Глава 13. Поверхностные интегралы

§1. Площадь поверхности.

В отличие от кривой, длина которой определялась как предел длин вписанных в неё ломаных, площадь поверхности нельзя определить как предел площадей вписанных (в поверхность) многогранников. Подтверждением этому служит известный пример Шварца (он рассмотрен в учебнике Ильина–Позняка).

Пусть поверхность P задана уравнением

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in G,$$

и пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в области G. Тогда в каждой точке поверхности существует касательная плоскость и нормаль.

Разобьем поверхность P с помощью кусочно гладких кривых на n частей: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$. Проекцию P_i на плоскость Oxy обозначим G_i. Тогда

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i.$$

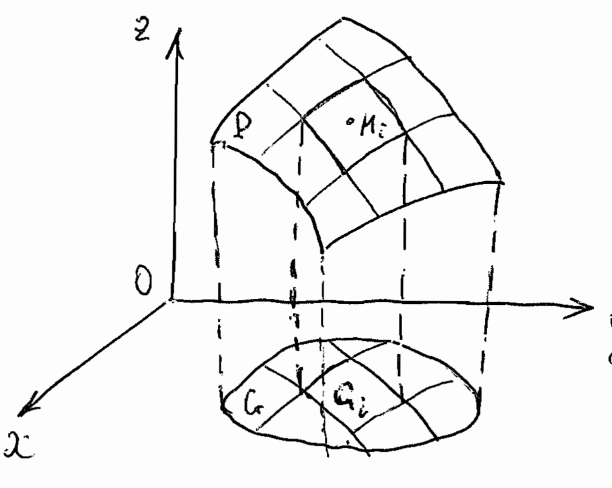


Рис. 13.1

На каждой части P_i возьмём произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(z_i = f(x_i, y_i))$ и проведём через неё касательную плоскость к поверхности P. Пусть S_i – площадь той части касательной плоскости, проекцией которой на плоскость Oxy является область G_i.

Составим сумму

$$S(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Пусть d_i — диаметр P_i, $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$.

Определение. Число S называется пределом сумм $S(P_i, M_i)$ при $d \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое, что $\forall$ разбиения поверхности P, у которого $d < \delta$, и $\forall$ выбора точек M_i выполняется неравенство

$$\left| S(P_i, M_i) - S \right| < \varepsilon .$$

Если существует $\lim\limits_{d \to 0} S(P_i, M_i) = S$, то число S называется площадью поверхности P, а сама поверхность P называется квадрируемой.

Теорема 1. Пусть поверхность P задана уравнением

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in G,$$

где G — ограниченная замкнутая область, и пусть функция $f(x,y)$ имеет в области G непрерывные частные производные $f_x(x,y)$ и $f_y(x,y)$ (такую поверхность назовём гладкой).

Тогда поверхность P квадрируема и её площадь выражается формулой

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, dx\, dy. \quad (1)$$

Доказательство. Разобьём поверхность P кусочно гладкими кривыми на n частей: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$.

При этом область G разобьётся на n частей G_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, где G_i — проекция P_i на плоскость Oxy.

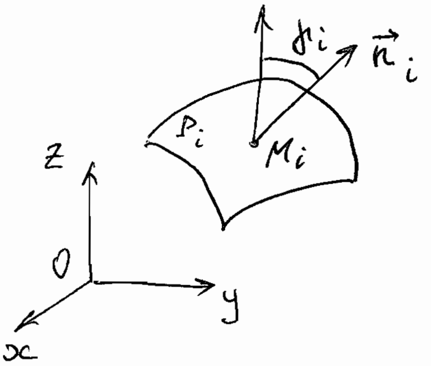


Рис. 13.2

На каждой части P_i возьмём произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, где $z_i = f(x_i, y_i)$, и проведём через точку M_i касательную плоскость к поверхности P. Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - z_i = f_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f_y(x_i, y_i)(y - y_i).$$

Вектор $\vec{n}_i = \{-f_x(x_i, y_i), -f_y(x_i, y_i), 1\}$ является вектором нормали к поверхности P в точке M_i. Обозначим через γ_i угол между вектором $\vec{n}_i$ и осью Oz (рис. 13.2). Тогда

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)}}.$$

Пусть S_i – площадь той части касательной плоскости, которая проектируется на частичную область G_i. Воспользуемся тем, что площадь $S(G_i)$ области G_i и площадь S_i связаны равенством

$$S(G_i) = S_i \cdot \cos\gamma_i,$$

откуда следует, что

$$S_i = \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)} \cdot S(G_i).$$

Суммируя величины S_i по i от 1 до n, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)}\, S(G_i). \qquad (2)$$

По определению площадь поверхности P – это предел сумм $S(P_i, M_i)$ при $d \to 0$, где $d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$, d_i – диаметр P_i.

Правая часть в равенстве (2) является интегральной суммой для двойного интеграла по области G от непрерывной функции $\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}$.

При $d \to 0$ максимальный диаметр областей G_i также стремится к нулю. Поэтому предел правой части равенства (2) при $d \to 0$ существует и равен двойному интегралу $\iint\limits_G \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,dx\,dy$.

Следовательно, существует $\lim\limits_{d\to 0} S(P_i, M_i)$, т.е. поверхность P квадрируема и её площадь выражается формулой (1). Теорема 1 доказана.

Пример. Найти площадь части параболоида вращения $z = x^2+y^2$, отсекаемой плоскостью $z=1$ (рис. 13.3).

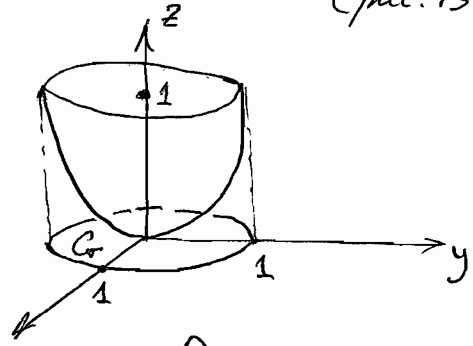


Рис. 13.3

По формуле (1) получаем:

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy.$$

Для вычисления двойного интеграла по кругу G перейдём к полярным координатам:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$(0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1)$.

Получим

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1+4r^2}\cdot r\cdot dr = 2\pi\cdot\frac{1}{8}(1+4r^2)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

Вычисление площади поверхности, заданной параметрически

Задание поверхности P уравнением $z = f(x,y)$ (а также уравнением $y = f(z,x)$ или уравнением $x = f(y,z)$) называется явным заданием.

Поверхность может быть задана уравнением вида

$$F(x,y,z) = 0,$$

не разрешённым относительно ни одной из переменных x, y и z (неявное задание).

Например, уравнение

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

(здесь $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2$) задаёт сферу радиуса R с центром в начале координат.

Поверхность может быть задана параметрически

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v),\quad (u,v) \in g. \quad (3)$$

Переменные u и v называются параметрами. Каждой точке (u,v) из области g соответствует по формулам (3) точка $M(x,y,z)$ поверхности. (Пусть различным точкам (u,v) соответствуют различные точки $M(x,y,z)$. Тогда пару чисел (u,v) можно назвать криволинейными координатами точки M на поверхности. Линии $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ — координатные линии на поверхности.

Пример. $x = R\sin u\cos v$, $y = R\sin u\sin v$, $z = R\cos u$ $(R = \mathrm{const} > 0,\ 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi)$ —

это параметрические уравнения сферы радиуса R с центром в начале координат. Криволинейные координаты u и v точки M на сфере — это "широта" и "долгота" точки M (с тем отличием от географических широты и долготы, что географическая широта отсчитывается от экватора, а в нашем примере "широта" u отсчитывается от оси Oz, географическая долгота отсчитывается от Гринвичского меридиана, а в нашем примере "долгота" v отсчитывается от плоскости Oxz).

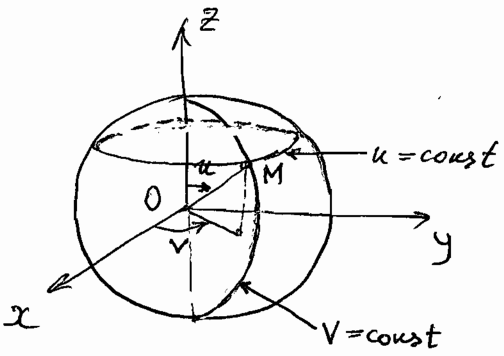


Рис. 13.4

Координатные линии $u = const$ и $v = const$ — это параллели и меридианы (рис. 13.4).

Параметры u и v в уравнениях сферы часто обозначают буквами θ и φ.

Вернёмся к уравнениям (3), задающим поверхность P. Введём вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ — радиус-вектор точки $M(x,y,z)$ (рис. 13.5). Тогда уравнения (3) поверхности P можно записать в виде одного векторного уравнения

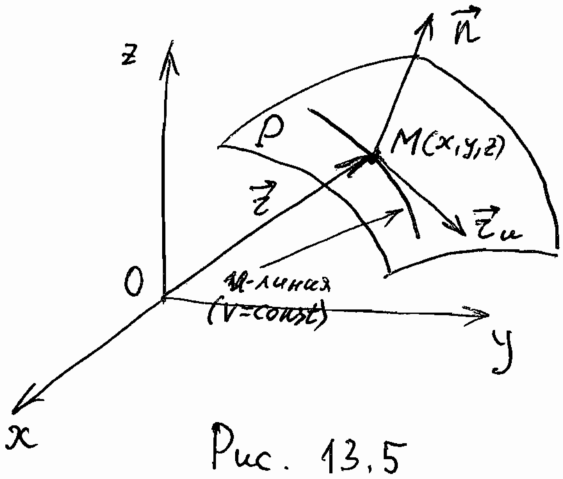


Рис. 13.5

$$\vec{r} = \varphi(u,v)\,\vec{i} + \psi(u,v) \cdot \vec{j} + \chi(u,v)\,\vec{k} =: \vec{r}(u,v)$$

Определим частные производные вектор-функции $\vec{r}(u,v)$ следующими формулами:

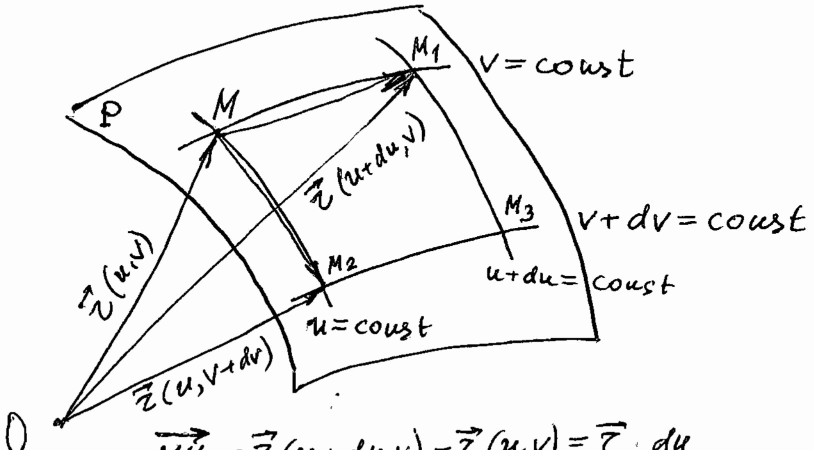
$$\vec{r}_u = \varphi_u \cdot \vec{i} + \psi_u \cdot \vec{j} + \chi_u \cdot \vec{k}, \quad \vec{r}_v = \varphi_v \cdot \vec{i} + \psi_v \cdot \vec{j} + \chi_v \cdot \vec{k}.$$

Из геометрических (и также физических) соображений ясно, что вектор $\vec{r}_u(u,v)$ является касательным вектором к линии $v = const$ в точке $M(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$, а вектор $\vec{r}_v(u,v)$ – касательным вектором к линии $u = const$ в точке M.

Поэтому векторы $\vec{r}_u(u,v)$ и $\vec{r}_v(u,v)$ лежат в касательной плоскости к поверхности P в точке $M(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$ и, следовательно, вектор $\vec{n} = [\vec{r}_u \times \vec{r}_v]$ является вектором нормали к поверхности P в точке M. Вектор $\vec{n}$ запишем в виде

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$$

$$= A(u,v) \cdot \vec{i} + B(u,v) \vec{j} + C(u,v) \cdot \vec{k}.$$



$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(u+du,v) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_u \cdot du$

$\overrightarrow{MM_2} = r(u,v+dv) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_v \cdot dv$

Рис. 13.6

Рассмотрим на поверхности P две пары близких координатных линий (рис. 13.6). Они ограничивают криволинейный четырёхугольник $MM_1M_3M_2$ – "элемент" поверхности P. Вычислим приближённо его площадь dS, заменив криволинейный четырехугольник параллелограммом, построенным на векторах $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_u du$ и $\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}_v \cdot dv$ (считаем $du>0, dv>0$)

$$ds = \left| [\vec{r}_u \cdot du \times \vec{r}_v dv] \right| = \left| [\vec{r}_u \times \vec{r}_v] \right| du dv =$$

$$= \left| A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \right| du dv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du dv.$$

Суммируя по всем "элементам" поверхности P, приходим к формуле площади поверхности, заданной параметрически:

$$S = \iint\limits_{g} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du dv. \qquad (4)$$

(отметим, что A, B и C — функции переменных u и v).

Запишем формулу (4) в другом виде. С этой целью обозначим буквой α угол между векторами $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Тогда

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \left| [\vec{r}_u \times \vec{r}_v] \right| = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \cdot \sin\alpha =$$

$$= |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{|\vec{r}_u|^2 \cdot |\vec{r}_v|^2 - |\vec{r}_u|^2 |\vec{r}_v|^2 \cdot \cos^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\vec{r}_u^{\,2} \cdot \vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2}.$$

Введём обозначения:

$$\vec{r}_u^{\,2} = \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2 := E(u,v),$$

$$\vec{r}_v^{\,2} = \varphi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2 := G(u,v),$$

$$(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v) = \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v := F(u,v).$$

Тогда $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = EG - F^2$, и формула (4) принимает вид

$$S = \iint\limits_{g} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \qquad (5).$$

<u>Замечания.</u> 1) Формулы (4) и (5) имеют место при следующих условиях: функции φ, ψ и χ имеют непрерывные частные производные первого порядка в замкнутой ограниченной области g, а координаты A, B и C вектора нормали $\vec{n}$ не обращаются одновременно в нуль ни в одной точке (u, v) области g (при этом $\vec{r}_u \neq \vec{0}$ и $\vec{r}_v \neq \vec{0}$). В таком случае поверхность P называется <u>гладкой</u>.

Формулы (4) и (5) остаются в силе и в том случае, когда A, B и C одновременно равны нулю на множестве точек площади нуль, в частности, в конечном числе точек. В случае сферических координат $A = B = C = 0$ при $u = 0$ и $u = \pi$ (на полюсах сферы).

2) Рассмотрим на поверхности P две близкие точки $M(u, v)$ и $M_1(u + du, v + dv)$ (рис. 13.7), через которые по поверхности проходит кривая.

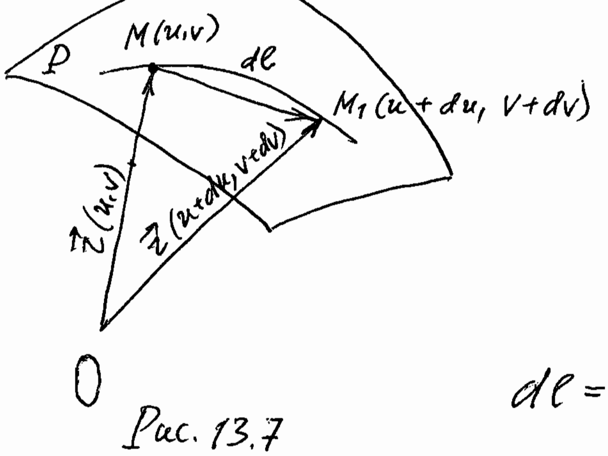


Рис. 13.7

Вычислим приближённо длину dl "элемента" кривой, заменив его вектором

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}(u+du, v+dv) - \vec{r}(u,v) =$$

$$= \vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv.$$

$$dl = |\overrightarrow{MM_1}| = |\vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv| =$$

$$= \sqrt{(\vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv)^2} = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2} (du)^2 + 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)\, du\, dv + \vec{r}_v^{\,2} (dv)^2} =$$

$$= \sqrt{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}.$$

Квадратичная форма

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

называется **1-й квадратичной формой поверхности**.

Угловые миноры матрицы $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ этой квадратичной формы равны $E = \vec{r}_u^{\,2} > 0$ и $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Следовательно, эта квадратичная форма положительно определенная.

С помощью 1-й квадратичной формы вычисляются на поверхности площади (формула (5)), а также длины кривых и углы между кривыми.

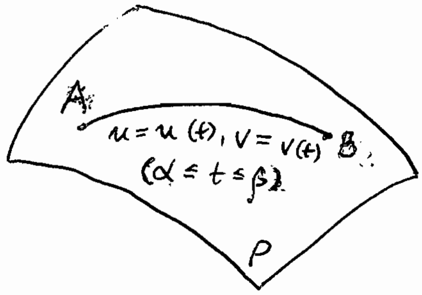


Рис. 13.8

Если кривая AB на поверхности задана параметрически уравнениями

$$u = u(t),\ v = v(t),\ \alpha \le t \le \beta \text{ (рис. 13.8)},$$

то её длина выражается формулой

$$l_{AB} = \int_\alpha^\beta \sqrt{E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2}\, dt.$$

Говорят, что 1-я квадратичная форма определяет *метрику* поверхности.

Существует ещё так называемая *2-я квадратичная форма поверхности*. Она позволяет вычислять кривизну поверхности.

Пример. Рассмотрим сферу, заданную параметрически

$$x = R\sin u\cos v,\ y = R\sin u\sin v,\ z = R\cos u$$
$$(0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi).$$

Так как

$$\vec{r}_u = R\cos u\cos v\cdot\vec{i} + R\cos u\sin v\cdot\vec{j} - R\sin u\cdot\vec{k},$$

$$\vec{r}_v = -R\sin u\sin v\cdot\vec{i} + R\sin u\cos v\cdot\vec{j},$$

то

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = R^2;\quad G = \vec{r}_v^{\,2} = R^2\sin^2 u,\quad F = (\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v) = 0,$$

$$EG - F^2 = R^4\sin^2 u.$$

По формуле (5) находим площадь сферы:

$$S = \int_0^{2\pi} dv\int_0^{\pi} du\sqrt{R^4\sin^2 u} = R^2\int_0^{2\pi} dv\int_0^{\pi}\sin u\,du =$$
$$= R^2\cdot 2\pi\cdot 2 = 4\pi R^2.$$

§ 2. Поверхностные интегралы 1-го рода.

Пусть P - квадрируемая поверхность, заданная явным уравнением или параметрически, и пусть на поверхности P определена ограниченная функция $f(M) = f(x,y,z)$. Разобьем поверхность P на n квадрируемых частей: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$, на каждой части P_i возьмём произвольную точку M_i и составим интегральную сумму

$$I(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)S(P_i),$$

где $S(P_i)$ - площадь P_i.

Пусть d_i - диаметр P_i, $d = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$.

Если существует $\lim\limits_{d\to 0} I(P_i, M_i) = I$, то число I называется поверхностным интегралом первого рода от функции

$f(M)$ по поверхности P и обозначается так:

$$I = \iint\limits_P f(M)\,ds \quad \text{или} \quad I = \iint\limits_P f(x,y,z)\,ds.$$

Поверхностный интеграл 1-го рода является обобщением понятия двойного интеграла на случай, когда область интегрирования — не плоская, а произвольная поверхность.

Примеры. 1) Если $f(M)=1$, то $\iint\limits_P ds = S(P)$ — площадь поверхности P.

2) Если P — заряженная поверхность и $\rho(M)$ — поверхностная плотность заряда в точке M, то

$$\iint\limits_P \rho(M)\,ds = q \text{ — суммарный заряд поверхности } P.$$

Теорема 2. Пусть:

1) поверхность P задана уравнением $z = z(x,y)$, $(x,y)\in G$, где G — квадрируемая замкнутая область, а функция $z(x,y)$ имеет в области G непрерывные частные производные $z_x(x,y)$ и $z_y(x,y)$ (т.е. P — гладкая поверхность);

2) функция $f(M) = f(x,y,z)$ непрерывна на поверхности P.

Тогда поверхностный интеграл 1-го рода от функции $f(M)$ по поверхности P существует, и справедливо равенство

$$\iint\limits_P f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_G f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,dx\,dy. \quad (1)$$

Доказательство. Разобьем поверхность P на квадрируемые части: $P = \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$. Пусть G_i — проекция P_i на плоскость Oxy, так что $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$. Выберем на каждой части P_i

произвольным образом точку M_i и составим интегральную сумму

$$S(P_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S(P_i). \qquad (2)$$

Двойной интеграл в правой части равенства (1) обозначим буквой I и запишем в виде

$$I = \sum_{i=1}^{n} \iint_{G_i} f(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy.$$

Каждое слагаемое в правой части написанного равенства преобразуем по формуле среднего значения:

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(K_i) \iint_{G_i} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy,$$

где $K_i \in P_i$. Так как $\iint_{G_i} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy = S(P_i)$, то

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(K_i) S(P_i). \qquad (3)$$

Вычитая (3) из (2), получаем:

$$I(P_i, M_i) - I = \sum_{i=1}^{n} \left[f(M_i) - f(K_i) \right] S(P_i). \quad (4)$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(M)$ непрерывна на поверхности P, которая является ограниченным замкнутым множеством в силу условия 1) теоремы, то $f(M)$ равномерно непрерывна на поверхности P. Поэтому $\exists\, \delta > 0$, такое, что если d_i = диаметр $P_i < \delta$, то для любых двух точек M_i и K_i на поверхности P_i будет выполнено неравенство

$$\left| f(M_i) - f(K_i) \right| < \frac{\varepsilon}{S(P)},$$

где $S(P)$ – площадь поверхности P.

Следовательно, для любого разбиения поверхности P, у которого $d < \delta$, из равенства (4) следует:

$$\left| I(P_i, M_i) - I \right| < \frac{\varepsilon}{S(P)} \sum_{i=1}^{n} S(P_i) = \varepsilon .$$

Это означает, что $\lim\limits_{d \to 0} \left(I(P_i, M_i) - I \right) = 0$, т.е. существует $\lim\limits_{d \to 0} I(P_i, M_i) = I$, а так как $\lim\limits_{d \to 0} I(P_i, M_i)$ – это и есть поверхностный интеграл $\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS$, а I – двойной интеграл из правой части равенства (1), то тем самым доказана справедливость равенства (1). Теорема 2 доказана.

<u>Пример.</u> Вычислить $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где P – граница тела, заданного неравенствами $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.

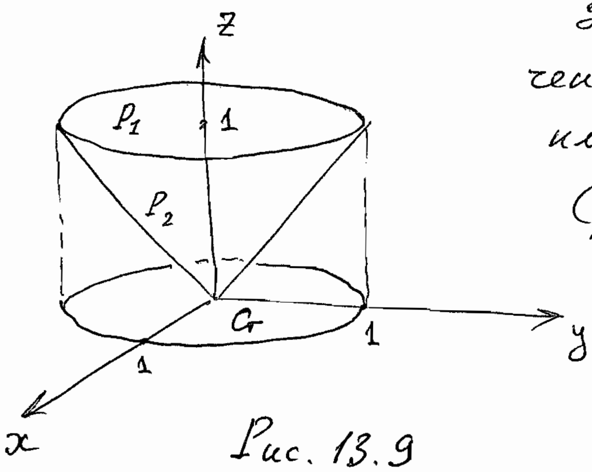


Рис. 13.9

Эти неравенства задают конус, ограниченный основанием P_1, лежащим в плоскости $z=1$, и боковой поверхностью P_2 (рис. 13.9). Вычислим отдельно поверхностные интегралы по поверхностям P_1 и P_2.

P_1: $z = 1$, $(x,y) \in G = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$.

По формуле (1): $\iint\limits_{P_1} (x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_{G} (x^2+y^2)\sqrt{1+0+0}\,dx\,dy =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r\,dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

P_2: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in G$.

По формуле (1): $\iint\limits_{P_2} (x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_{G} (x^2+y^2)\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy =$

$= \sqrt{2}\iint\limits_{G} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. Итак, $\iint\limits_{P} = \iint\limits_{P_1} + \iint\limits_{P_2} = (1+\sqrt{2})\frac{\pi}{2}$.

Замечание. Если гладкая поверхность P задана параметрически

$$x=\varphi(u,v),\; y=\psi(u,v),\; z=\chi(u,v),\quad (u,v)\in g,$$

то поверхностный интеграл 1-го рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности P вычисляется по формуле

$$\iint\limits_P f(x,y,z)\,ds=\iint\limits_g f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \quad (5)$$

§3. Поверхностные интегралы 2-го рода.

Понятие стороны поверхности. Если поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$, $(x,y)\in G$, то с точки зрения наглядных представлений можно различать у неё верхнюю и нижнюю стороны. У поверхности, ограничивающей некоторое тело, например у сферы, можно различать внешнюю и внутреннюю стороны. Введём понятие стороны поверхности.

Рассмотрим поверхность P, в каждой точке M которой существует касательная плоскость. Вектор нормали к поверхности в точке M обозначим $\vec{n}(M)$. Пусть в окрестности каждой точки существует непрерывное векторное поле нормалей к поверхности. Это означает, что для каждой точки поверхности существует такая окрестность, в которой вектор-функцию $\vec{n}(M)$ можно задать так, что она будет непрерывной функцией точки M.

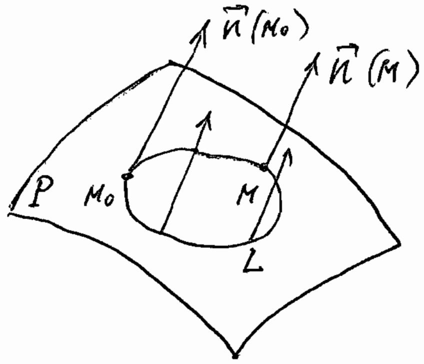


Рис. 13.10

Отметим какую-нибудь точку M_0 на поверхности P и зафиксируем в этой точке одно из двух возможных направлений вектора нормали. Проведём на поверхности P через точку M_0 произвольный замкнутый контур L. Пусть точка M пробегает по контуру L, выйдя из точки M_0 и возвращаясь в эту точку.

Будем следить за непрерывным изменением вектора нормали $\vec{n}(M)$ при движении точки M по контуру L. Могут представиться 2 случая.

1) При возвращении точки M в точку M_0 вектор $\vec{n}$ не изменит направление (рис. 13.10).

2) При возвращении в точку M вектор $\vec{n}$ изменит направление на противоположное.

Примером 2-го случая может служить лист Мёбиуса.

Определение. Если для любой точки M_0 поверхности P и для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности P через точку M_0, выбранное в точке M_0 направление нормали не изменяется после обхода по контуру, то поверхность P называется двусторонней.

В противном случае поверхность называется односторонней. Пример односторонней поверхности — лист Мёбиуса.

На двусторонней поверхности будем различать две стороны.

Под стороной поверхности будем понимать множество всех точек поверхности с заданными в них векторами нормали $\vec{n}(M)$ так, что совокупность этих векторов образует непрерывное векторное поле нормалей (т.е. вектор-функция $\vec{n}(M)$, $M \in P$, — непрерывная функция точки M).

Гладкая поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$, является двусторонней. На одной стороне поверхности непрерывное векторное поле нормалей можно задать вектор-функцией $\vec{n}(M) = \{-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\}$ (верхняя сторона поверхности), а на другой стороне — вектор-функцией $-\vec{n}(M) = \{f_x(x,y), f_y(x,y), -1\}$ (нижняя сторона поверхности).

Если гладкая двусторонняя поверхность задана параметрически:

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=\chi(u,v),\ (u,v)\in g,$$

то на одной стороне непрерывное векторное поле нормалей можно задать вектор-функцией $\vec{n}(M)=\{A,B,C\}$, а на другой стороне – вектор-функцией $-\vec{n}(M)=\{-A,-B,-C\}$.

На односторонней поверхности нельзя задать ни одного непрерывного поля нормалей, и в этом смысле у односторонней поверхности нет ни одной стороны.

Двусторонняя поверхность называется также ориентируемой, а выбор определённой стороны называется ориентацией поверхности.

Определение поверхностных интегралов 2-го рода

Пусть P – гладкая двусторонняя поверхность. Выберем на ней одну из сторон, т.е. фиксируем непрерывное поле нормалей $\vec{n}(M)$. Обозначим через $\alpha(M),\beta(M),\gamma(M)$ углы между вектором $\vec{n}(M)$ и осями координат. Если $|\vec{n}(M)|=1$, то $\vec{n}(M)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$.

Пусть на поверхности P определены три функции: $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$. Рассмотрим поверхностные интегралы 1-го рода

$$I_1=\iint\limits_P P(M)\cos\alpha(M)\,ds,\quad I_2=\iint\limits_P Q(M)\cos\beta(M)\,ds,\quad I_3=\iint\limits_P R(M)\cos\gamma(M)\,ds.$$

Они называются поверхностными интегралами 2-го рода соответственно от функций P, Q, R по выбранной стороне поверхности P. Для них используются также следующие обозначения:

$$I_1 = \iint\limits_P P\,dydz, \quad I_2 = \iint\limits_P Q\,dzdx, \quad I_3 = \iint\limits_P R\,dxdy.$$

(смысл этих обозначений состоит в том, что $dydz = ds\cdot\cos\alpha$ — площадь проекции элемента поверхности с площадью ds на плоскость Oyz, и также $dzdx = ds\cdot\cos\beta$ и $dxdy = ds\cdot\cos\gamma$).

Если выбрать другую сторону поверхности, то вектор $\vec{n}(M)$ во всех точках изменит направление, поэтому его координаты $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ изменят знак и, следовательно, интегралы I_1, I_2, I_3 изменят знак. В этом отношении поверхностные интегралы 2-го рода аналогичны криволинейным интегралам 2-го рода, которые изменяют знак при изменении направления движения по кривой.

Сумма

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \iint\limits_P P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_P (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

называется общим поверхностным интегралом 2-го рода.

Если ввести вектор-функцию $\vec{a}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$, то общий интеграл I можно записать в виде

$$I = \iint\limits_P (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds.$$

Физический пример. Если $\vec{a}(M) = \vec{v}(M)$ — скорость в точке M течения жидкости, заполняющей какую-то часть пространства, то $\iint\limits_P (\vec{v}\cdot\vec{n})\,ds$ представляет собой поток жидкости

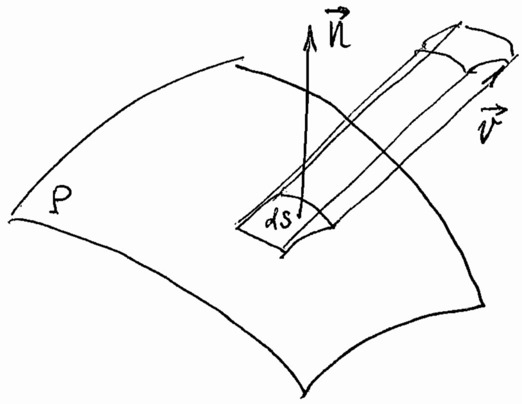


Рис. 13.11

через ориентированную поверхность P (т.е. количество (объём) жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность P в выбранном направлении):

$(\vec{v}\cdot\vec{n})ds$ – поток жидкости через элемент поверхности с площадью ds (рис. 13.11);

$\iint\limits_P (\vec{v}\cdot\vec{n})ds$ – поток жидкости через поверхность P.

В общем случае интеграл $\iint\limits_P (\vec{a}\cdot\vec{n})ds$ называется потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность P в заданном направлении.

Вычисление поверхностных интегралов 2-го рода

1) Пусть гладкая поверхность P задана уравнением

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in G.$$

Выберем, например, верхнюю сторону поверхности P, т.е.

$$\vec{n}(M) = \{-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\}.$$

Тогда $\cos\alpha(M) = \dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$ (на нижней стороне $\cos\alpha(M) = \dfrac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$), $\cos\beta(M) = \dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$, $\cos\gamma(M) = \dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$.

Пусть функции P, Q, R непрерывны на поверхности P. По формуле (1) § 2 получаем:

$$I_1 = \iint\limits_P P(x,y,z)\cos\alpha(M)\,ds = \iint\limits_G P(x,y,f(x,y))\frac{-f_x(x,y)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\cdot\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_G P(x,y,f(x,y))\, f_x(x,y)\, dx\, dy,$$

$$I_2 = \iint_P Q(x,y,z) \cos\beta(M)\, dS = -\iint_G Q(x,y,f(x,y))\, f_y(x,y)\, dx\, dy,$$

$$I_3 = \iint_P R(x,y,z) \cos\gamma(M)\, dS = \iint_G R(x,y,f(x,y))\, dx\, dy. \quad (1)$$

2) Пусть гладкая двусторонняя поверхность P задана параметрически

$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v),\ (u,v) \in g.$

Выберем ту сторону поверхности, на которой $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{A}{\sqrt{EG-F^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{EG-F^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{EG-F^2}}$.

По формуле (5) § 2 получаем:

$$I_1 = \iint_P P\cos\alpha\, dS = \iint_g P(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \frac{A}{\sqrt{EG-F^2}} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

$$= \iint_g P(\varphi, \psi, \chi) A(u,v)\, du\, dv, \quad (2)$$

$$I_2 = \iint_g Q(\varphi,\psi,\chi) B(u,v)\, du\, dv, \quad I_3 = \iint_g R(\varphi,\psi,\chi) C(u,v)\, du\, dv.$$

Все эти формулы верны и тогда, когда поверхность P — кусочно-гладкая, т.е. составлена из конечного числа гладких поверхностей, а функции P, Q, R — кусочно непрерывные на поверхности P.

<u>Пример.</u> Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \frac{1}{3} \iint_P x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy.$$

по внешней стороне эллипсоида P:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

т.е. вектор $\vec{n}(M)$ в каждой точке M эллипсоида направлен наружу, а не вовнутрь тела, ограниченного эллипсоидом.

Перейдем к параметрическим уравнениям эллипсоида:

$$x=a\sin u\cos v,\quad y=b\sin u\sin v,\quad z=c\cos u,$$

$$(u,v)\in g=\{(u,v):\ 0\le u\le\pi,\ 0\le v\le 2\pi\}.$$

Вычислим координаты вектора нормали

$$\vec{n}=[\vec{r}_u\times\vec{r}_v]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \varphi_u & \psi_u & \chi_u\\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v\end{vmatrix}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}:$$

$$A=\begin{vmatrix}\psi_u & \chi_u\\ \psi_v & \chi_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b\cos u\sin v & -c\sin u\\ b\sin u\cos v & 0\end{vmatrix}=bc\sin^2 u\cos v,$$

$$B=\begin{vmatrix}\chi_u & \varphi_u\\ \chi_v & \varphi_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-c\sin u & a\cos u\sin v\\ 0 & -a\sin u\sin v\end{vmatrix}=ac\sin^2 u\sin v,$$

$$C=\begin{vmatrix}\varphi_u & \psi_u\\ \varphi_v & \psi_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos u\cos v & b\cos u\sin v\\ -a\sin u\sin v & b\sin u\cos v\end{vmatrix}=ab\sin u\cos u.$$

Для внешней стороны эллипсоида

$$\vec{n}=\{A,B,C\},$$

что легко установить по первому октанту $\{0\le u\le\frac{\pi}{2},\ 0\le v\le\frac{\pi}{2}\}$, для которого углы α,β,γ — острые (рис. 13.12).

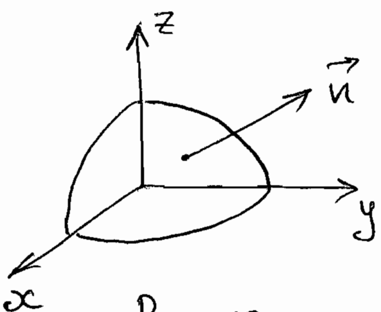


Рис. 13.12

По формулам (2) получаем:

$$I = \frac{1}{3}\iint\limits_{g} (xA + yB + zC)\,du\,dv = \frac{1}{3}\iint\limits_{g} (abc\sin^3 u\cos^2 v +$$

$$+ abc\sin^3 u\sin^2 v + abc\sin u\cos^2 u)\,du\,dv =$$

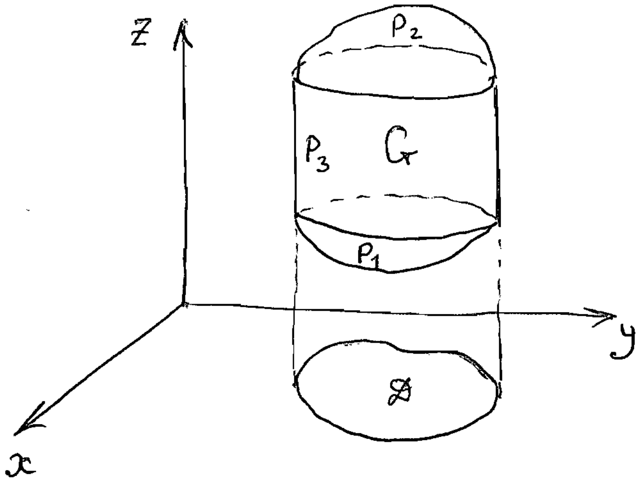
$$= \frac{1}{3}abc\iint\limits_{g} \sin u\,du\,dv = \frac{1}{3}abc\int_0^{2\pi} dv\int_0^{\pi}\sin u\,du =$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc$$ — объём тела, ограниченного эллипсоидом.

Этот результат – не случайный. В следующем параграфе будет получена формула Остроградского-Гаусса, из которой последует, что объем любого тела, ограниченного кусочно-гладкой поверхностью P, вычисляется с помощью такого же поверхностного интеграла, как в рассмотренном примере:

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{P} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

§4. Формула Остроградского – Гаусса



P_1: $z = z_1(x,y)$,

P_2: $z = z_2(x,y)$,

P_3 – цилиндрическая поверхность

Рис. 13.13

Пусть функции $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ определены и непрерывны в ограниченной связной замкнутой области $\mathcal{D}$, причем

$$z_1(x,y) \le z_2(x,y),\quad (x,y)\in\mathcal{D}.$$

Область $G = \{(x,y,z): (x,y)\in\mathcal{D},\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$ назовём "z-цилиндрической".

Аналогично определяются "x-цилиндрическая" и "y-цилиндрическая" области.

Область G назовём простой, если её можно разбить на конечное число "x-цилиндрических" областей, и также на конечное число "y-цилиндрических" областей, и на конечное число "z-цилиндрических" областей.

Пример: параллелепипед и шар — простые области.

Границу области G, т.е. ограничивающую её поверхность, будем обозначать буквой Γ.

Теорема 3. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в простой области G, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью Γ. Тогда справедливо равенство

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint\limits_\Gamma \left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS=$$

$$\left(=\iint\limits_\Gamma P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy\right), \qquad (1)$$

где поверхностный интеграл второго рода берётся по внешней стороне поверхности Γ (т.е. α, β, γ — углы между внешней нормалью к поверхности Γ и осями координат).

[Формула (1) называется формулой Остроградского-Гаусса. Она была получена М.В. Остроградским в 1827 г. в связи с рассмотрением задачи о распространении тепла в твёрдом теле. Гаусс получил эту формулу ранее в частном случае, когда $P=x$, $Q=y$, $R=z$.]

Доказательство. а) Рассмотрим сначала случай, когда G — "z-цилиндрическая" область, и докажем справедливость равенства

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{P} R(x,y,z) \cos\gamma\, ds. \qquad (2)$$

Сводя тройной интеграл к повторному, получаем:

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\, dx dy dz = \iint\limits_{D} dx dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\, dz =$$

$$= \iint\limits_{D} dx dy \cdot R(x,y,z) \Bigg|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} = \iint\limits_{D} R(x,y,z_2(x,y))\, dx dy - \iint\limits_{D} R(x,y,z_1(x,y))\, dx dy. \qquad (3)$$

Первый из двойных интегралов в правой части (3) выразим через поверхностный интеграл по верхней стороне поверхности P_2 $(z = z_2(x,y))$, а второй — через поверхностный интеграл по нижней стороне поверхности P_1 $(z = z_1(x,y))$ (см. формулу (1) из § 3):

$$\iint\limits_{D} R(x,y,z_2(x,y))\, dx\, dy = \iint\limits_{P_2} R(x,y,z) \cos\gamma\, ds,$$

$$\iint\limits_{D} R(x,y,z_1(x,y))\, dx\, dy = -\iint\limits_{P_1} R(x,y,z) \cos\gamma\, ds.$$

Обозначим через P_3 боковую (цилиндрическую) поверхность области G. Так как в точках этой поверхности $\vec{n} \perp Oz$, то $\cos\gamma = 0$, и поэтому

$$\iint\limits_{P_3} R(x,y,z) \cos\gamma\, ds = 0.$$

Равенство (3) можно теперь записать в виде

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx dy dz = \iint\limits_{P_2} R(x,y,z) \cos\gamma\, ds + \iint\limits_{P_1} R(x,y,z) \cos\gamma\, ds + \iint\limits_{P_3} R(x,y,z) \cos\gamma\, ds =$$

$$= \iint\limits_{P} R(x,y,z) \cos\gamma \, ds,$$

где поверхностный интеграл берётся по внешней стороне поверхности P. Тем самым, справедливость равенства (2) для "z-цилиндрической области доказана.

б) Пусть теперь G — простая область. Разобьём её на конечное число "z-цилиндрических" областей G_i с границами P_i ($i=1,2,\dots,n$). Запишем для каждой области G_i равенство (2):

$$\iiint\limits_{G_i} \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P_i} R(x,y,z) \cos\gamma \, ds.$$

Суммируя эти равенства по i от 1 до n, получим в левой части $\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz$, а в правой части $\iint\limits_{P} R(x,y,z) \cos\gamma \, dx\,dy$, поскольку поверхностные интегралы по вспомогательным поверхностям, разделяющим область G на части G_i, берутся дважды, причём один раз по одной стороне каждой такой поверхности, а другой раз — по другой стороне (рис. 13.14), и поэтому сумма таких двух интегралов равна нулю.

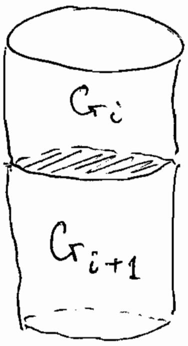


Рис. 13.14

Итак, для простой области G справедливо равенство

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P} R(x,y,z) \cos\gamma \, ds \qquad (2).$$

Аналогично выводятся равенства (путём разбиения области G на "x-цилиндрические", а затем на "y-цилиндрические" области):

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_P P(x,y,z)\cos\alpha\,ds, \quad (4)$$

$$\iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_P Q(x,y,z)\cos\beta\,ds. \quad (5)$$

Складывая (2), (4) и (5), приходим к равенству (1):

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint\limits_P (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

Теорема 3 доказана.

<u>Замечания</u>. 1) Введём вектор-функцию $\vec{a}=\{P,Q,R\}$ и скалярную функцию, которая называется <u>дивергенцией</u> векторного поля $\vec{a}$: $\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$. Тогда формулу Остроградского – Гаусса можно записать в виде

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_P (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds.$$

2) Можно доказать, что формула Остроградского – Гаусса верна для любой области G, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

<u>**Следствие**</u>. Если функции P, Q, R таковы, что

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1,$$

то из формулы Остроградского – Гаусса получим выражение для объема области G через поверхностный интеграл:

$$V(G) = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz = \iint\limits_P (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

В частности, если $P=\frac{1}{3}x$, $Q=\frac{1}{3}y$, $R=\frac{1}{3}z$, то $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$, и для объема $V(G)$ получается формула:

$$V(G) = \frac{1}{3}\iint\limits_{P}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,ds = \frac{1}{3}\iint\limits_{P} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

где поверхностный интеграл берётся по внешней стороне поверхности P. Эту формулу можно записать в виде

$$V(G) = \frac{1}{3}\iint\limits_{P}(\vec{r}\cdot\vec{n})\,ds, \quad \text{где } \vec{r} = \{x, y, z\}.$$

Пример. Вычислить

$$I = \iint\limits_{P}(x^2 + f_1(y,z))\,dy\,dz + (\cos y + f_2(x,z))\,dz\,dx + (z + f_3(x,y))\,dx\,dy,$$

где P — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Здесь $P = x^2 + f_1(y,z)$, $Q = \cos y + f_2(x,z)$, $R = z + f_3(x,y)$, поэтому $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -\sin y$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 1$.

По формуле Остроградского — Гаусса

$$I = \iiint\limits_{G}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G}(2x - \sin y + 1)\,dx\,dy\,dz = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

§ 5. Формула Стокса.

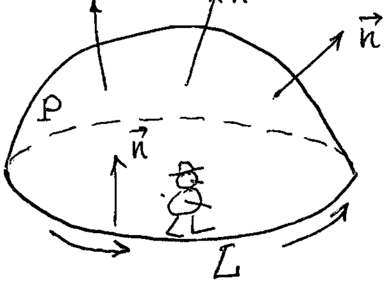


Рис. 13.15

Пусть P — двусторонняя поверхность, ограниченная контуром L. Выберем одну из сторон поверхности, т.е. ориентируем поверхность. Введём положительное направление обхода контура L, соответствующее ориентации поверхности, следующим образом: если наблюдатель находится на выбранной стороне поверхности (т.е. направление от ног к голове совпадает с направлением вектора нормали), то при обходе контура в положительном направлении он оставляет поверхность слева от себя (рис. 13.15). Если граница поверхности состоит из

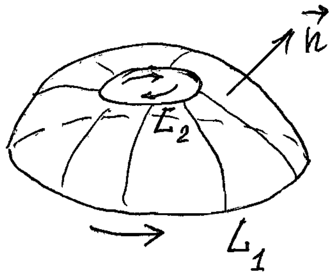


Рис. 13.16

нескольких контуров, то для каждого из них положительное направление обхода определяется таким же образом (рис. 13.16).

Выбор положительного направления обхода контура называется также согласованием ориентации контура с ориентацией поверхности.

Определение. Назовём поверхность P "xyz-проектируемой", если она взаимно однозначно проектируется на каждую координатную плоскость прямоугольной системы координат $Oxyz$.

Такую поверхность можно задать любым из трёх уравнений вида:

$$
\begin{aligned}
&z = f_1(x,y), \quad (x,y) \in D_1;\\
&x = f_2(y,z), \quad (y,z) \in D_2; \qquad (1)\\
&y = f_3(z,x), \quad (z,x) \in D_3.
\end{aligned}
$$

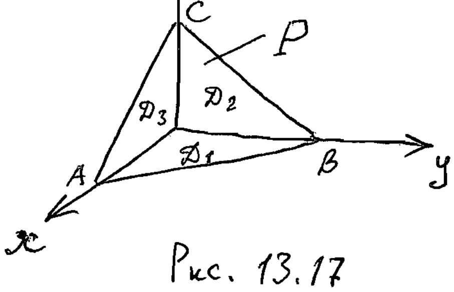


Рис. 13.17

Простейшим примером такой поверхности является плоский треугольник ABC, изображённый на рисунке 13.17.

В дальнейшем под гладкой "xyz - проектируемой" поверхностью будем понимать такую поверхность P, которая удовлетворяет следующим условиям:

функции f_1, f_2 и f_3 из уравнений (1) имеют непрерывные частные производные первого порядка в замкнутых ограниченных областях D_1, D_2 и D_3, а границей поверхности P является замкнутый кусочно-гладкий контур, взаимно однозначно проектирующийся на границу каждой области D_i $(i=1,2,3)$.

Теорема 4. Пусть

1) функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в области G;

2) гладкая "xyz - проектируемая" поверхность P, ограниченная контуром L, расположена внутри области G.

Тогда справедливо равенство

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_P \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right] ds, \qquad (2)$$

где α, β, γ - углы между вектором нормали на выбранной стороне поверхности P и осями Ox, Oy, Oz, а ориентация контура L согласована с ориентацией поверхности P.

Формула (2) называется формулой Стокса. Она выражает криволинейный интеграл по замкнутому контуру L через поверхностный интеграл 2-го рода по поверхности P, ограниченной контуром L.

Доказательство. Запишем уравнение поверхности P в виде

$$z = f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

где D – проекция поверхности P на плоскость Oxy.

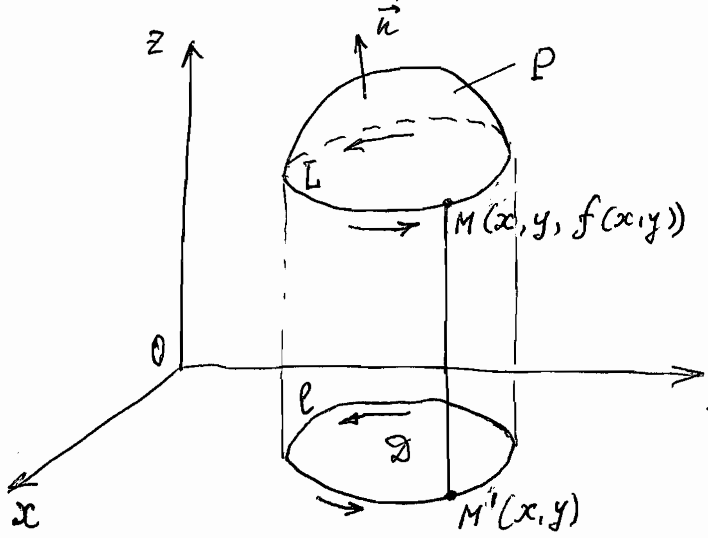


Рис. 13.18

Обозначим буквой l проекцию контура L на плоскость Oxy. Контур l является границей области D (рис. 13.18).

Рассмотрим криволинейный интеграл $\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx$. Преобразуем его в интеграл по поверхности P по следующей схеме:

$$\oint\limits_L \xrightarrow{(1)} \oint\limits_l \xrightarrow{(2)} \iint\limits_D \xrightarrow{(3)} \iint\limits_P .$$

Для определенности будем рассматривать верхнюю сторону поверхности P. При этом контур L пробегается в соответствующем положительном направлении (см. рис. 13.18).

(1) Пусть параметрические уравнения контура l имеют вид

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t),\quad \alpha \le t \le \beta,$$

и контур l пробегается в положительном направлении при возрастании t от α до β.

Тогда параметрические уравнения контура L можно записать в виде

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=f(\varphi(t),\psi(t)),\quad \alpha\le t\le\beta.$$

Поэтому

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t),f(\varphi(t),\psi(t)))\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$\oint\limits_\ell P(x,y,f(x,y))\,dx=\int\limits_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t),f(\varphi(t),\psi(t)))\,\varphi'(t)\,dt,$$

откуда следует равенство

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\,dx=\oint\limits_\ell P(x,y,f(x,y))\,dx.$$

(2) Согласно формуле Грина $\oint\limits_\ell P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ справедливо равенство

$$\oint\limits_\ell P(x,y,f(x,y))\,dx=-\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,f(x,y))\,dxdy=$$

$$=-\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

(3) Вектор $\vec n=\left\{-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right\}$ является вектором нормали на верхней стороне поверхности P, поэтому его координаты пропорциональны координатам единичного вектора нормали $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, в частности

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\gamma},\ \text{откуда}\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Следовательно,

$$-\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\frac{1}{\cos\gamma}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\sqrt{1+{f_x}^2+{f_y}^2}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{P}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS$$ (см. формулу (1) § 2).

Итак,

$$\oint\limits_{L}P\,dx=\iint\limits_{P}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS \quad (3).$$

Аналогично можно доказать, что

$$\oint\limits_{L}Q\,dy=\iint\limits_{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS, \quad (4)$$

$$\oint\limits_{L}R\,dz=\iint\limits_{P}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS. \quad (5)$$

Складывая равенства (3), (4) и (5) приходим к равенству (2). Теорема 4 доказана.

Замечания. 1) Введём вектор-функцию $\vec{a}=\{P,Q,R\}$ и вектор-функцию, которая называется ротором векторного поля $\vec{a}(M)$:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}.$$

Тогда формулу Стокса можно записать в виде

$$\oint\limits_{L}(\vec{a}\cdot d\vec{l}) = \iint\limits_{P}(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS.$$

Эта формула читается так: <u>циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутого контура L равна потоку векторного поля $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ через поверхность, натянутую на контур L.</u>

2) Если поверхность P не является "xyz-проектируемой," но допускает разбиение на конечное число "xyz-проектируемых поверхностей, то формула Стокса остаётся в силе.

Примером такой поверхности является полусфера, расположенная в полупространстве $z \geq 0$.

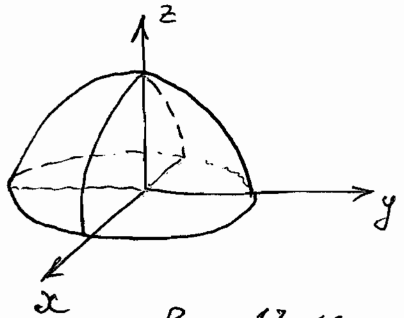


Рис. 13.19

Её можно разбить на 4 "xyz-проектируемые части.

3) Если поверхность P представляет собой плоскую область, расположенную в плоскости, перпендикулярной к оси координат, то она не является "xyz-проектируемой". Однако формула Стокса верна и в этом случае. Более того, для такой поверхности формула Стокса переходит в формулу Грина. Пусть, например, плоская поверхность P перпендикулярна к оси Oz. Тогда $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$, $\oint\limits_{L} R\,dz = 0$ и из формулы Стокса получаем:

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_P \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \quad (\text{формула Грина}).$$

4. Формула Стокса остаётся в силе, если граница поверхности P состоит из нескольких замкнутых контуров. При этом в левой части формулы нужно написать сумму криволинейных интегралов по всем этим контурам, пробегаемым в положительном направлении.

5. Для запоминания формулы Стокса полезно заметить, что первое слагаемое (под знаком интеграла) в правой части формулы является произведением подынтегральной функции (правой части) формулы Грина на $\cos\gamma$, а два следующих слагаемых получаются из первого циклической перестановкой:

$$\begin{array}{ccc} P \to Q \\ \nwarrow \;\; \swarrow \\ R \end{array}; \quad \begin{array}{ccc} x \to y \\ \nwarrow \;\; \swarrow \\ z \end{array}; \quad \begin{array}{ccc} \alpha \to \beta \\ \nwarrow \;\; \swarrow \\ \gamma \end{array}.$$

§6. Условие независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути интегрирования в пространстве

Пусть G — область в пространстве R^3, т.е. открытое связное множество.

Будем называть область G поверхностно односвязной, если для любого замкнутого контура L, лежащего в области G, существует поверхность, ограниченная контуром L и целиком лежащая в области G.

Примеры. Шар, параллелепипед, область между двумя концентрическими сферами — поверхностно односвязные области; тор не является поверхностно односвязной областью.

Теорема 5. ① Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ определены и непрерывны в области G. Тогда следующие три условия эквивалентны:

1. Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура L, расположенного в области G, справедливо равенство

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

2. Для любых двух точек A и B области G криволинейный интеграл $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависит от пути интегрирования, расположенного в области G.

3. Выражение $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ является полным дифференциалом, т.е. в области G существует функция $u = u(x,y,z)$ такая, что

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

При этом для любой кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в области G, имеет место равенство

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(B) - u(A).$$

② Если область G — поверхностно односвязная, а функции P, Q, R имеют в области G непрерывные частные производные первого порядка, то каждое из условий 1–3 эквивалентно условию

4. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$ во всех точках области G.

Если ввести вектор-функцию $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, то условие 4 можно записать в виде $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

Доказательство утверждений (1) и (2) проводится по той же схеме, что и в аналогичной теореме для криволинейных интегралов на плоскости:

$1 \to 2 \to 3 \to 1$ и $3 \to 4 \to 1$.

Отличие состоит лишь в том, что при доказательстве утверждения $4 \to 1$ нужно воспользоваться не формулой Грина, а формулой Стокса.

Замечание. Функция $u(x,y,z)$ из условия 3 может быть найдена по формуле

$$u(x,y,z) = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)\,dz + C,$$

где (x_0,y_0,z_0) – какая-нибудь фиксированная точка, C – произвольная постоянная, а в качестве кривой интегрирования взята ломаная, отрезки которой параллельны осям координат.