3. Задача о промерзании (задача о фазовом переходе, задача Стефана).

1. Постановка задачи.

Поверхностью раздела является плоскость $x = \xi(t)$ **:**

$$t \to t + \triangle t, \quad \xi = x_1 \to \xi = x_2 = x_1 + \triangle \xi.$$

Затвердевает масса $\rho \triangle \xi$ **(или расплавляется при** $\triangle \xi < 0$ **), выделяется количество тепла** $\lambda \rho \triangle \xi.$

Тепловой баланс:

$$\left[k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x_1} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x_2} \right] \triangle t = \lambda \rho \triangle \xi,$$

Где *К1* и *К2* – коэффициенты теплопроводности первой и второй фазы, λ **- скрытая теплота плавления.**

При $\triangle t \to 0$ **получим условия на границе раздела:**

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} = \lambda \rho \frac{d\xi}{dt}.$$

Процесс замерзания воды – температура фазового перехода равна нулю $t=0 \quad T>0, \quad x=0 \quad T_1<0, \quad x=\xi$ **- граница промерзания.**

Задача о промерзании (задача Стефана):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}=a_1^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & 0<x<\xi, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=a_2^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \xi<x<\infty, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u_1=T_1, & x=0, \\ u_2=T, & t=0, \end{cases} \qquad (2)$$

$$u_1=u_2=0, \quad x=\xi, \qquad (3)$$

$$k_1\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=\xi} - k_2\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=\xi} = \lambda\rho\frac{d\xi}{dt}, \qquad (4)$$

где $k_1,\ a_1^2$ **и** $k_2,\ a_2^2$ **- коэффициенты теплопроводности и температуропроводности твёрдой и жидкой фазы.**

Построение решения задачи (1)-(4).

Ищем решение в виде:

$$u_1 = A_1 + B_1\Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad u_2 = A_2 + B_2\Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),$$

где $\Phi(w) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^w e^{-z^2}dz$ **функция ошибок.**

Из (2),(3) следует: $A_1 = T_1, \quad A_2 + B_2 = T,$

$$A_1 + B_1\Phi\left(\frac{\xi}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0, \quad A_2 + B_2\Phi\left(\frac{\xi}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0 \qquad (5)$$

Условия (5) выполняются при любом *t*, откуда следует: $\xi = \alpha\sqrt{t}, \ (6)$

где α **- некоторая постоянная. Отсюда получаем:**

$$\begin{cases} A_1 = T_1 \qquad B_1 = -\dfrac{T_1}{\Phi\left(\dfrac{\alpha}{a_1}\right)}, \\[2ex] A_2 = -\dfrac{T\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right)}{1-\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right)} \qquad B_2 = -\dfrac{T}{1-\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right)} \end{cases} \qquad (7)$$

- **Для определения α из (4) получаем уравнение:**

$$\frac{k_1 T_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi(\frac{\alpha}{2a_1})} + \frac{k_2 T e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2 \left\{1-\Phi(\frac{\alpha}{2a_2}\right\}} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (8)$$

$$T=0: \quad \begin{cases} A_2 = 0 & B_2 = 0 \\ A_1 = T_1 & B_1 = -\dfrac{T_1}{\Phi(\frac{\alpha}{2a_1})}, \end{cases} \qquad (9)$$

$$\frac{k_1 T_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi(\frac{\alpha}{2a_1})} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (10)$$

- **Положив** $\beta = \frac{\alpha}{2a_1},\ D = \frac{\lambda\rho a_1^2}{k_1 T_1} < 0,$ **из (10) получим:**

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta$$

Метод подобия.

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (11)$$

Уравнение (11) не изменяется при преобразовании переменных:

$$x' = kx, \quad t' = k^2 t \qquad (12)$$

$$u(x,t) = u(kx, kt) \qquad (13)$$

Это означает, что решение задачи зависит от аргумента $\dfrac{x}{\sqrt{t}}$,

то есть, что

$$u(x,t) = f\left(\tfrac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(z), \qquad (14)$$

где $z = \tfrac{x}{2\sqrt{t}}$ (15)

$$(14),(15) \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tfrac{1}{4t}\frac{d^2 f}{dz^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\tfrac{x}{4t^{\frac{3}{2}}}\frac{df}{dz} = -\tfrac{z}{2t}\frac{df}{dz} \qquad (16)$$

$$(11),(16) \Rightarrow \qquad a^2\frac{d^2 f}{dz^2} = -2z\frac{df}{dz} \qquad (17)$$

$$(17) \Rightarrow \; f(z) = A + \bar{B}\int_0^z e^{-\frac{\omega^2}{a^2}} d\omega = A + B\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{z}{a}} e^{-\zeta^2} d\zeta = A + B\Phi\left(\tfrac{z}{a}\right) \qquad (18)$$

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -2z \quad \Rightarrow \quad f' = \bar{B} e^{-\frac{z^2}{a^2}}$$

Движение нулевой изотермы описывается уравнением: $\xi = \alpha\sqrt{t},$

где $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 0.$

$$(1) \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1^2 \dfrac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z \dfrac{df_1}{dz}, & 0 < z < \frac{\alpha}{2}, \\ a_2^2 \dfrac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z \dfrac{df_2}{dz}, & \frac{\alpha}{2} < z < \infty \end{cases} \qquad (19)$$

$$(2) \Rightarrow \qquad f_1(0) = T_1, \quad f_2(\infty) = T \qquad (20)$$

$$(3) \Rightarrow \qquad f_1(\tfrac{\alpha}{2}) = f_2(\tfrac{\alpha}{2}) = 0 \qquad (21)$$

$$(4) \Rightarrow \qquad k_1 f_1'(\tfrac{\alpha}{2}) - k_2 f_2'(\tfrac{\alpha}{2}) = \lambda\rho\alpha \qquad (22)$$

Ищем решение в виде:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = A_1 + B_1\Phi(\frac{z}{a_1}), & 0<z<\frac{\alpha}{2} \\ f_2(z) = A_2 + B_2\Phi(\frac{z}{a_2}), & \frac{\alpha}{2} < z < \infty \end{cases} \qquad (23)$$

Из условий (20) - (22) получаем формулы (7) и (8).