,\tau)\, d\tau. \tag{3.38}$$

Пусть $h > 0$ и рассмотрим разность

$$\frac{V(x,t+h) - V(x,t)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_{T_0}^{t+h} J(x,t+h,\tau)\, d\tau - \frac{1}{h} \int\limits_{T_0}^{t} J(x,t,\tau)\, d\tau = \\ = \frac{1}{h} \int\limits_{t}^{t+h} J(x,t+h,\tau)\, d\tau + \int\limits_{T_0}^{t} \frac{J(x,t+h,\tau) - J(x,t,\tau)}{h}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} J(x, t+h, \tau)\, d\tau + \int\limits_{T_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} J(x, t^*, \tau)\, d\tau, \qquad (3.39)$$

где $t < t^* < t + h$. Прежде всего заметим, что

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} J(x, t+h, \tau)\, d\tau = J(x, t, t) = f(x, t). \qquad (3.40)$$

Шаг 3. Рассуждая точно также как и при доказательстве теоремы 9, получим с учетом оценки (3.37), что

$$\lim_{h \to +0} \int\limits_t^{T_0} \frac{\partial}{\partial t} J(x, t^*, \tau)\, d\tau = \int\limits_t^{T_0} \frac{\partial}{\partial t} J(x, t, \tau)\, d\tau \qquad (3.41)$$

Осталось доказать непрерывность функции

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t},$$

что проводится точно также как и при доказательстве леммы 3.

Теорема доказана.

Наконец, в силу теорем 10 и 11 вытекает следующая теорема:

Теорема 12. *Пусть функция $f(x,t)$ такая же, как в теореме 10. Тогда $V(x,t)$ удовлетворяет при $x \in D$, $T_0 < t \leqslant T_1$ уравнению*

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} =$$
$$= -f(x,t) + \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_D \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [a_{ij}(x,t) - a_{ij}(\xi,\tau)] \frac{\partial^2 Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \qquad (3.42)$$

Замечание 11. Заметим, что подынтегральное выражение в правой части (3.42) абсолютно интегрируема по ξ и τ.

§ 4. Построение фундаментальных решений

Напомним, что фундаментальное решение $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ параболического оператора L вида

$$Lu \overset{def}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (4.1)$$

мы ищем в виде

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D} Z(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma. \qquad (4.2)$$

Поэтому, если функция $f(x,t) = \Phi(x,t;\xi,\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 12, то формально справедливы следующие выражения:

$$L_{x,t}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D} Z(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma = -\Phi(x,t;\xi,\tau) +$$
$$+\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D}\Biggl[\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\left[a_{ij}(x,t) - a_{ij}(\eta,\sigma)\right]\frac{\partial^2 Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial x_i} + c(x,t)Z(x,t;\eta,\sigma)\Biggr]\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma =$$
$$= -\Phi(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D} L_{x,t}Z(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma, \qquad (4.3)$$

где мы воспользовались тем, что параметрикс $Z(x,t;\eta,\sigma)$ при $t > \eta$ удовлетворяет равенству

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(\eta,\sigma)\frac{\partial^2 Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, мы из (4.1)–(4.3) в силу условия $L\Gamma = 0$ мы получим следующее выражение:

$$\Phi(x,t;\xi,\tau) =$$
$$= L_{x,t}Z(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D} L_{x,t}Z(x,t;y,\sigma)\Phi(y,\sigma;\xi,\tau)\,dy\,d\sigma. \qquad (4.4)$$

Прежде всего заметим, что, как мы уже показали,

$$L_{x,t}Z(x,t;y,\sigma) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N}\left[a_{ij}(x,t) - a_{ij}(y,\sigma)\right]\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}Z(x,t;y,\sigma) +$$
$$+\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}Z(x,t;y,\sigma) + c(x,t)Z(x,t;y,\sigma). \qquad (4.5)$$

Откуда сразу же получаем в силу оценок (3.7), (3.9) и (3.20), что имеет место оценка

$$|L_{x,t}Z(x,t;y,\sigma)| \leqslant \frac{const}{(t-\sigma)^{\mu}|x-y|^{N+2-2\mu-\alpha}}, \quad 1-\frac{\alpha}{2} < \mu < 1. \tag{4.6}$$

Следовательно, особенность ядра $L_{x,t}Z(x,t;y,\sigma)$ в интегральном уравнении Вольтерра (4.4) интегрируемая.

Теперь наша задача доказать, что уравнение (4.4) имеет решение (не обязательно единственное) вида

$$\Phi(x,t;\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} (LZ)_n\,(x,t;\xi,\tau), \tag{4.7}$$

где

$$(LZ)_1 = LZ, \tag{4.8}$$

$$(LZ)_{n+1}(x,t;\xi,\tau) = \int_{\tau}^{t} LZ(x,t;y,\sigma)(LZ)_n(y,\sigma;\xi,\tau)\,dy\,d\sigma. \tag{4.9}$$

Справедлива следующая вспомогательная лемма:
Лемма 4. *Если $G \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область и $0 < \alpha < N$, $0 < \beta < N$, то для любых $x, z \in G$ и $x \neq z$,*

$$\int_{G} \frac{dy}{|x-y|^{\alpha}|y-z|^{\beta}} \leqslant \frac{c_1}{|x-z|^{\alpha+\beta-N}}. \tag{4.10}$$

Используя эту лемму, получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned}|(LZ)_2(x,t;\xi,\tau)| &\leqslant \\ \leqslant c_1 \int_{\tau}^{t}\int_{D} &\frac{1}{(t-\sigma)^{\mu}(\sigma-\tau)^{\mu}}\frac{1}{|x-y|^{N+2-2\mu-\alpha}|y-\xi|^{N+2-2\mu-\alpha}}\,d\sigma\,dy \leqslant \\ &\leqslant \frac{c_2}{(t-\tau)^{2\mu-1}|x-\xi|^{N+2(2-2\mu-\alpha)}}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Поскольку $\mu < 1$ и $2 < 2\mu + \alpha$, то особенность в $(LZ)_2$ более слабая, чем в LZ.

Продолжая этот процесс мы на некотором шаге получим, что для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$ получим неравенство

$$|(LZ)_{n_0}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant const. \tag{4.12}$$

Справедливо следующее утверждение:

Утверждение 1. *Имеет место следующая оценка*:

$$|(LZ)_{m+n_0}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant K_0 \frac{[K(t-\tau)^{1-\mu}]^m}{\Gamma((1-\mu)m+1)}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{4.13}$$

где $K_0 > 0$ *и* $K > 0$ *— это некоторые постоянные, а* $\Gamma(t)$ *— гамма-функция.*

Доказательство.

Проведем доказательство методом математической индукции. Предположим, что неравенство (4.13) имеет место для некоторого целого $m \geqslant 0$. Тогда используя оценки (4.6) и (4.12) мы получим неравенство

$$|(LZ)_{m+1+n_0}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \leqslant const K_0 \frac{K^m}{\Gamma((1-\mu)m+1)} \int\limits_{\tau}^{t} (t-\sigma)^{-\mu}(\sigma-\tau)^{(1-\mu)m}\, d\sigma. \tag{4.14}$$

Теперь заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{\tau}^{t} (t-\sigma)^{-\mu}(\sigma-\tau)^{(1-\mu)m}\, d\sigma = \int\limits_{\tau}^{t} (t-\tau-(\sigma-\tau))^{-\mu}(\sigma-\tau)^{(1-\mu)m}\, d\sigma = \frac{1}{(t-\tau)^{\mu}} \int\limits_{\tau}^{t} \left(1 - \frac{\sigma-\tau}{t-\tau}\right)^{-\mu} (\sigma-\tau)^{(1-\mu)m}\, d\sigma = (t-\tau)^{(1-\mu)(m+1)} \int\limits_{0}^{1} (1-\rho)^{-\mu}\rho^{(1-\mu)m}\, d\rho, \tag{4.15}$$

где мы сделали замену переменной

$$\rho = \frac{\sigma-\tau}{t-\tau}.$$

Осталось воспользоваться известной формулой

$$\int\limits_{0}^{1} (1-\rho)^{a-1}\rho^{b-1}\, d\rho = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

в которой положим

$$a-1 = -\mu, \quad b-1 = (1-\mu)m$$

и получим

$$\int\limits_{\tau}^{t}(t-\sigma)^{-\mu}(\sigma-\tau)^{(1-\mu)m}\,d\sigma=\frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(1+(1-\mu)m)}{\Gamma(1+(1-\mu)(m+1))}(t-\tau)^{(1-\mu)(m+1)}.$$

Итак, из (4.14) мы получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}|(LZ)_{m+1+n_0}(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\\ \leqslant const K_0K^m\frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1+(1-\mu)(m+1))}(t-\tau)^{(1-\mu)(m+1)}\leqslant\\ \leqslant K_0\frac{[K(t-\tau)^{1-\mu}]^{m+1}}{\Gamma((1-\mu)(m+1)+1)}.\end{gathered}\tag{4.16}$$

Утверждение доказано.

В силу доказанного утверждения 1 вытекает, что ряд (4.7) сходится. И поэтому имеет место следующее представление:

$$\begin{gathered}\Phi(x,t;\xi,\tau)=\\ =LZ(x,t;\xi,\tau)+\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D}LZ(x,t;y,\sigma)\,(LZ)_n\,(y,\sigma;\xi,\tau)\,dy\,d\sigma.\end{gathered}\tag{4.17}$$

Отсюда справедлива оценка для Φ следующего вида:

$$|\Phi(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{const}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{N+2-2\mu-\alpha}},\quad 1-\frac{\alpha}{2}<\mu<1.\tag{4.18}$$

Используя тонкие оценки для правой части равенства (4.17), можно получить следующий результат, который мы приведем без доказательства:

Теорема 13. *Функция $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ — это непрерывная функция аргумента $(x,t;\xi,\tau)$. Кроме того, функция $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ непрерывна по Гельдеру по переменной $x\in D$. Точнее, для любого $\beta\in(0,\alpha)$ имеет место неравенство*

$$\begin{gathered}|\Phi(x,t;\xi,\tau)-\Phi(y,t;\xi,\tau)|\leqslant\\ \leqslant\frac{const}{(t-\tau)^{(N+2-\gamma)/2}}|x-y|^{\beta}\left\{\exp\left[-\frac{\lambda^*|x-\xi|^2}{t-\tau}\right]+\exp\left[-\frac{\lambda^*|y-\xi|^2}{t-\tau}\right]\right\}\end{gathered}\tag{4.19}$$

для любого $\lambda^*<\lambda_0/4$, где $\gamma=\alpha-\beta$.

Наконец, справедлива следующая основная теорема:

Теорема 14. *Функция* $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, *определенная формулой*

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D} Z(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma, \qquad (4.20)$$

является фундаментальным решением уравнения $Lu = 0$ *в* Ω.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем сначала, что $L\Gamma = 0$ при фиксированных ξ и τ. С этой целью запишем $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ в следующем виде:

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t_0}\int\limits_{D} Z(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma + \\ + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{D} Z(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma. \qquad (4.21)$$

В первом интеграле параметрикс $Z(x,t;\eta,\sigma)$ имеет непрерывные производные по x до второго порядка. С другой стороны для функции $\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)$ справедлива оценка (4.18)

$$|\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)| \leqslant \frac{const}{(\sigma-\tau)^{\mu}|\eta-\xi|^{N+2-2\mu-\alpha}}, \quad 1-\frac{\alpha}{2} < \mu < 1. \qquad (4.22)$$

Во втором интеграле функция $\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)$ при фиксированных (ξ,τ) равномерно непрерывна по Гельдеру с показателем $\beta < \alpha$ по η равномерно по σ и, следовательно, в силу теоремы 10 справедлив результат о внесении вторых производных под знак интеграла. Итак, имеем

$$\frac{\partial^2\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2 Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j} + \int\limits_{\tau}^{t_0}\int\limits_{D} \frac{\partial^2 Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial x_i\partial x_j}\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} d\sigma \int\limits_{D} \frac{\partial^2 Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial x_i\partial x_j}\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta. \qquad (4.23)$$

Теперь по тем же самым причинам первый интеграл в (4.21) является дифференцируемым по t и эту частную производную можно внести под знак интеграла, а в силу теоремы 11 можно получить формулу дифференцирования по t вида (3.35). Следовательно, имеет место следующая формула:

$$\frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial t} + \int\limits_{\tau}^{t_0}\int\limits_{D} \frac{\partial Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial t}\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma -$$

$$- \Phi(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{t_0}^{t} d\sigma \int\limits_{D} \frac{\partial Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial t} \Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\, d\eta. \quad (4.24)$$

Комбинируя (4.23) и (4.24), получим равенство

$$L\Gamma(x,t;\xi,\tau) =$$
$$= LZ(x,t;\xi,\tau) - \Phi(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D} LZ(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\, d\eta\, d\sigma, \quad (4.25)$$

которое в силу определения функции $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ эквивалентно равенству $L\Gamma = 0$.

Шаг 2. Можно доказать непрерывность по совокупности переменных $(x,t;\xi,\tau)$ следующих функций:

$$\frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial t},$$

когда $x, \xi \in D$ и $T_0 \leqslant \tau < t \leqslant T_1$. Нам осталось доказать, что имеет место следующее предельное свойство:

$$\lim_{t\to\tau} \int\limits_{D} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi)\, d\xi = f(x) \quad \text{для} \quad x \in D, \quad (4.26)$$

для любой функции $f(x) \in \mathbb{C}(\overline{D})$. Ранее нами было доказано следующее предельное свойство:

$$\lim_{t\to\tau} \int\limits_{D} Z(x,t;\xi,\tau) f(\xi)\, d\xi = f(x) \quad \text{для} \quad x \in D.$$

Поэтому нам необходимо рассмотреть следующее выражение:

$$I = \int\limits_{D}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D} Z(x,t;\zeta,\sigma)\Phi(\zeta,\sigma;\xi,\tau)\, d\zeta\, d\sigma\, d\xi. \quad (4.27)$$

Сначала нам нужно получить улучшенную оценку для $Z(x,t;\xi,\tau)$ вида

$$|Z(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{const}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{N-2\mu}} \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]. \quad (4.28)$$

Заметим, что имеет место равенство

$$w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau) =$$
$$= \frac{1}{(t-\tau)^{\mu}} \left(\vartheta^{y,\tau}\right)^{\mu-N/2} \left[\frac{\vartheta^{y,\tau}}{t-\tau}\right]^{N/2-\mu} \exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}}{4(t-\tau)}\right], \quad \mu \in (0, N/2], \tag{4.29}$$

Заметим, имеет место равенство

$$\exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}}{4(t-\tau)}\right] = \exp\left[-(1-\varepsilon)\frac{\vartheta^{y,\tau}}{4(t-\tau)}\right] \exp\left[-\varepsilon\frac{\vartheta^{y,\tau}}{4(t-\tau)}\right]. \tag{4.30}$$

Из (4.29) и (4.30) мы и получим оценку (4.28) при $\mu \in (0, N/2]$. Кроме того, можно получить оценку вида

$$|\Phi(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{const}{(t-\tau)^{(N+2-\alpha)/2}} \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]. \tag{4.31}$$

Теперь нам нужно воспользоваться следующей вспомогательной леммой:
Лемма 5. *Если $-\infty < \alpha < (N/2)+1$, $-\infty < \beta < (N/2)+1$, то имеет место следующее равенство*:

$$\int\limits_{\sigma}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(t-\tau)^{\alpha}} \exp\left[-\frac{h|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{1}{(\tau-\sigma)^{\beta}} \exp\left[-\frac{h|\xi-y|^2}{4(\tau-\sigma)}\right] d\xi\, d\tau =$$
$$= const\frac{1}{(t-\sigma)^{(N/2)+1-\alpha-\beta}} \exp\left[-\frac{h|x-y|^2}{4(t-\sigma)}\right]. \tag{4.32}$$

В результате применения неравенства (4.28) при $\mu = N/2$, неравенства (4.31) и леммы 5 мы получим неравенство

$$|I| \leqslant const \int\limits_{D} \frac{1}{(t-\tau)^{(N-\alpha)/2}} \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi.$$

После замены переменных

$$\rho = \frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/2}}$$

мы получим оценку

$$|I| \leqslant const(t-\tau)^{\alpha/2} \to +0 \quad \text{при} \quad t \to \tau.$$

Теорема доказана.

§ 5. Свойства теплового объемного потенциала

Теперь мы в состоянии изучить свойства теплового объемного потенциала

$$W(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t}\int\limits_{D} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{5.1}$$

введенного в параграфе 3. Справедлива следующая теорема:
Теорема 15. *Если $f(x,t)$ — непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция, то $W(x,t)$ будет непрерывной функцией в Ω, а $\partial W/\partial x_i$ — непрерывной при $x \in \in D$ и $T_0 < t \leqslant T_1$ функцией. Если, кроме того, $f(x,t)$ — функция, локально непрерывная по Гельдеру по переменным $x \in D$, равномерно по t, то*

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial W}{\partial t}$$

будут непрерывными функциями при $x \in D$, $T_0 < t \leqslant T_1$ и

$$LW(x,t) = -f(x,t). \tag{5.2}$$

Доказательство.
Шаг 1. Потенциал $W(x,t)$ можно представить в следующем виде:

$$W(x,t) = V(x,t) + U(x,t), \tag{5.3}$$

$$V(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t}\int\limits_{D} Z(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{5.4}$$

$$U(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t}\int\limits_{D} Z(x,t;\xi,\tau) \widehat{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{5.5}$$

$$\widehat{f}(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t}\int\limits_{D} \Phi(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{5.6}$$

Полагая $\Phi(x,t;\xi,\tau) = 0$ при $t < \tau$ и используя оценку (4.18), мы получим, что функция $\widehat{f}(x,t)$ непрерывная по совокупности переменных. Кроме того, в силу оценки (4.19) функция $\widehat{f}(x,t)$ является локально непрерывной по Гельдеру по x с показателем $\beta < \alpha$ равномерно по $t \in [T_0, T_1]$. Действительно, в силу указанной оценки для $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ справедливо следующее неравенство:

$$\left|\widehat{f}(x,t) - \widehat{f}(y,t)\right| \leqslant const|x-y|^{\beta}\left(A(x,t) + A(y,t)\right), \tag{5.7}$$

где

$$A(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} \frac{1}{(t-\tau)^{(N+2-\gamma)/2}} \exp\left[-\frac{\lambda^*|x-\xi|^2}{t-\tau}\right] d\xi\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(t-\tau)^{(N+2-\gamma)/2}} \exp\left[-\frac{\lambda^*|x-\xi|^2}{t-\tau}\right] d\xi\, d\tau =$$
$$= const \int\limits_{T_0}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^{(2-\gamma)/2}}\, d\tau < +\infty.$$

Шаг 2. Используя полученные на шаге 1 свойства функции $\widehat{f}(x,t)$, докажем равенство (5.2). Поскольку обе функции $f(x,t)$ и $\widehat{f}(x,t)$ являются локально по Гельдеру непрерывными по x равномерно по t, то мы можем воспользоваться ранее полученными свойствами потенциала $V(x,t)$ и, стало быть, свойствами потенциала $U(x,t)$ и получить цепочку следующих равенств:

$$LW(x,t) = -f(x,t) - \widehat{f}(x,t) + \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} LZ(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau +$$
$$+ \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} LZ(x,t;\xi,\tau)\widehat{f}(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = -f(x,t) +$$
$$+ \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} f(\xi,\tau) \Bigg\{ -\Phi(x,t;\xi,\tau) + LZ(x,t;\xi,\tau) +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{D} LZ(x,t;\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\, d\eta\, d\sigma \Bigg\}\, d\xi\, d\tau = -f(x,t).$$

Теорема доказана.

§ 6. Фундаментальные решения в $\mathbb{R}^N$

Все доказанные ранее теоремы остаются в силе, если потребовать дополнительное условие

$$|f(x,t)| \leqslant const \exp\left[h|x|^2\right], \quad h > 0. \qquad (6.1)$$

Так, в частности, рассмотрим следующий интеграл:

$$I(x,t,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi)\, d\xi,$$

который сверху может быть оценен как

$$|I| \leqslant \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] \exp\left[h|\xi|^2\right] d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left[\frac{1+c(\varepsilon)}{1+\varepsilon}\frac{\lambda_0}{4(t-\tau)}|x|^2\right] \times$$
$$\times \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left[-\frac{\lambda_0|\xi|^2}{4(t-\tau)(1+\varepsilon)}\right] \exp\left[h|\xi|^2\right] d\xi.$$

Последний интеграл сходится тогда, когда

$$\frac{\lambda_0}{4(t-\tau)} > h(1+\varepsilon) \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0,$$

которое в силу произвольности $\varepsilon > 0$ равносильно неравенству

$$\frac{\lambda_0}{4(t-\tau)} > h,$$

где мы воспользовались неравенством

$$\frac{1}{1+\varepsilon}|\xi|^2 \leqslant |x-\xi|^2 + \frac{1+c(\varepsilon)}{1+\varepsilon}|x|^2,$$

которое является следствием следующей цепочки неравенств:

$$|\xi| \leqslant |x-\xi| + |x| \Rightarrow |\xi|^2 \leqslant |x-\xi|^2 + |x|^2 + 2|x-\xi||x| \leqslant$$
$$\leqslant |x-\xi|^2 + |x|^2 + \varepsilon|x-\xi|^2 + c(\varepsilon)|x|^2.$$

Если $T_0 \leqslant \tau < t \leqslant T_1$, то последний интеграл сходится, если

$$h < \frac{\lambda_0}{4(T_1 - T_0)}, \quad \text{так как} \quad t-\tau \leqslant T_1 - T_0.$$

При выполнении условия (6.1) остается без изменений справедливой теорема 15.

Рассмотрим теперь еще один тепловой потенциал

$$W_0(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,T_0)\varphi(\xi)\, d\xi, \tag{6.2}$$

где функция $\varphi(x)$ — непрерывна в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x)| \leqslant M \exp\left[h|x|^2\right], \quad h < \frac{\lambda_0}{4(T_1 - T_0)}. \tag{6.3}$$

Ясно, что тепловой потенциал $W_0(x,t)$ может быть представлен в следующем виде:

$$W_0(x,t) = V_0(x,t) + U_0(x,t), \tag{6.4}$$

где

$$V_0(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(x,t;\xi,T_0)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{6.5}$$

$$U_0(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(x,t;\xi,T_0)\widehat{\varphi}(y,\sigma)\,dy\,d\sigma, \tag{6.6}$$

$$\widehat{\varphi}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Phi(x,t;\xi,T_0)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{6.7}$$

Отметим, что в силу неравенства (4.19) функция $\widehat{\varphi}(x,t)$ будет равномерно по $t \in [T_0+\varepsilon, T_1]$ при малом $\varepsilon > 0$ и локально по Гельдеру по $x \in D$ непрерывна с показателем $\beta < \alpha$. Отсюда будет следовать следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
LW_0(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} LZ(x,t;\xi,T_0)\varphi(\xi)\,d\xi + \\
+ \int\limits_{T_0}^{t} d\sigma \int\limits_{\mathbb{R}^N} LZ(x,t;y,\sigma)\widehat{\varphi}(y,\sigma)\,dy - \widehat{\varphi}(x,t) = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Bigg\{ LZ(x,t;\xi,T_0) + \\
+ \int\limits_{T_0}^{t} d\sigma \int\limits_{\mathbb{R}^N} LZ(x,t;y,\sigma)\Phi(y,\sigma;\xi,T_0)\,dy - \Phi(x,t;\xi,T_0) \Bigg\} \varphi(\xi)\,d\xi = 0
\end{aligned}$$

Теперь наша задача доказать, что имеет место равенство

$$W_0(x,t) \to \varphi(x) \quad \text{при} \quad t \to T_0. \tag{6.8}$$

Ясно, что $U_0(x,t) \to 0$ при $t \to T_0$. Поэтому нам нужно доказать, что

$$V_0(x,t) \to \varphi(x) \quad \text{при} \quad t \to T_0. \tag{6.9}$$

С этой целью, представим при фиксированном $x \in \mathbb{R}^N$ на две части

$$\{|x-\xi| < 1\} \cup \{|x-\xi| \geqslant 1\} = \mathbb{R}^N_\xi.$$

При этом получим

$$V_0(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} Z(x,t;\xi,T_0)\varphi(\xi)\,d\xi = \\ = \int\limits_{|x-\xi|<1} Z(x,t;\xi,T_0)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_{|x-\xi|\geqslant 1} Z(x,t;\xi,T_0)\varphi(\xi)\,d\xi = \\ = I_1 + I_2. \quad (6.10)$$

Отметим, что в силу теоремы 7 имеем

$$I_1 \to \varphi(x) \quad \text{при} \quad t \to T_0.$$

С другой стороны, для I_2 справедлива следующая оценка:

$$|I_2| \leqslant const \int\limits_{|x-\xi|\geqslant 1} \frac{1}{(t-T_0)^{N/2}} \exp\left[h|\xi|^2\right] \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-T_0)}\right] d\xi \leqslant \\ \leqslant const \exp\left[-\frac{\lambda_0^*}{8(t-T_0)}\right] \times \\ \times \int\limits_{|x-\xi|\geqslant 1} \frac{1}{(t-T_0)^{N/2}} \exp\left[h|\xi|^2\right] \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{8(t-T_0)}\right] d\xi \to +0 \quad (6.11)$$

при $t \to T_0$ и $t - T_0 < \lambda_0^*/8h$. Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 16. *Если выполнены условия* A_1, A_2 *при* $D = \mathbb{R}^N$, *функция* $\varphi(x)$ *— непрерывная в* $\mathbb{R}^N$, *удовлетворяющая условию роста* (6.3), *то тепловой потенциал* $W_0(x,t)$, *определенный равенством* (6.2), *существует при* $T_0 < t \leqslant T_1$ *и удовлетворяют соотношениям*

$$LW_0(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad T_0 < t \leqslant T_1, \quad (6.12)$$

$$W_0(x,t) \to \varphi(x) \quad \text{при} \quad t \to T_0. \quad (6.13)$$

§ 7. Задача Коши

Теперь мы можем рассмотреть задачу Коши для равномерно параболического уравнения

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad (x,t) \in \Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \quad (7.1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N. \tag{7.2}$$

Предположим, что функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют следующему условию роста:

$$|f(x,t)| \leqslant M\exp\left[h|x|^2\right], \quad |\varphi(x)| \leqslant M\exp\left[h|x|^2\right] \tag{7.3}$$

при некоторых $h>0$ и $M>0$, причем для h выполнено неравенство

$$h<\frac{\lambda_0}{4T}. \tag{7.4}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 17. *Предположим, что L удовлетворяет условиям* (A_1) *и* (A_2) *при $D=\mathbb{R}^N$, $T_0=0$ и $T_1=T$. Пусть функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ непрерывны соответственно в Ω и в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяют условиям роста* (7.3). *Пусть, кроме того, $f(x,t)$ локально непрерывна по Гельдеру с показателем α относительно $x\in\mathbb{R}^N$ равномерно по t. Тогда функция*

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Gamma(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi-\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \tag{7.5}$$

будет решением задачи Коши (7.1)–(7.2) *и*

$$|u(x,t)| \leqslant M_1\exp\left[h_1|x|^2\right] \quad \textit{для всех} \quad (x,t\in\Omega), \tag{7.6}$$

где постоянная $h_1>0$ зависят только от h, λ_0 и T.

Доказательство.

Осталось только доказать оценку (7.6). С этой целью заметим, что для любых $h>0$ и $\varepsilon>0$ существует постоянная $C=C(h,\varepsilon)$ такая, что неравенство

$$h|x-\xi|^2 \leqslant C|x|^2+(h+\varepsilon)|\xi|^2 \tag{7.7}$$

будет выполняться для всех $x\in\mathbb{R}^N$ и $\xi\in\mathbb{R}^N$.

$\square$ Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$h|x-\xi|^2 \leqslant h|x|^2+h|\xi|^2+2h|x||\xi| \leqslant h|x|^2+h|\xi|^2+\varepsilon|\xi|^2+\frac{h^2}{\varepsilon}|x|^2 = \\ = C(h,\varepsilon)|x|^2+(h+\varepsilon)|\xi|^2, \quad C(h,\varepsilon)=h+\frac{h^2}{\varepsilon},$$

где мы воспользовались очевидным неравенством

$$ab \leqslant \varepsilon a^2+\frac{b^2}{4\varepsilon} \quad \text{для всех} \quad \varepsilon>0$$

при $a, b \geqslant 0$. $\boxtimes$

Сначала напомним следующую оценку:

$$|\Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant const(t-\tau)^{-N/2} \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right], \qquad (7.8)$$

из которой в предположении (7.4) получим следующее неравенство:

$$|\Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant$$
$$\leqslant const(t-\tau)^{-N/2} \exp\left[-\frac{\varepsilon|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] \exp\left[-(h+\varepsilon)|x-\xi|^2\right], \quad (7.9)$$

для некоторого малого $\varepsilon > 0$. С помощью этого неравенства оценим второе слагаемое в правой части равенства (7.5) и с учетом неравенства (7.7) получим следующую оценку:

$$\left|\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant M \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{c_1}{(t-\tau)^{N/2}} \exp\left[-\frac{\varepsilon|\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] \times$$
$$\times \exp\left[-(h+\varepsilon)|\xi|^2\right] \exp\left[h|x-\xi|^2\right]\, d\xi\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant M \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \left\{\exp\left[-(h+\varepsilon)|\xi|^2\right] \exp\left[h|x-\xi|^2\right]\right\} \times$$
$$\times \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{c_1}{(t-\tau)^{N/2}} \exp\left[-\frac{\varepsilon|\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau \leqslant M_1 \exp\left[C|x|^2\right] \quad (7.10)$$

Первый интеграл оценивается аналогичным образом.

Теорема доказана.

Замечание 12. Отметим, что предположение $h < \lambda_0/4T$ нельзя ослабить. Действительно, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_{xx} - u_t = 0, \quad u(x,0) = \exp\left[hx^2\right], \quad h > 0. \qquad (7.11)$$

Отметим, что единственным решением этой задачи Коши является следующая функция:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-4ht}} \exp\left[\frac{hx^2}{1-4ht}\right]. \qquad (7.12)$$

Отметим, что эту функцию нельзя продолжить за момент времени $t_0 > 1/(4h)$.

6*

§ 8. Сопряженное уравнение

Уравнение

$$L^* v \overset{def}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^*(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_i} + c^*(x,t) v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{8.1}$$

где

$$b_i^* = -b_i + 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}, \quad c^* = c - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$$

называется сопряженным с уравнением $Lu = 0$. Можно написать также сопряженное уравнение в следующем виде:

$$L^* v = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij} v) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{8.2}$$

Если функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ достаточно гладкие в области Ω, тогда в этой области справедливо равенство

$$vLu - uL^*v = \\ = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{N} \left(v a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} - uv \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) + b_i uv \right] - \frac{\partial}{\partial t}(uv), \tag{8.3}$$

называемое тождеством Грина. Дадим определение фундаментального решения уравнения $L^* v = 0$.

Определение 6. *Фундаментальным решением уравнения* $L^* v = 0$ *называют функцию* $\Gamma^*(x,t;\xi,\tau)$, *определенную для всех* $(x,t) \in \Omega$, $(\xi,\tau) \in \Omega$, $t < \tau$, *удовлетворяющую следующим условиям*:

(i) *при фиксированных* (ξ,τ) *выполнено уравнение* $L^*\Gamma^*(x,t;\xi,\tau) = 0$ *при* $x \in D$ *и* $T_0 < t < \tau$,

(ii) *для каждой функции* $f(x)$ *непрерывной в* $\overline{D}$, *удовлетворяющая условию роста* $|f(x)| \leqslant const \exp[h|x|^2]$ *в случае неограниченной области* D, *выполнено предельное равенство*

$$\lim_{t \to \tau} \int_D \Gamma^*(x,t;\xi,\tau) f(\xi)\, d\xi = f(x). \tag{8.4}$$

Строится фундаментальное решение исходя из параметрикса

$$Z^*(x,t;\xi,\tau) = C(\xi,\tau)(\tau - t)^{-N/2} \exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(\tau - t)} \right] \quad \text{при} \quad t < \tau. \tag{8.5}$$

Параметрикс Z^* удовлетворяет соответствующему уравнению $L_0^* v = 0$, а фундаментальное решение ищется в виде

$$\Gamma^*(x,t;\xi,\tau) \;=\; Z^*(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_t^\tau \int\limits_D Z^*(x,t;\eta,\sigma)\Phi^*(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma, \quad (8.6)$$

где Φ^* — это решение интегрального уравнения

$$\Phi^*(x,t;\xi,\tau) \;=\; L^*Z^*(x,t;\xi,\tau) \;+\; \int\limits_t^\tau \int\limits_D L^*Z^*(x,t;\eta,\sigma)\Phi^*(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta\,d\sigma. \quad (8.7)$$

Справедлива следующая важная теорема, которую мы приведем без доказательства:
Теорема 18. *Если выполнены условия* (A_1) *и* (A_2), *то фундаментальное решение* $\Gamma^*(x,t;\xi,\tau)$ *уравнения* $L^*v = 0$ *существует и*

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = \Gamma^*(\xi,\tau;x,t). \quad (8.8)$$

§ 9. Единственность задачи Коши и контрпример

Справедлива следующая важная теорема:
Теорема 19. *Пусть оператор* L *удовлетворяет условиям* (A_1) *и* (A_2) *в области* $\Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$. *Тогда существует не более одного решения задачи Коши* (7.1), (7.2), *удовлетворяющего условию*

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)| \exp\left[-k|x|^2\right]\,dx\,dt < +\infty \quad (9.1)$$

при некотором положительном $k > 0$

Доказательство. Нам нужно доказать, что если $Lu(x,t) = 0$ и $u(x,0) = 0$, то $u(x,t) = 0$ в Ω. Сначала мы докажем, что $u(x,t) = 0$, если $0 \leqslant t < \delta$ для достаточно малого $\delta > 0$.

Пусть $(\overline{x}, \overline{t})$ — это произвольная фиксированная точка с $0 < \overline{t} < \delta$. Нам нужно доказать, что $u(\overline{x}, \overline{t}) = 0$.

Шаг 1. Обозначим через B_R шар в $\mathbb{R}^N$ с центром в точке $\overline{x}$ и радиуса R. Пусть B_R' — это дополнение B_R до B_{R+1}. Отметим, что существует функция $h(\xi)$, определенная на всем $\mathbb{R}^N$, дважды непрерывно дифференцируемая и обладающая следующими свойствами:

$$h(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \xi \in B_R, \\ 0, & \text{если} \quad \xi \notin B_{R+1}, \end{cases} \quad (9.2)$$

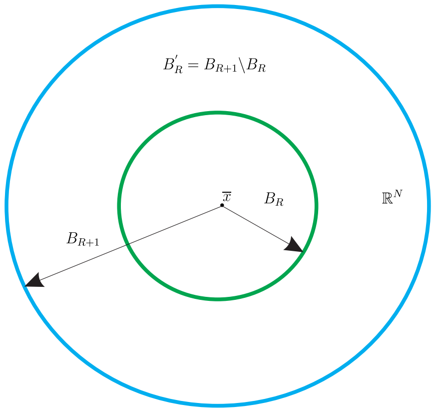


Рис. 46. Множество B'_R.

$$0 \leqslant h(\xi) \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi_i} \right| + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left| \frac{\partial^2 h(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right| \leqslant H,$$

где постоянная H не зависит от R.

Шаг 2. Теперь мы воспользуемся тождеством Грина (8.3)

$$u = u(\xi, \tau), \quad v(\xi, \tau) = h(\xi)\Gamma(\overline{x}, \overline{t}; \xi, \tau) \tag{9.3}$$

и проинтегрируем по области $\xi \in B_{R+1}$, $0 < \tau < \overline{t} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ при этом нужно учесть, что

$$L_{\xi,\tau} u(\xi, \tau) = 0, \quad u(\xi, 0) = 0, \quad h(\xi)\Big|_{\partial B_{R+1}} = \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi_i}\Big|_{\partial B_{R+1}} = 0,$$

поэтому тождество Грина (8.3)

$$vLu - uL^*v =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^{N} \left(v a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} - uv \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) + b_i uv \right] - \frac{\partial}{\partial t}(uv),$$

после интегрирования по указанной области примет следующий вид:

$$-\int_0^{\overline{t}-\varepsilon} \int_{B_{R+1}} u(\xi, \tau) L^*_{\xi,\tau} v(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = -\int_{B_{R+1}} h(\xi)\Gamma(\overline{x}, \overline{t}; \xi, \tau) u(\xi, \tau)\, d\xi \Big|_{\tau = \overline{t} - \varepsilon}. \tag{9.4}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, мы получим согласно определению фундаментального решения следующее равенство:

$$h(\overline{x})u(\overline{x},\overline{t}) = u(\overline{x},\overline{t}) = \int\limits_0^{\overline{t}} \int\limits_{B_{R+1}} u(\xi,\tau) L^*_{\xi,\tau} v(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{9.5}$$

Шаг 3. Теперь заметим, что при $\xi \in B_R$ справедливо равенство

$$v = \Gamma(\overline{x},\overline{t};\xi,\tau), \quad L^*_{\xi,\tau}\Gamma(\overline{x},\overline{t};\xi,\tau) = 0 \Rightarrow L^*_{\xi,\tau} v(\xi,\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in B_R.$$

Следовательно, из (9.5) мы получим следующее равенство:

$$u(\overline{x},\overline{t}) = \int\limits_0^{\overline{t}} \int\limits_{B'_R} u(\xi,\tau) L^*_{\xi,\tau} v(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{9.6}$$

Осталось заметить, что имеет место следующее равенство:

$$L^*(h\Gamma) = hL^*\Gamma + 2\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_j} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\Gamma + \sum_{i=1}^{N} b_i(\xi,\tau)\frac{\partial h}{\partial \xi_i}\Gamma, \tag{9.7}$$

а поскольку $L^*\Gamma = 0$, то мы приходим к следующему равенству:

$$u(\overline{x},\overline{t}) = \int\limits_0^{\overline{t}} \int\limits_{B'_R} u(\xi,\tau)\left[2\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_j} + \right. \\ \left. + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial^2 h}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\Gamma + \sum_{i=1}^{N} b_i(\xi,\tau)\frac{\partial h}{\partial \xi_i}\Gamma\right] d\xi\, d\tau. \tag{9.8}$$

Шаг 4. Заметим, что имеет место следующая оценка:

$$\left|\Gamma(\overline{x},\overline{t};\xi,\tau)\right| + \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial}{\partial \xi_i}\Gamma(\overline{x},\overline{t};\xi,\tau)\right| \leqslant \\ \leqslant const(\overline{t}-\tau)^{-(N+1)/2}\exp\left[-\frac{\lambda_0^*|\overline{x}-\xi|^2}{4(\overline{t}-\tau)}\right]. \tag{9.9}$$

Комбинируя оценку (9.9) с равенством (9.8) и вспоминая, что $0 < \overline{t} < \delta$ мы получим следующую оценку:

$$|u(\overline{x}, \overline{t})| \leqslant M(\delta, \varepsilon) \exp\left[-\frac{\lambda_0^* R^2}{4\delta}\right] \int\limits_0^{\overline{t}} \int\limits_{B'_R} |u(\xi, \tau)| \, d\xi \, d\tau. \tag{9.10}$$

Теперь заметим, что имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|\xi| \leqslant |\overline{x} - \xi| + |\overline{x}| \Rightarrow -2|\overline{x} - \xi|^2 \leqslant 2|\overline{x}|^2 - |\xi|^2,$$

поэтому из условия (9.1) мы получим

$$\int\limits_0^{\overline{t}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(\xi, \tau)| \exp\left[-2k|\overline{x} - \xi|^2\right] \, d\xi \, d\tau < +\infty. \tag{9.11}$$

Следовательно, в силу теоремы Лебега получим, что

$$\int\limits_0^{\overline{t}} \int\limits_{B'_R} |u(\xi, \tau)| \exp\left[-2k|\overline{x} - \xi|^2\right] \, d\xi \, d\tau \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty. \tag{9.12}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_0^{\overline{t}} \int\limits_{B'_R} |u(\xi, \tau)| \exp\left[-2k|\overline{x} - \xi|^2\right] \exp\left[2k|\overline{x} - \xi|^2\right] \, d\xi \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[2k(R+1)^2\right] \int\limits_0^{\overline{t}} \int\limits_{B'_R} |u(\xi, \tau)| \exp\left[-2k|\overline{x} - \xi|^2\right] \, d\xi \, d\tau.$$

Из этой оценки и из неравенства (9.10) мы получим следующую оценку:

$$|u(\overline{x}, \overline{t})| \leqslant$$

$$\leqslant M(\delta, \varepsilon) \exp\left[-\frac{\lambda_0^* R^2}{4\delta} + 2k(R+1)^2\right] \int\limits_0^{\overline{t}} \int\limits_{B'_R} |u(\xi, \tau)| \exp\left[-2k|\overline{x} - \xi|^2\right] \, d\xi \, d\tau. \tag{9.13}$$

Отсюда при условии, что

$$\delta < \frac{\lambda_0^*}{8k}$$

правая часть неравенства (9.13) стремиться к нулю при $R \to +\infty$.

Шаг 5. Итак, $u(\overline{x}, \overline{t}) = 0$, если $\overline{x} \in \mathbb{R}^N$, $0 < \overline{t} < \delta$ и $\delta = \lambda_0^*/8k$. Продолжая процесс в полосах $\delta \leqslant t < 2\delta$, $2\delta \leqslant t < 3\delta$ и т. д. В результате мы получим, что

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0, T].$$

Теорема доказана.

Контрпример Тихонова. А. Н. Тихонов предложил пример к теореме единственности 19 о том, что условие (9.1) нельзя заменить на более слабое вида

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)| \exp\left[-k|x|^{2+\varepsilon}\right] dx\, dt < +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{9.14}$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0, 1], \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{9.15}$$

Будем искать решения задачи Коши (9.15) в классе

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x,t)| \exp\left[-k|x|^{2+\varepsilon}\right] dx\, dt < +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{9.16}$$

В качестве решения возьмем ряд следующего вида:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(t)}{(2m)!} x^{2m}. \tag{9.17}$$

Можно проверить, что формально ряд (9.17) является решением уравнения теплопроводности.

Известно, что для любого $\delta > 0$ существуют бесконечно дифференцируемые функции $f(t)$, тождественно не равные нулю, удовлетворяющие условиям

$$f(t) = 0, \quad \text{если} \quad t < 0 \quad \text{и} \quad t > 1, \quad \left|f^{(m)}(t)\right| \leqslant C^m m^{(1+\delta)m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ряд (9.17) и его производные первого порядка по t и второго порядка по x сходится равномерно в любой ограниченной области переменных (x, t) при условии $\delta < 1$. При этом имеет место следующие неравенства:

$$|u(x,t)| \leqslant C_1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_2^m x^{2m}}{m^{2m-(1+\delta)m}} \leqslant C_3 \exp\left[C_4 |x|^{2/(1-\delta)}\right].$$

Предметный указатель

Список литературы

1. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Лекции по математической физике. М.: Издательство МГУ; Наука, 2004.— 416 с.
2. *Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О. и др.* Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под редакцией А. С. Шамаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005, 158 с.
3. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа//УМН, 17:3(105), 1962, 3–146 с.
4. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998, 178 с.
5. *Кудряшов Н. А.* Методы нелинейной математической физики. Издательский дом «Интеллект», 2010.— 368 с.
6. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с.
7. *Нефедов Н. Н.* Дополнительные главы к курсу Методы математической физики. "Нелинейные эллиптические уравнения. Метод дифференциальных неравенств.". Москва: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
8. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. I часть. Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. — 252 с.
9. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987, 480 с.
10. *Тихонов А. Н.* Теорема единственности для уравнения теплопроводности// Мат. сборник.— 1935.— т. 42, №2. — с. 189–216.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968, 428 с.
12. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003, 562 с. — (Университетская серия; Т. 7).
13. *Hu Bei* Blow-up theories for semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics, 2018. Springer, Heidelberg, 2011. 125 pp.
14. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967, 261 pp.
15. *Täcklind S.* Sur les classes quasianalytiques des solutions des equations aux derivees partielles du type parabolique, Nord Acta Regial Soc. Sci. Uppsaliensis (4), №10 (1936).
16. *Vazquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, 624 pp.