Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет, кафедра математики

**Вопросы по линейной алгебре, весенний семестр 2008 – 2009 года**

( 1 поток, лектор А. А. Шишкин)

1. Числовые поля. Линейное пространство (**ЛП**). Примеры **ЛП**. Линейная зависимость и линейная независимость элементов **ЛП**.
2. Размерность **ЛП**. Базис **ЛП**. Связь базиса и размерности **ЛП**.
3. Координаты элемента **ЛП**. Преобразование базиса. Преобразование координат элемента **ЛП** при преобразовании базиса. Изоморфизм **ЛП**.
4. Подпространство **ЛП**. Свойства подпространств.
5. Линейная оболочка (**ЛО**) конечного набора элементов **ЛП**. Свойства **ЛО**. **ЛО** столбцов матрицы Теоремы о ранге произведения матриц.
6. Системы линейных уравнений (**СЛУ**). Теорема Кронекера-Капелли. Однородные **СЛУ**. Фундаментальная совокупность решений однородной **СЛУ**.
7. Неоднородные **СЛУ**.
8. Евклидовы и унитарные пространства ( **ЕП** и **УП**). Примеры **ЕП** и **УП**. Метрические свойства **ЕП**. Неравенство Коши-Буняковского.
9. Ортонормированный базис (**ОНБ**) в **ЕП**. Процесс ортогонализации Шмидта. Ортогональное дополнение подпространства **ЕП**. Разложение **ЕП** на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств.
10. Ортогональные и унитарные матрицы.
11. Общий вид линейного функционала. Изоморфизм **ЕП**.
12. Линейный оператор. Примеры. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от одного базиса к другому. Ядро и образ линейного оператора.
13. Действия над линейными операторами и соответствующие действия над матрицами. Теорема о **ЛП** линейных операторов, действующих в данном линейном пространстве над полем К.
14. Присоединенные векторы. Жорданов базис. Жорданова форма матрицы линейного оператора. Теорема о приведении матрицы линейного оператора к жордановой форме (без доказательства).
15. Умножение линейных операторов. Обратный оператор.
16. Инвариантные подпространства линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
17. Сопряжённый линейный оператор в **ЕП**.
18. Симметричный линейный оператор в **ЕП**.
19. Ортогональный линейный оператор в **ЕП**.
20. Сопряжённый линейный оператор в **УП**.
21. Эрмитов линейный оператор в **УП**.
22. Унитарный линейный оператор в **УП**.
23. Квадратичная форма (**КФ**). Матрица **КФ**. Изменение **КФ** при линейном преобразовании переменных.

24. Методы Лагранжа и ортогональных преобразований приведения **КФ** к каноническому виду.
25. Классификация **КФ**. Закон инерции **КФ**. Критерий Сильвестра.
26. Билинейные формы (**БФ**) и их связь с **КФ**. Метод Якоби приведения **КФ** к каноническому виду.
27. Симметричные **БФ**. Канонический базис **БФ**.
28. Приведение общего уравнения второй степени к каноническому виду. Классификация алгебраических уравнений второй степени и кривых второго порядка.
29. Инварианты алгебраического уравнения второй степени. Выражение коэффициентов канонического уравнения кривой второго порядка через его инварианты.
30. Тензоры. Примеры тензоров. Операции над тензорами.
31. Тензоры в **ЕП**. Метрические тензоры. Вычисление координат элемента **ЕП**. Подъём и опускание индексов. Физические примеры тензоров.
32. Группы. Примеры групп. Группа движений. Группа преобразований **ЛП**.
33. Псевдоевклидово пространство. Пространство Минковского. Группа преобразований Лоренца.

**Теоретические задачи, входящие в экзаменационные билеты.**
**Первый поток, 2009 г**

1. Доказать, что в линейном пространстве $H_n^n(K_o)$ подмножество, состоящее из симметричных матриц, т.е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T=A$, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.
2. Доказать, что в линейном пространстве $H_n^n(K_o)$ подмножество, состоящее из антисимметричных матриц, т.е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T=-A$, является подпространством. Найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.
3. Доказать, что линейное пространство $V_3$ представляет собой прямую сумму $P_1$ и $P_2$, где $P_1$ – множество векторов, ортогональных данному ненулевому вектору **b**, а $P_2$ - множество векторов, параллельных вектору **b**.
4. Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве $H_2^2(C)$.
5. Доказать, что однородная система линейных уравнений $AX=\theta$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы A линейно зависимы.
6. Рассматривается линейное пространство $P_{2n}(K_0)$ полиномов степени не выше 2n. Является ли подпространством этого пространства множество всех полиномов p(x), удовлетворяющих условиям: p(-1)=0, p(1)=0? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой-либо базис этого подпространства.

7. Рассматривается линейное пространство R, $\dim R=n\in\mathbf{N}$. Матрица A является матрицей перехода от базиса e к базису f, а матрица B – матрицей перехода от базиса f к базису g. Найти матрицу перехода от базиса g к базису e.

8. Доказать, что в линейном пространстве $H_n^m(K_0)$ можно ввести скалярное произведение элементов X.Y по формуле: $(X,Y)=tr(X^TY)$, где $tr(X^TY)$ – след матрицы $X^TY$.

9.Пусть П – линейное пространство положительных чисел, в котором сумма элементов x,y определяется как произведение xy, а произведение элемента x на вещественное число c – степень $x^c$. Доказать, что в пространстве П любые два элемента x и y линейно зависимы.

10. Доказать, что размерность линейного пространства не меньше размерности любого его подпространства.

11. Доказать, что ранг матрицы равен размерности линейной оболочки её столбцов.

12. Доказать: если линейные пространства R и R* изоморфны , то линейно независимым элементам $x_1,x_2,\dots,x_m \in R$ соответствуют линейно независимые элементы $x_1^*,x_2^*,\dots,x_m^* \in R^*$.

13. В евклидовом пространстве $\mathbf{E}$ с ортонормированным базисом $(e_к)_n$ действует линейный оператор $\hat{A}$. Доказать равенство: $a^k_m=(e_k,\hat{A}e_m)$, $k,m=\overline{1,n}$, где $(a^k_m)^n_n$ - матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $(e_к)_n$.

14. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве $\mathbf{E}$. Доказать, что оператор $\hat{A}$ является ортогональным оператором тогда и только тогда, когда $\|\hat{A}x\|=\|x\|$.

15. Пусть $\hat{A},\hat{B}$ – линейные симметричные операторы, действующие в евклидовом пространстве $\mathbf{E}$. Доказать, что оператор $\hat{A}\hat{B}$ является симметричным тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}$.

16. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве R. Доказать, что сумма двух различных собственных подпространств оператора $\hat{A}$ является инвариантным подпространством оператора $\hat{A}$. Является ли эта сумма собственным подпространством оператора $\hat{A}$? Ответ обоснуйте.

17. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном унитарном пространстве U. Доказать, что $i(\hat{A}-\hat{A}^*)$ – эрмитов оператор.

18. Найти общий вид ортогональной матрицы 2x2.

19. В линейном пространстве $R_3$ в базисе $(e_к)_3$ задана матрица $G=(g_{ij})=$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$$ дважды ковариантного тензора $[G]^0_2$. Доказать, что этот тензор можно трактовать как метрический тензор пространства R.

20. Пусть G – множество, состоящее из чисел 1,i,-1,-i. Доказать, что G абелева группа по умножению четвёртого порядка.

21. В ортонормированном базисе $e_1,e_2$ евклидова пространства элемент $f_1$ имеет координаты 1 и 0, а элемент $f_2$ – координаты $0{,}5\sqrt{3}$ и 0,5. Найти координаты метрического тензора $[G]^0_2$ в базисе $(f_k)_2$.

22. В ОНБ $(e_к)_2$ евклидова пространства элемент $f_1$ имеет координаты 1 и 0, а элемент $f_2$ – координаты $0{,}5\sqrt{3}$ и 0,5. Найти координаты контравариантного тензора $[G]^2_0$ в базисе $(f_k)_2$.

23. Пусть G – множество всех комплексных чисел, по модулю равных 1,а групповая операция есть умножение комплексных чисел. Доказать, что множество G с указанной операцией образует абелеву группу.

24. Доказать: если для любого элемента x группы G выполнено условие $x\circ x=e$, то G – абелева группа.

## Образцы вычислительных задач, входящих в экзаменационные билеты

( 1 поток, 2009 г. )

1. В линейном пространстве $P_2(K_0)$ полиномов степени не выше 2 заданы элементы $x_1(t)=-1+3t+2t^2$, $x_2(t)=2t+3t^2$, $x_3(t)=-1+7t+8t^2$. Найти размерность и базис линейной оболочки $L(x_1,x_2,x_3)$ и разложить указанные элементы по найденному базису.
2. В линейном пространстве $P_2(K_0)$ полиномов степени не выше 2 заданы элементы $x_1(t)=1+t^2$, $x_2(t)=5+2t+3t^2$, $x_3(t)=2+t+t^2$, $x_4(t)=4+t+3t^2$. Найти размерность и базис линейной оболочки $L(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Достроить найденный базис до базиса пространства $P_2(K_0)$.
3. В линейном евклидовом пространстве $E_3$ ( скалярное произведение определяется формулой $(x,y)=x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3$ ) заданы элементы $x_1=(1,1,1)^т$, $x_2=(1,0,0)^т$, $x_3=(0,1,0)^т$. Доказать, что эти элементы линейно независимы и применить к ним процесс ортогонализации Шмидта (без нормировки).
4. В линейном евклидовом пространстве $P_2$ полиномов на сегменте $[-1,1]$ степени не выше 2, где скалярное произведение определяется формулой $(x,y)=\int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$, заданы элементы $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$, $x_3(t)=t^2$. Доказать, что эти элементы линейно независимы и применить к ним процесс ортогонализации Шмидта ( без нормировки).
5. В линейном евклидовом пространстве $E_4$ с ОНБ $(e_к)_4$ заданы столбцы координат элементов $x_1$, $x_2$, $x$ в базисе $(e_к)_4$: $X_1=(1,0,0,1)^т$, $X_2=(1,1,0,0)^т$ , $X=(1,0,0,0)^т$. Найти: проекцию элемента $x$ на линейную оболочку $L(x_1,x_2)$, перпендикуляр элемента $x$ к $L(x_1,x_2)$.
6. В линейном евклидовом пространстве $P_1$ полиномов на сегменте $[-1,1]$ степени не выше 1, где скалярное произведение определяется формулой $(x,y)=\int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)dt$ ,заданы элементы $e_1(t)=1$, $e_2(t)=t$. Доказать, что указанные элементы образуют базис пространства $P_1$. Найти ковариантный метрический тензор в базисе $e_1,e_2$.
7. $\forall p \in K_0$ выполнить задания: а) найти базис линейной оболочки следующих симметричных матриц: $X_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix} -p & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) найти размерность этой линейной оболочки; в) разложить элементы $X_1$, $X_2$, $X_3$ по найденному базису.
8. В линейном пространстве $T_2(K_0)$ заданы элементы: $e_1=(1,2)^т$, $e_2=(2,5)^т$, $e_1^*=(2,1)^т$, $e_2^*=(-1,3)^т$. Доказать: а) элементы $e_1,e_2$ образуют базис пространства $T_2(K_0)$; б) элементы $e_1^*,e_2^*$ образуют базис пространства $T_2(K_0)$; в) найти матрицу перехода от базиса e к базису e*; г) найти матрицу перехода от базиса e* к базису e.

**9.** В линейном евклидовом пространстве $E_2$ с ОНБ $e=(e_1,e_2)$ даны элементы $x=2e_1+e_2$, $y=e_1+3e_2$. Найти нормы элементов x,y и угол между ними. Применить к этим элементам процесс ортогонализации Шмидта.

**10.** В линейном евклидовом пространстве $E_3$ с ОНБ $e_1,e_2,e_3$ подпространство C задано уравнением: $x^1-2x^2+3x^3=0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству C. Ответ обосновать.

**11.** В линейном евклидовом пространстве $T_4$ найти проекцию Y и перпендикуляр Z, опущенный из столбца $X=(2,-5,3,4)^т$ на линейную оболочку L, натянутую на столбцы $X_1=(1,3,3,5)^т$ и $X_2=(1,3,-5,-3)^т$.

**12.** В линейном пространстве $P_1$ всех полиномов на сегменте [0,2] степени не выше 1 задан линейный оператор, действующий по правилу:

$\hat{A}x(t)=\int_0^2 (t-\tau)x(\tau)d\tau$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $e_1(t)=1$, $e_2(t)=t$.

**13.** $A_e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве $R_3(K_0)$, в базисе $e=(e_к)_3$. Матрица перехода от базиса e к базису $e^*=(e_к^*)_3$ имеет вид: $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе e*.

**14.** $A_e=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве $R_3(K_0)$, в базисе $(e_к)_3$ . Найти все собственные значения оператора $\hat{A}$. Для каждого собственного значения найти: алгебраическую кратность собственного значения; базис собственного подпространства; геометрическую кратность собственного значения (размерность собственного подпространства); общий вид собственного вектора.

**15.** $A_e=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$- матрица симметричного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном евклидовом пространстве $E_3$, в ОНБ $e=(e_к)_3$. Найти: ОНБ e* из собственных векторов оператора $\hat{A}$; матрицу перехода от базиса e к базису e*; матрицу перехода от базиса e* к базису e; матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе e*.

**16.** В евклидовом пространстве $E_2$ действует линейный симметричный оператор. Известно, что одна из матриц $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ является матрицей этого оператора в некотором не ортогональном базисе. Установить, какая именно.

**17.** В линейной оболочке L(sin,cos) задан линейный оператор, действующий по правилу: $\hat{A}x(t)=\frac{d^2}{dx^2}x(t)$. Найти: матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе cos, sin; собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

**18.** В линейном пространстве $R_2(K_0)$ с базисом $e_1,e_2$ заданы в этом базисе билинейные формы: $B_1(x,y)=3x^1y^1+2x^1y^2+2x^2y^1+2x^2y^2$, $B_2(x,y)=2x^1y^1+x^1y^2-x^2y^1+3x^2y^2$, $B_3(x,y)=x^1y^1+3x^1y^2+3x^2y^1+4x^2y^2$. Какие из этих билинейных форм можно принять за скалярное произведение в пространстве $R_2(K_0)$, но можно принять за псевдоскалярное произведение в этом пространстве?

**19.** В линейном пространстве $R_2(K_0)$ в базисе $e=(e_1,e_2)$ для каждого $c\in K_0$ задана матрица билинейной формы $B_e=\begin{pmatrix} c & -2c \\ -2c & 4 \end{pmatrix}$. При каком значении c билинейную форму B(x,y) можно принять за скалярное произведение в пространстве $R_2(K_0)$? При каком значении c билинейную форму B(x,y) нельзя принять за скалярное произведение в пространстве $R_2(K_0)$, но можно принять за псевдоскалярное произведение в этом линейном пространстве?

**20.** В линейном пространстве $R_2(K_0)$ в базисе $e=(e_к)_2$ для каждого $c\in K_0$ задана матрица квадратичной формы $X^тAX$ $A=\begin{pmatrix} c & -2c \\ -2c & 4 \end{pmatrix}$. Для каждого значения c исследовать эту квадратичную форму на знакоопределённость и записать её канонический вид.

**21.** В линейном пространстве $R_4(K_0)$ в базисе $e=(e_к)_4$ задана квадратичная форма $X^тAX= x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3$. Найти матрицу этой квадратичной формы в базисе e. Методом Лагранжа привести квадратичную форму к каноническому виду. Найти матрицу квадратичной формы в каноническом базисе e*. Найти матрицу перехода от базиса e к базису e*. Найти матрицу перехода от базиса e* к базису e.

**22.** В евклидовом пространстве $E_3$ в ОНБ $e=(e_к)_3$ задана квадратичная форма $X^тAX=3(x^1)^2-4x^1x^3+(x^2)^2+3(x^3)^2$. Найти: матрицу квадратичной формы в базисе e; ОНБ e*, в котором матрица этой квадратичной формы имеет диагональный вид; матрицу перехода от базиса e к базису e*; матрицу перехода от базиса e* к базису e; матрицу квадратичной формы в базисе e*.

**23.** В линейном пространстве $R_3(K_0)$ в базисе $e==(e_к)_3$ заданы две квадратичные формы $X^тA_1X=2(x^1)^2-6x^1x^2-4x^1x^3+9(x^2)^2+8x^2x^3+2(x^3)^2$ и $X^тA_2X=3(x^1)^2-2x^1x^2-2x^1x^3+5(x^2)^2+4x^2x^3+(x^3)^2$. Найти матрицы этих квадратичных форм в базисе e. Одновременно привести эти квадратичные формы к каноническому виду.

**24.** В евклидовом пространстве $B_2$ с началом отсчёта O и ОНБ $e_1,e_2$ кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2-4x^1x^2+5(x^2)^2+8x^1-2x^2+9=0$. Привести это уравнение к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования базиса и смещения начала отсчёта. Найти матрицу перехода от «старого» базиса к «новому».

**25.** В евклидовом пространстве $B_2$ с началом отсчёта O и ОНБ $e_1,e_2$ кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2-4x^1x^2+5(x^2)^2+8x^1-2x^2+9=0$.

Используя инварианты уравнения $I_1, I_2, I_3$, найти уравнение кривой второго порядка в канонической системе координат.

**Структура экзаменационного билета по линейной алгебре.**

1. Вычислительная задача.
2. Теоретическая задача.
3. Вопрос по теории.
4. Вопрос по теории.