ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

3 курс, 6 семестр

Профессор А.Н.Боголюбов

Гл. 1. Основные понятия и принципы математического моделирования.

1. Математика и математическое моделирование.

Основные этапы метода математического моделирования.

1. Создание качественной модели.

Выясняется характер законов и связей, действующих в системе. В зависимости от природы модели эти законы могут быть физическими, химическими, биологическими, экономическими.

Задача моделирования-выявить главные, характерные черты явления или процесса, его определяющие особенности.

Применительно к исследованию физических явлений создание качественной модели – это формулировка физических закономерностей явления или процесса на основании эксперимента.

2. Создание математической модели (постановка математической задачи).

Если модель описывается некоторыми уравнениями, то она называется детерминированной. Рассмотренные в курсе математической физики начально-краевые задачи являются примерами детерминированных дифференциальных моделей.

Если модель описывается вероятностными законами, то она называется стохастической.

1) Выделение существенных факторов.

Основной принцип: если в системе действует несколько факторов одного порядка, то все они должны быть учтены, или отброшены.

2) Выделение дополнительных условий (начальных, граничных, условий сопряжения и т.п.).

3. Изучение математической модели.

1) <u>Математическое обоснование модели</u>. Исследование внутренней непротиворечивости модели. Обоснование корректности дифференциальной модели. Доказательство теорем существован6ия, единственности и устойчивости решения.

2) <u>Качественное исследование модели.</u> Выяснение поведения модели в крайних и предельных ситуациях.

3) <u>Численное исследование модели</u>. а) Разработка алгоритма. б) Разработка численных методов исследования модели. Разрабатываемые методы должны быть достаточно общими, алгоритмичными и допускающими возможность распараллеливания. в) Создание и реализация программы. Компьютерный эксперимент.

Лабораторный эксперимент	Компьютерный эксперимент
Образец	Математическая модель
Физический прибор	Программа
Калибровка	Тестирование программы
Измерения	Расчеты
Анализ данных	Анализ данных

По сравнению с лабораторным (натурным) экспериментом компьютерный эксперимент дешевле, безопасней, может проводиться в тех случаях, когда натурный эксперимент принципиально невозможен.

4. Получение результатов и их интерпретация.

Сопоставление полученных данных с результатами качественного анализа, натурного эксперимента и данными, полученными с помощью других численных алгоритмов. Уточнение и модификация модели и методов её исследования.

5. использование полученных результатов.

Предсказание новых явлений и закономерностей.

2. Прямые и обратные задачи математического моделирования.

1. Прямая задача: все параметры исследуемой задачи известны и изучается поведение модели в различных условиях.

2. Обратные задачи:

а) Задача распознавания: определение параметров модели путем сопоставления наблюдаемых данных и результатов моделирования. По результатам наблюдений пытаются выяснить, какие процессы управляют поведением объекта и находят определяющие параметры модели. В обратной задаче распознавания требуется определить значение параметров модели по известному поведению системы как целого.

Примеры задач распознавания: -<u>Задача электроразведки:</u> определение подземных структур при помощи измерения на поверхности. -<u>Задача магнитной дефектоскопии:</u> определение дефекта в детали, помещённой между полюсами магнита, по возмущению магнитного поля на поверхности детали.

б) **Задача синтеза (задача математического проектирования):** построение математических моделей систем и устройств, которые должны обладать заданными техническими характеристиками. В отличие от задач распознавания в задачах синтеза отсутствует требование единственности решения («веер решений»). Отсутствие единственности решения позволяет выбрать технологически наиболее приемлемый результат.

Примеры задач синтеза: -Синтез диаграммы направленности антенны: определение распределения токов, создающих заданную диаграмму направленности антенны.-Синтез градиентных световодов: определение профиля функции диэлектрической проницаемости, при котором световод обладает заданными характеристиками.

3. **Задача проектирования управляющих систем:** особая область математического моделирования, связанная с автоматизированными информационными системами и автоматизированными системами управления.

3. Универсальность математических моделей. Принцип аналогий.

Универсальность математических моделей есть отражение принципа материального единства мира. Математическая модель должна описывать не только конкретные отдельные явления или объекты, но достаточно широкий круг разнородных явлений и объектов. Одним из плодотворных подходов к моделированию сложных объектов является использование аналогий с уже изученными явлениями. Пример: процессы колебаний в объектах различной природы.

1. Колебательный электрический контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности. Сопротивление проводов считаем равным нулю, q(t) – заряд на обкладках конденсатора, u(t) –напряжение на обкладках конденсатора, C – ёмкость конденсатора, L – индуктивность катушки, E – э.д.с. самоиндукции, i – ток.

$$Cu(t) = q(t),\ E = -L\frac{di}{dt},\ i = -\frac{dq}{dt},\ u(t) = -E(t) \to$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{C} \to \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

2. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций.

***N(t)*-численность растительноядной популяции 1; *M(t)*- численность плотоядной популяции 2.**

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (a_1 - b_1 M)N, \; a_1 > 0, \; b_1 > 0, \\ \dfrac{dM}{dt} = (-a_2 + b_2 N)M, \; a_2 > 0, \; b_2 > 0. \end{cases}$$

Система находится в равновесии, если $\frac{dN}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0.$ **Линеаризованная система имеет вид:**

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = -b_1 N_0 m \\ \dfrac{dm}{dt} = b_2 M_0 n \end{cases} \rightarrow \; \frac{d^2 n}{dt^2} + a_1 a_2 n = 0, \; n = N - N_0, \; m = M - M_0,$$

где $M_0 = \frac{a_1}{b_1}, \; N_0 = \frac{a_2}{b_2}.$

снова приводит к уравнению колебаний.

3. Простейшая модель изменения зарплаты и занятости: *p(t)* –зарплата, *N(t)*-число занятых работников. Равновесие рынка труда: за плату $p_0>0$ согласны работать $N_0>0$ человек.

Предполагается, что

а) работодатель изменяет зарплату пропорционально отклонению численности занятых работников от равновесного;

б) численность работников изменяется пропорционально изменению зарплаты относительно p_0.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -a_1(N - N_0),\ a_1 > 0, \\ \dfrac{dN}{dt} = a_2(p - p_0),\ a_2 > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем уравнение $$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} + a_1 a_2 (p - p_0) = 0.$$

4. Иерархия моделей.

Принцип «от простого к сложному»: построение цепочки (иерархии) все более полных моделей, каждая их которых обобщает предыдущую, включая её в качестве составного случая.

<u>Модель многоступенчатой ракеты.</u> Пренебрегаем сопротивлением воздуха, гравитацией.

а) <u>Одноступенчатая ракета.</u> *u*=*3-5* км/с – скорость истечения продуктов сгорания топлива (относительно Земли), *V*(*t*) – скорость ракеты (относительно Земли); *m*(*t*) – масса ракеты. Закон сохранения импульса:

$$m(t)V(t) = m(t+dt)V(t+dt) - dm(V(t+\theta dt) - u),\ 0<\theta<1.$$

Линеаризация:

$$m(t+dt) = m(t) + \frac{dm}{dt}dt + O(dt^2) \ \rightarrow\ m\frac{dV}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \ \rightarrow\ \frac{dV}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt} \ \rightarrow$$

$$V(t) = V_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right),\ \ V_0 = V(0),\ m_0 = m(0).$$

Максимальная скорость при полном сгорании топлива и нулевой начальной скорости $V_0=0$ (формула Циолковского):

$$V = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p+m_s}\right).$$

Здесь m_p - полезная масса (масса спутника), m_s – структурная масса (топливных баков, двигателей, систем управления ракетой т.д.). Введем

параметр $\lambda = \frac{m_s}{m_0-m_p}$. **Обычное значение λ = 0.1. При этом**

получается, что при u=3 км/с и и $m_p=0$ $V=7$ км/с. Одноступенчатая ракета не сможет поднять полезный груз!

б) <u>Многоступенчатая ракета:</u> основная идея – избавление от балласта.

m_i - общая масса i-ой ступени; λm_i – структурная масса i- ой ступени;

$(1-\lambda)m_i$ – масса топлива i - ой ступени. Считаем, что λ и u одинаковы

для всех ступеней. Пусть n=3; $m_0=m_p+m_1+m_2+m_3$. По формуле Циолковского скорость равна:

$$V_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}\right).$$

После отброса структурной массы λ m_1 включается вторая ступень. Масса ракеты в этот момент m_p $+m_2$ $+m_3$. После выгорания топлива второй ступени скорость равна

$$V_2 = V_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right),$$

а после отброса структурной массы λ m_2 и включения двигателя третьей ступени равна

$$V_3 = V_2 + u \ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right).$$

При n=3 получим

$$\frac{V_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{a_1}{1+\lambda(a_1-1)}\right)\left(\frac{a_2}{1+\lambda(a_2-1)}\right)\left(\frac{a_3}{1+\lambda(a_3-1)}\right)\right\} = f(a_1, a_2, a_3),$$

где

$$a_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3},\ a_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3},\ a_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}.$$

Максимум функцией $f(a_1,a_2,a_3)$ достигается при $a_1=a_2=a_3=a$. Для n=3 получим:

$$a=\frac{1-\lambda}{p-\lambda},\ p=\exp\left(-\frac{V_3}{3u}\right),\ a_1a_2a_3=a^3=\frac{m_0}{m_p}=\left(\frac{1-\lambda}{p-\lambda}\right)^3.$$

В общем случае для n ступеней имеем:

$$\frac{m_o}{m_p}=\left(\frac{1-\lambda}{p-\lambda}\right)^n,\ p=\exp\left(-\frac{V_n}{nu}\right).$$

При V_n=10,5 км/с, λ=0,1 получаем:

$n=2$	$m_0=149m_p$
$n=3$	$m_0=77m_p$
$n=4$	$m_0=65m_p$

Вывод: наиболее выгодна трехступенчатая ракета.