Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Содержание

Обозначения

Логические связки

$\neg A$ — отрицание;
$(A \wedge B)$ — конъюнкция; союз «и»;
$(A \vee B)$ — дизъюнкция; союз «или»;
$(A \implies B)$ — импликация; оборот «если ... , то ... »;
$(A \iff B)$ — эквивалентность.

Кванторы

$\forall x A$ — квантор всеобщности;
$\forall x A B$ — ограниченный квантор всеобщности; $\forall x A B \iff \forall x (A \implies B)$;
$\exists x A$ — квантор существования;
$\exists x A B$ — ограниченный квантор существования; $\exists x A B \iff \exists x (A \wedge B)$;
$\exists ! x A$ — квантор существования и единственности;
$\exists ! x A B$ — ограниченный квантор существования и единственности;

$$\exists ! x A B \iff \exists ! x (A \wedge B);$$

$\varepsilon x A$ — квантор выбора;
$\varepsilon x A B$ — ограниченный квантор выбора; $\varepsilon x A B = \varepsilon x (A \wedge B)$.

Оператор подстановки

$\mathrm{Subst}(A; x_1, \ldots, x_r; \varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ — оператор подстановки.

Множества

$\mathrm{Set}(A)$ — «A — множество»;
$(x \in A)$ — «объект x принадлежит множеству A»;
$\{x \colon A\}$ — множество всех объектов x, удовлетворяющих условию A;
$(A \subseteq B)$ — «A — подмножество множества B»;
$(A \subset B)$ — «A — собственное подмножество множества B»;

$$A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B);$$

$\varnothing$ — пустое множество;
$P(A)$ — множество всех подмножеств множества A;
$\{x_1, \ldots, x_r\}$ — множество, образованное объектами $x_1, \ldots, x_r$;

$$\{x_1, \ldots, x_r\} = \{u \colon u = x_1 \vee \cdots \vee u = x_r\};$$

$(x_1, \ldots, x_r)$ — упорядоченный набор длины r, образованный объектами $x_1, \ldots, x_r$;
$(A \cap B)$ — пересечение множеств A, B;
$(A \cup B)$ — объединение множеств A, B;
$\cup \mu$ — объединение системы множеств μ; $\cup \mu = \big\{x \colon \exists A (A \in \mu \wedge x \in A)\big\}$;
$(A \setminus B)$ — разность множеств A, B;
$(A_1 \times \cdots \times A_r)$ — прямое произведение множеств $A_1, \ldots, A_r$;
(A^r) — прямая степень множества A.

Функции

$\mathrm{D}(F)$ — область определения функции F;
$\mathrm{D}(F, A)$ — полный прообраз множества A под действием функции F;

$\mathrm{R}(F)$ — область значений функции F;

$F[A]$ — образ множества A под действием функции F;

$\{\varphi\}_{x\colon A}$ — функция, область определения которой определяется утверждением A, а значения которой определяются выражением «φ»; $\{\varphi\}_{x\colon A} = F$, где: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \{x\colon A\}$, $\forall x A\bigl(F(x) = \varphi\bigr)$.

$F\colon A \to B$ — «функция F действует из множества A в множество B»; «F — функция, $\mathrm{D}(F) \subseteq A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$»;

$\mathrm{fun}(A, B)$ — множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \to B$;

$F\colon A \implies B$ — «функция F действует из всего множества A в множество B»; «F — функция, $\mathrm{D}(F) = A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$»;

$\mathrm{Fun}(A, B)$ — множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \implies B$;

$F|_A$ — ограничение функции F на множество A;

$F_2 \circ F_1$ — композиция функций F_2, F_1;

F^{-1} — обратная функция к обратимой функции F.

Числа

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;

$\mathbb{Z}_+ = \{k\colon k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 0\}$;

$\mathbb{N} = \{k\colon k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 1\}$;

$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$;

$\overline{\mathbb{Z}}_+ = \{k\colon k \in \overline{\mathbb{Z}} \wedge k \geqslant 0\}$;

$\overline{\mathbb{N}} = \{k\colon k \in \overline{\mathbb{Z}} \wedge k \geqslant 1\}$;

$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;

$\mathbb{Q}_+ = \{x\colon x \in \mathbb{Q} \wedge x \geqslant 0\}$;

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$;

$\overline{\mathbb{Q}}_+ = \{x\colon x \in \overline{\mathbb{Q}} \wedge x \geqslant 0\}$;

$\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+$ — $\{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0\}$;

$\overline{\mathbb{R}}$ — $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$;

$\overline{\mathbb{R}}_+$ — $\{x\colon x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x \geqslant 0\}$;

$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел.

Лекция 1. Комплексные числа (1-й семестр)

1.1. Определение комплексного числа

Будем говорить, что z — ко́мплексное число, если z — упорядоченная пара вещественных чисел. Точнее, будем говорить, что z — ко́мплексное число, если $\exists x \exists y \big(x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z = (x, y) \big)$.

Обозначим через $\mathbb{C}$ множество всех комплексных чисел. Тогда:

$$\mathbb{C} = \Big\{ z \colon \exists x \exists y \big(x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z = (x, y) \big) \Big\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Замечание. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Очевидно: $\exists x \exists y \big(x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z = (x, y) \big)$, $\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 \big(z = (x_1, y_1) \wedge z = (x_2, y_2) \implies x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \big)$.

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Пусть: x, y — некоторые объекты, $z = (x, y)$. Обозначим: $\operatorname{Re}(z) = x$, $\operatorname{Im}(z) = y$. Очевидно, $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что: $\operatorname{Re}(z)$ — вещественная часть числа z, $\operatorname{Im}(z)$ — мнимая часть числа z.

Пусть z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Обозначим, $z_1 + z_2 = \big(\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2), \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) \big)$. Очевидно, $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что $z_1 + z_2$ — сумма чисел z_1, z_2.

Обозначим, $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$. Очевидно, $0_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что $0_{\mathbb{C}}$ — нуль на множестве $\mathbb{C}$.

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим, $-z = \big(-\operatorname{Re}(z), -\operatorname{Im}(z) \big)$. Очевидно, $-z \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что $-z$ — противоположное число к числу z.

Пусть z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Обозначим, $z_1 z_2 = \big(\operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2), \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) \big)$. Очевидно, $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что $z_1 z_2$ — произведение чисел z_1, z_2.

Обозначим, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$. Очевидно, $1_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что $1_{\mathbb{C}}$ — единица на множестве $\mathbb{C}$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0_{\mathbb{C}}$. Обозначим, $z^{-1} = \Big(\frac{\operatorname{Re}(z)}{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}, \frac{-\operatorname{Im}(z)}{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \Big)$. Очевидно, $z^{-1} \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что z^{-1} — обратное число к числу z.

Обозначим, $i = (0, 1)$. Очевидно, $i \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что i — мнимая единица на множестве $\mathbb{C}$.

Обозначим: $\psi(x) = (x, 0)$ при $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, $\psi \colon \mathbb{R} \implies \mathbb{C}$. Будем говорить, что ψ — вложение множества $\mathbb{R}$ в множество $\mathbb{C}$.

Прямая проверка показывает, что справедливы утверждения:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ при z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$;
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ при z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$;
3. $z + 0_{\mathbb{C}} = z$ при $z \in \mathbb{C}$;
4. $z + (-z) = 0_{\mathbb{C}}$ при $z \in \mathbb{C}$;
5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ при z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$;
6. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ при z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$;
7. $1_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$, $z 1_{\mathbb{C}} = z$ при $z \in \mathbb{C}$;
8. $z z^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$ при: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0_{\mathbb{C}}$;
9. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ при z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$;
10. $i i = -1_{\mathbb{C}}$;
11. ψ — обратимая функция, $\psi(x_1 + x_2) = \psi(x_1) + \psi(x_2)$ при x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$; $\psi(x_1 x_2) = \psi(x_1) \psi(x_2)$ при x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$;
12. $z = \psi(\operatorname{Re} z) + i \psi(\operatorname{Im} z)$ при $z \in \mathbb{C}$.

Утверждение.

1. Пусть a, $b \in \mathbb{C}$. Существует единственное число z, удовлетворяющее условиям: $z \in \mathbb{C}$, $a + z = b$.

2. Пусть: a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0_{\mathbb{C}}$. Существует единственное число z, удовлетворяющее условиям: $z \in \mathbb{C}$, $az = b$.

Доказательство.

1. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $a + z = b$. Тогда:

$$\begin{gathered} a + z = b, \\ -a + (a + z) = -a + b, \\ (-a + a) + z = -a + b, \\ \big(a + (-a)\big) + z = -a + b, \\ 0_{\mathbb{C}} + z = -a + b, \\ z + 0_{\mathbb{C}} = -a + b, \\ z = -a + b. \end{gathered}$$

Пусть: $z_1 \in \mathbb{C}$, $a + z_1 = b$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $a + z_2 = b$. Тогда: $z_1 = -a + b$, $z_2 = -a + b$. Следовательно, $z_1 = z_2$.

Пусть $z = -a+b$. Тогда: $z \in \mathbb{C}$, $a+z = a+(-a+b) = \big(a+(-a)\big)+b = 0_{\mathbb{C}}+b = b+0_{\mathbb{C}} = b$.

2. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $az = b$. Тогда:

$$\begin{gathered} az = b, \\ a^{-1}(az) = a^{-1}b, \\ (a^{-1}a)z = a^{-1}b, \\ (aa^{-1})z = a^{-1}b, \\ 1_{\mathbb{C}}z = a^{-1}b, \\ z1_{\mathbb{C}} = a^{-1}b, \\ z = a^{-1}b. \end{gathered}$$

Пусть: $z_1 \in \mathbb{C}$, $az_1 = b$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $az_2 = b$. Тогда: $z_1 = a^{-1}b$, $z_2 = a^{-1}b$. Следовательно, $z_1 = z_2$.

Пусть $z = a^{-1}b$. Тогда: $z \in \mathbb{C}$, $az = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1_{\mathbb{C}}b = b1_{\mathbb{C}} = b$. □

Пусть z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Обозначим, $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Очевидно: $z_1 - z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 + (z_1 - z_2) = z_1$. Будем говорить, что $z_1 - z_2$ — разность чисел z_1, z_2.

Пусть: z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$. Обозначим, $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$. Очевидно: $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$, $z_2 \frac{z_1}{z_2} = z_1$. Будем говорить, что $\frac{z_1}{z_2}$ — отношение чисел z_1, z_2 (частное чисел z_1, z_2).

Утверждение.

1. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда $z0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$.

2. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда $z(-1_{\mathbb{C}}) = -z$.

3. Справедливо утверждение $(-1_{\mathbb{C}})(-1_{\mathbb{C}}) = 1_{\mathbb{C}}$.

4. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0_{\mathbb{C}}$. Тогда: $z^{-1} \neq 0_{\mathbb{C}}$, $(z^{-1})^{-1} = z$.

5. Пусть: z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, z_1, $z_2 \neq 0_{\mathbb{C}}$. Тогда: $z_1 z_2 \neq 0_{\mathbb{C}}$, $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$.

6. Справедливо утверждение $\psi(0) = 0_{\mathbb{C}}$.

7. Справедливо утверждение $\psi(1) = 1_{\mathbb{C}}$.

8. *Справедливо утверждение* $\psi(-1) = -1_{\mathbb{C}}$.
9. *Пусть:* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. *Тогда:* $\psi(x) \neq 0_{\mathbb{C}}$, $\psi(x^{-1}) = \psi(x)^{-1}$.
10. *Пусть* x, $y \in \mathbb{R}$. *Тогда:* $\operatorname{Re}\bigl(\psi(x) + i\psi(y)\bigr) = x$, $\operatorname{Im}\bigl(\psi(x) + i\psi(y)\bigr) = y$.

Доказательство.

4. Предположим, что $z^{-1} = 0_{\mathbb{C}}$. Тогда: $1_{\mathbb{C}} = zz^{-1} = z0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$ (что противоречит утверждению $1_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$). Итак, $z^{-1} \neq 0_{\mathbb{C}}$.

Очевидно, $z^{-1}(z^{-1})^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. С другой стороны: $z^{-1}z = zz^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. Так как $z^{-1} \neq 0_{\mathbb{C}}$, то $(z^{-1})^{-1} = z$.

5. Предположим, что $z_1 z_2 = 0_{\mathbb{C}}$. Очевидно, $z_1 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$. Так как $z_1 \neq 0_{\mathbb{C}}$, то $z_2 = 0_{\mathbb{C}}$ (что противоречит утверждению $z_2 \neq 0_{\mathbb{C}}$). Итак, $z_1 z_2 \neq 0_{\mathbb{C}}$.

Очевидно, $(z_1 z_2)(z_1 z_2)^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. С другой стороны: $(z_1 z_2)(z_1^{-1} z_2^{-1}) = (z_1 z_2)(z_2^{-1} z_1^{-1}) = \bigl(z_1(z_2 z_2^{-1})\bigr)z_1^{-1} = (z_1 1_{\mathbb{C}})z_1^{-1} = z_1 z_1^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. Так как $z_1 z_2 \neq 0_{\mathbb{C}}$, то $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$.

9. Так как $x \neq 0$, то: $\psi(x) \neq \psi(0) = 0_{\mathbb{C}}$. Очевидно: $\psi(x)\psi(x^{-1}) = \psi(xx^{-1}) = \psi(1) = 1_{\mathbb{C}}$. С другой стороны, $\psi(x)\psi(x)^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. Так как $\psi(x) \neq 0_{\mathbb{C}}$, то $\psi(x^{-1}) = \psi(x)^{-1}$. □

Замечание. Пусть $z \in \mathrm{R}(\psi)$. Тогда $z \in \mathbb{C}$. Очевидно, существует число x, удовлетворяющее условиям: $x \in \mathbb{R}$, $z = \psi(x)$. Тогда: $z = \psi(x) = \psi(x) + i\psi(0)$. Следовательно, $\operatorname{Im}(z) = 0$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}(z) = 0$. Тогда: $z = \psi(\operatorname{Re} z) + i\psi(\operatorname{Im} z) = \psi(\operatorname{Re} z) + i\psi(0) = \psi(\operatorname{Re} z) \in \mathrm{R}(\psi)$.

Пусть: $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда: $\psi(x)z = \psi(x)\bigl(\psi(\operatorname{Re} z) + i\psi(\operatorname{Im} z)\bigr) = \psi(x)\psi(\operatorname{Re} z) + i\bigl(\psi(x)\psi(\operatorname{Im} z)\bigr) = \psi\bigl(x\operatorname{Re}(z)\bigr) + i\psi\bigl(x\operatorname{Im}(z)\bigr)$. Следовательно: $\operatorname{Re}\bigl(\psi(x)z\bigr) = x\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}\bigl(\psi(x)z\bigr) = x\operatorname{Im}(z)$.

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим, $\overline{z} = \psi(\operatorname{Re} z) - i\psi(\operatorname{Im} z)$. Очевидно, $\overline{z} \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что $\overline{z}$ — сопряжённое число к числу z.

Утверждение.

1. *Пусть* $z \in \mathbb{C}$. *Тогда* $\operatorname{Re}(z) = 0 \iff \overline{z} = -z$.
2. *Пусть* $z \in \mathbb{C}$. *Тогда* $\operatorname{Im}(z) = 0 \iff \overline{z} = z$.
3. *Пусть* $z \in \mathbb{C}$. *Тогда* $\overline{\overline{z}} = z$.
4. *Пусть* z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. *Тогда* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
5. *Пусть* z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. *Тогда* $\overline{z_1 z_2} = (\overline{z_1})(\overline{z_2})$.
6. *Пусть:* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0_{\mathbb{C}}$. *Тогда:* $\overline{z} \neq 0_{\mathbb{C}}$, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.

Замечание. Далее мы будем отождествлять: числа x, $\psi(x)$, множества $\mathbb{R}$, $\mathrm{R}(\psi)$.

1.2. Модуль и аргумент комплексного числа

Скалярное произведение комплексных чисел

Пусть z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Обозначим, $(z_1, z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)$. Очевидно, $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что (z_1, z_2) — скалярное произведение чисел z_1, z_2.

Утверждение.

1. *Пусть* z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. *Тогда* $(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$.
2. *Пусть* z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$. *Тогда* $(z_1, z_2 + z_3) = (z_1, z_2) + (z_1, z_3)$.
3. *Пусть:* z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда* $(z_1, \lambda z_2) = \lambda(z_1, z_2)$.
4. *Пусть:* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. *Тогда* $(z, z) > 0$.

Замечание. Очевидно: $(0, 0) = (0, 0 \cdot 0) = 0 \cdot (0, 0) = 0$.

Утверждение (неравенство Коши—Буняковского)**.** *Пусть* $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. *Тогда* $\bigl|(z_1, z_2)\bigr| \leqslant \sqrt{(z_1, z_1)}\sqrt{(z_2, z_2)}$.

Доказательство. Пусть $z_2 = 0$. Тогда: $\bigl|(z_1, z_2)\bigr| = 0 = \sqrt{(z_1, z_1)}\sqrt{(z_2, z_2)}$.

Пусть $z_2 \neq 0$. Тогда $(z_2, z_2) > 0$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
(z_1 + \lambda z_2, z_1 + \lambda z_2) \geqslant 0, \\
(z_1, z_1) + (z_1, \lambda z_2) + (\lambda z_2, z_1) + (\lambda z_2, \lambda z_2) \geqslant 0, \\
(z_1, z_1) + (z_1, z_2)\lambda + (z_2, z_1)\lambda + (z_2, z_2)\lambda\lambda \geqslant 0, \\
(z_1, z_1) + 2(z_1, z_2)\lambda + (z_2, z_2)\lambda^2 \geqslant 0.
\end{gathered}$$

В силу произвольности выбора $\lambda \in \mathbb{R}$ получаем, что $4(z_1, z_2)^2 - 4(z_1, z_1)(z_2, z_2) \leqslant 0$. Тогда $\bigl|(z_1, z_2)\bigr| \leqslant \sqrt{(z_1, z_1)}\sqrt{(z_2, z_2)}$. □

Модуль комплексного числа

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим, $|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$. Очевидно, $|z|_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $|z|_{\mathbb{C}}$ — модуль числа z.

Утверждение.

1. *Пусть* $z \in \mathbb{C}$. *Тогда* $|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{(z, z)}$.
2. *Пусть* $x \in \mathbb{R}$. *Тогда* $|x|_{\mathbb{C}} = |x|$.
3. *Справедливо утверждение* $|0|_{\mathbb{C}} = 0$.
4. *Пусть:* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. *Тогда* $|z|_{\mathbb{C}} > 0$.
5. *Пусть* $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. *Тогда* $|z_1 + z_2|_{\mathbb{C}} \leqslant |z_1|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}}$.

Доказательство.

5. Очевидно:

$$\begin{gathered}
|z_1 + z_2|_{\mathbb{C}} = \sqrt{(z_1 + z_2, z_1 + z_2)} = \sqrt{(z_1, z_1) + (z_1, z_2) + (z_2, z_1) + (z_2, z_2)} = \\
= \sqrt{(z_1, z_1) + 2(z_1, z_2) + (z_2, z_2)} \leqslant \sqrt{(z_1, z_1) + 2\bigl|(z_1, z_2)\bigr| + (z_2, z_2)} \leqslant \\
\leqslant \sqrt{(z_1, z_1) + 2\sqrt{(z_1, z_1)}\sqrt{(z_2, z_2)} + (z_2, z_2)} = \sqrt{|z_1|_{\mathbb{C}}^2 + 2\,|z_1|_{\mathbb{C}}\,|z_2|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}}^2} = \\
= \sqrt{\bigl(|z_1|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}}\bigr)^2} = |z_1|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}}. \quad \square
\end{gathered}$$

«Большой аргумент»

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что φ — аргумент числа z, если: $\varphi \in \mathbb{R}$, $z = |z|\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)$.

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим через $\operatorname{Arg}(z)$ множество всех аргументов числа z.

Замечание (выражение для $\operatorname{Arg}(z)$). Пусть $z = 0$. Очевидно, $\operatorname{Arg}(z) = \mathbb{R}$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Очевидно:

$$\begin{gathered}
\operatorname{Arg}(z) = \bigl\{\varphi\colon \varphi \in \mathbb{R} \wedge |z|\cos(\varphi) = \operatorname{Re}(z) \wedge |z|\sin(\varphi) = \operatorname{Im}(z)\bigr\} = \\
= \left\{\varphi\colon \varphi \in \mathbb{R} \wedge \cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \wedge \sin(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\right\}.
\end{gathered}$$

Так как $\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\right)^2 = 1$, то существует число φ_0, удовлетворяющее условию $\varphi_0 \in \mathrm{Arg}(z)$.

Пусть $\varphi_0 \in \mathrm{Arg}(z)$. Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, $\varphi_0 + 2\pi k \in \mathrm{Arg}(z)$. Пусть $\varphi \in \mathrm{Arg}(z)$. Нетрудно доказать, что существует число k, удовлетворяющее условиям: $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$. Очевидно:

$$\mathrm{Arg}(z) = \{\varphi_0 + 2\pi k \colon k \in \mathbb{Z}\} = \big\{\varphi \colon \exists k(k \in \mathbb{Z} \wedge \varphi = \varphi_0 + 2\pi k)\big\}.$$

Замечание (тригонометрическая форма записи комплексного числа). Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathrm{Arg}(z)$. Тогда $z = |z|\,\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)$.

Пусть: $\rho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $z = \rho\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)$. Тогда:

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2} = \sqrt{\big(\rho\cos(\varphi)\big)^2 + \big(\rho\sin(\varphi)\big)^2} = \sqrt{\rho^2} = \rho.$$

Следовательно, $z = |z|\,\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)$. Тогда $\varphi \in \mathrm{Arg}(z)$.

Замечание. Пусть φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\begin{gathered}\big(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\big)\big(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\big) = \\ = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + i\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) = \\ = \big(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\big) + i\big(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\big) = \\ = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2).\end{gathered}$$

Пусть $\varphi \in \mathbb{R}$. Очевидно, $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \neq 0$. Очевидно:

$$\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)^{-1} = 1.$$

С другой стороны:

$$\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)\big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big) = \cos(0) + i\sin(0) = 1.$$

Так как $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \neq 0$, то $\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)^{-1} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$.

Замечание. Пусть: z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $\varphi_1 \in \mathrm{Arg}(z_1)$, $\varphi_2 \in \mathrm{Arg}(z_2)$. Тогда:

$$\begin{gathered}z_1 z_2 = \Big(|z_1|\,\big(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\big)\Big)\Big(|z_2|\,\big(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\big)\Big) = \\ = \big(|z_1| \cdot |z_2|\big)\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).\end{gathered}$$

Следовательно: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathrm{Arg}(z_1 z_2)$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\varphi \in \mathrm{Arg}(z)$. Тогда:

$$z^{-1} = \Big(|z|\,\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)\Big)^{-1} = |z|^{-1}\,\big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big).$$

Следовательно: $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $-\varphi \in \mathrm{Arg}(z^{-1})$.

«Малый аргумент»

Пусть: $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Существует единственное число φ, удовлетворяющее условиям: $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$, $\alpha \leqslant \varphi < \alpha + 2\pi$. Обозначим, $\arg_\alpha(z) = \varphi$.

Пусть: $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = 0$. Обозначим, $\arg_\alpha(z) = \alpha$.

Пусть: $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Существует единственное число φ, удовлетворяющее условиям: $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$, $\alpha < \varphi \leqslant \alpha + 2\pi$. Обозначим, $\arg^*_\alpha(z) = \varphi$.

Пусть: $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = 0$. Обозначим, $\arg^*_\alpha(z) = \alpha + 2\pi$.

Замечание (выражение для $\arg^*_{-\pi}(z)$). Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$. Тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Пусть $\varphi = \arg^*_{-\pi}(z)$. Тогда:

$$\begin{cases} \varphi \in (-\pi, \pi], \\ \cos(\varphi) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin(\varphi) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Пусть $x \neq 0$. Тогда: $\varphi \in \mathbb{R}$, $\cos(\varphi) \neq 0$, $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}$. Следовательно, существует число k, удовлетворяющее условиям: $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\bigl(\frac{y}{x}\bigr) + \pi k$.

1. Пусть $x > 0$. Тогда: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\cos(\varphi) > 0$. Следовательно, $\varphi \in \bigl(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\bigr)$. Тогда $\varphi = \operatorname{arctg}\bigl(\frac{y}{x}\bigr)$.
2. Пусть: $x = 0$, $y > 0$. Тогда: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\cos(\varphi) = 0$, $\sin(\varphi) > 0$. Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
3. Пусть: $x = 0$, $y < 0$. Тогда: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\cos(\varphi) = 0$, $\sin(\varphi) < 0$. Следовательно, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.
4. Пусть: $x < 0$, $y \geqslant 0$. Тогда: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\cos(\varphi) < 0$, $\sin(\varphi) \geqslant 0$. Следовательно, $\varphi \in \bigl(\frac{\pi}{2}, \pi\bigr]$. Тогда $\varphi = \operatorname{arctg}\bigl(\frac{y}{x}\bigr) + \pi$.
5. Пусть: $x < 0$, $y < 0$. Тогда: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\cos(\varphi) < 0$, $\sin(\varphi) < 0$. Следовательно, $\varphi \in \bigl(-\pi, -\frac{\pi}{2}\bigr)$. Тогда $\varphi = \operatorname{arctg}\bigl(\frac{y}{x}\bigr) - \pi$.

Пусть $z = 0$. Тогда: $|z| = 0$, $\arg^*_{-\pi}(z) = \pi$.

1.3. Основные функции комплексной переменной

Комплексная экспонента

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим, $\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp(\operatorname{Re} z)\bigl(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)\bigr)$. Справедливы утверждения:

1. $\exp_{\mathbb{C}}(z_1) \exp_{\mathbb{C}}(z_2) = \exp_{\mathbb{C}}(z_1 + z_2)$ при z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$;
2. $\exp_{\mathbb{C}}(x) = \exp(x)$ при $x \in \mathbb{R}$;
3. $\exp_{\mathbb{C}}(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ (**формула Эйлера**).

Замечание (показательная форма записи комплексного числа). Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$. Тогда: $z = |z| \bigl(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\bigr) = |z| \exp_{\mathbb{C}}(i\varphi)$.

Пусть: $\rho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $z = \rho \cdot \exp_{\mathbb{C}}(i\varphi)$. Тогда: $\rho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $z = \rho\bigl(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\bigr)$. Следовательно: $\rho = |z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$.

Комплексный логарифм

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Обозначим, $\operatorname{Ln}(z) = \bigl\{w \colon w \in \mathbb{C} \wedge \exp_{\mathbb{C}}(w) = z\bigr\}$.

Замечание. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Очевидно:

$$w \in \mathrm{Ln}(z);$$
$$w \in \mathbb{C},\ \exp_{\mathbb{C}}(w) = z;$$
$$\big[\text{замена: } w \in \mathbb{C},\ u = \mathrm{Re}(w),\ v = \mathrm{Im}(w);\ u,\ v \in \mathbb{R},\ w = u + iv\big]$$
$$u,\ v \in \mathbb{R},\ \exp_{\mathbb{C}}(u + iv) = z;$$
$$u,\ v \in \mathbb{R},\ \exp(u)\exp_{\mathbb{C}}(iv) = z;$$
$$\begin{cases} u,\ v \in \mathbb{R}, \\ \exp(u) = |z|, \\ v \in \mathrm{Arg}(z); \end{cases}$$
$$\begin{cases} u = \ln\big(|z|\big), \\ v \in \mathrm{Arg}(z). \end{cases}$$

Комплексные тригонометрические и гиперболические тригонометрические функции

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\exp_{\mathbb{C}}(ix) = \cos(x) + i\sin(x),$$
$$\exp_{\mathbb{C}}(-ix) = \cos(x) - i\sin(x).$$

Следовательно:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\big(\exp_{\mathbb{C}}(ix) + \exp_{\mathbb{C}}(-ix)\big),$$
$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\big(\exp_{\mathbb{C}}(ix) - \exp_{\mathbb{C}}(-ix)\big).$$

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим: $\cos_{\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{2}\big(\exp_{\mathbb{C}}(iz) + \exp_{\mathbb{C}}(-iz)\big)$, $\sin_{\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{2i}\big(\exp_{\mathbb{C}}(iz) - \exp_{\mathbb{C}}(-iz)\big)$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\cos_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$. Обозначим, $\mathrm{tg}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\sin_{\mathbb{C}}(z)}{\cos_{\mathbb{C}}(z)}$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\sin_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$. Обозначим, $\mathrm{ctg}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\cos_{\mathbb{C}}(z)}{\sin_{\mathbb{C}}(z)}$.

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим: $\mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{2}\big(\exp_{\mathbb{C}}(z) + \exp_{\mathbb{C}}(-z)\big)$, $\mathrm{sh}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{2}\big(\exp_{\mathbb{C}}(z) - \exp_{\mathbb{C}}(-z)\big)$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$. Обозначим, $\mathrm{th}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\mathrm{sh}_{\mathbb{C}}(z)}{\mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(z)}$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{sh}_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$. Обозначим, $\mathrm{cth}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\mathrm{ch}_{\mathbb{C}}(z)}{\mathrm{sh}_{\mathbb{C}}(z)}$.

Возведение комплексного числа в целую степень

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим: $z^0 = 1$, $z^1 = z$. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$. Обозначим: $z_1, \ldots, z_n = z$, $z^n = z_1 \cdots z_n$. Справедливы утверждения:

1. $z^{n+1} = z^n z$ при: $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$;
2. $z^{n_1+n_2} = z^{n_1} z^{n_2}$ при: $z \in \mathbb{C}$, n_1, $n_2 \in \mathbb{Z}_+$;
3. $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$ при: z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leqslant -2$. Обозначим, $z^n = (z^{-1})^{-n}$. Справедливы утверждения:

1. $z^{n+1} = z^n z$ при: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$;
2. $z^{n-1} = z^n z^{-1}$ при: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$;
3. $z^{n_1+n_2} = z^{n_1} z^{n_2}$ при: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, n_1, $n_2 \in \mathbb{Z}$;
4. $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$ при: z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, z_1, $z_2 \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Пусть: $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда: $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \neq 0$, $\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ (**формула Муавра**).

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда: $\exp_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$, $\big(\exp_{\mathbb{C}}(z)\big)^n = \exp_{\mathbb{C}}(nz)$.

Возведение комплексного числа в рациональную степень

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим, $\sqrt[n]{z} = \{w \colon w \in \mathbb{C} \wedge w^n = z\}$.

Замечание. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1 \in \operatorname{Arg}(z)$. Тогда:

$$w \in \sqrt[n]{z};$$
$$w \in \mathbb{C},\ w^n = z;$$
$$\big[\text{замена: } w \in \mathbb{C},\ \rho_2 = |w|,\ \varphi_2 \in \operatorname{Arg}(w);\ \rho_2 \in [0, +\infty),\ \varphi_2 \in \mathbb{R},\ w = \rho_2 \exp_{\mathbb{C}}(i\varphi_2)\big]$$
$$\rho_2 \in [0, +\infty),\ \varphi_2 \in \mathbb{R},\ \big(\rho_2 \exp_{\mathbb{C}}(i\varphi_2)\big)^n = z;$$
$$\rho_2 \in [0, +\infty),\ \varphi_2 \in \mathbb{R},\ (\rho_2)^n \exp_{\mathbb{C}}(in\varphi_2) = z;$$
$$\begin{cases} \rho_2 \in [0, +\infty),\ \varphi_2 \in \mathbb{R}, \\ (\rho_2)^n = |z|, \\ n\varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z); \end{cases}$$
$$\begin{cases} \rho_2 \in [0, +\infty),\ \varphi_2 \in \mathbb{R}, \\ (\rho_2)^n = |z|, \\ \exists k \in \mathbb{Z}\big(n\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k\big); \end{cases}$$
$$\begin{cases} \rho_2 = \sqrt[n]{|z|}, \\ \exists k \in \mathbb{Z}\Big(\varphi_2 = \dfrac{\varphi_1}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}\Big). \end{cases}$$

Пусть: $z = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$w \in \sqrt[n]{z};$$
$$w \in \mathbb{C},\ w^n = z;$$
$$w = 0.$$

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $z \neq 0 \vee \alpha \geqslant 0$. Выберем числа m, n, удовлетворяющие условиям: $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, m, n — взаимно простые числа, $\alpha = \frac{m}{n}$. Обозначим, $z^\alpha = \big(\sqrt[n]{z}\big)^m$.

Возведение комплексного числа в комплексную степень

Пусть: z, $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Обозначим, $z^\alpha = \exp_{\mathbb{C}}\big(\alpha \operatorname{Ln}(z)\big)$.

Лекция 2. Линейное пространство (2-й семестр)

2.1. Определение линейного пространства

Определение (линейное пространство). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1\colon M \times M \implies M$, $F_2\colon \mathbb{K} \times M \implies M$. Далее обычно будем писать: «$x + y$» вместо «$F_1(x, y)$»; «λx» вместо «$F_2(\lambda, x)$».

Пусть существует объект $u \in M$, удовлетворяющий условиям:

1. $\forall x \in M \forall y \in M (x + y = y + x)$;
2. $\forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M \big((x + y) + z = x + (y + z)\big)$;
3. $\forall x \in M (x + u = x)$;
4. $\forall x \in M \exists y \in M (x + y = u)$;
5. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall \beta \in \mathbb{K} \forall x \in M \big((\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)\big)$;
6. $\forall x \in M (1x = x)$;
7. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall \beta \in \mathbb{K} \forall x \in M \big((\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x\big)$;
8. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in M \forall y \in M \big(\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y\big)$.

Будем говорить, что: (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; M — носитель пространства (M, F_1, F_2); F_1 — операция сложения пространства (M, F_1, F_2); F_2 — внешняя операция умножения пространства (M, F_1, F_2); F_1, F_2 — линейные операции пространства (M, F_1, F_2). Будем говорить, что x — вектор пространства (M, F_1, F_2), если $x \in M$. Далее обычно будем отождествлять пространство (M, F_1, F_2) и множество M.

Замечание (Внимание! Только для особо интересующихся). Приведённая выше формулировка определения линейного пространства имеет серьёзный недостаток. В этой формулировке слова «существует объект $u \in M$, удовлетворяющий условиям:» не допускают перевода на формальный язык. Дадим более аккуратную формулировку того-же определения (обратите внимание на то, что количество аксиом изменилось).

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1\colon M \times M \implies M$, $F_2\colon \mathbb{K} \times M \implies M$. Далее обычно будем писать: «$x + y$» вместо «$F_1(x, y)$»; «λx» вместо «$F_2(\lambda, x)$».

Пусть:

1. $\forall x \in M \forall y \in M (x + y = y + x)$;
2. $\forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M \big((x + y) + z = x + (y + z)\big)$;
3. $\exists u \in M \big(\forall x \in M (x + u = x) \land \forall x \in M \exists y \in M (x + y = u)\big)$;
4. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall \beta \in \mathbb{K} \forall x \in M \big((\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)\big)$;
5. $\forall x \in M (1x = x)$;
6. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall \beta \in \mathbb{K} \forall x \in M \big((\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x\big)$;
7. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in M \forall y \in M \big(\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y\big)$.

Будем говорить, что: (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; M — носитель пространства (M, F_1, F_2); F_1 — операция сложения пространства (M, F_1, F_2); F_2 — внешняя операция умножения пространства (M, F_1, F_2); F_1, F_2 — линейные операции пространства (M, F_1, F_2). Будем говорить, что x — вектор пространства (M, F_1, F_2), если $x \in M$. Далее обычно будем отождествлять пространство (M, F_1, F_2) и множество M.

Замечание (Внимание! Только для особо интересующихся). Можно доказать (смотри конец настоящей лекции), что первая из приведённых в предыдущем замечании аксиом выводится из остальных. Соответственно, определение линейного пространства можно дать следующим образом.

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1\colon M \times M \implies M$, $F_2\colon \mathbb{K} \times M \implies M$. Далее обычно будем писать: «$x + y$» вместо «$F_1(x, y)$»; «λx» вместо «$F_2(\lambda, x)$».

Пусть:
1. $\forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M\big((x+y)+z = x+(y+z)\big)$;
2. $\exists u \in M\big(\forall x \in M(x+u=x) \wedge \forall x \in M \exists y \in M(x+y=u)\big)$;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall \beta \in \mathbb{K} \forall x \in M\big((\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)\big)$;
4. $\forall x \in M(1x = x)$;
5. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall \beta \in \mathbb{K} \forall x \in M\big((\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x\big)$;
6. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in M \forall y \in M\big(\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y\big)$.

Будем говорить, что: (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; M — носитель пространства (M, F_1, F_2); F_1 — операция сложения пространства (M, F_1, F_2); F_2 — внешняя операция умножения пространства (M, F_1, F_2); F_1, F_2 — линейные операции пространства (M, F_1, F_2). Будем говорить, что x — вектор пространства (M, F_1, F_2), если $x \in M$. Далее обычно будем отождествлять пространство (M, F_1, F_2) и множество M.

Определение (нулевой вектор). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что u — нулевой вектор пространства L, если: $u \in L$, $\forall x \in L(x+u=x)$.

Утверждение (существование и единственность нулевого вектора)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Существует единственный объект* u*, удовлетворяющий условию:* u *— нулевой вектор пространства* L*.*

Доказательство. Так как L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $\forall x \in L(x+u=x)$, $\forall x \in L \exists y \in L(x+y=u)$. Так как: $u \in L$, $\forall x \in L(x+u=x)$, то u — нулевой вектор пространства L.

Пусть: u_1 — нулевой вектор пространства L, u_2 — нулевой вектор пространства L. Тогда: $u_1 \in L$, $\forall x \in L(x+u_1=x)$; $u_2 \in L$, $\forall x \in L(x+u_2=x)$. Так как: $\forall x \in L(x+u_2=x)$, $u_1 \in L$, то $u_1+u_2=u_1$. Так как: $\forall x \in L(x+u_1=x)$, $u_2 \in L$, то $u_2+u_1=u_2$. Тогда: $u_1+u_2=u_2+u_1=u_2$. Следовательно, $u_1=u_2$. □

Определение (обозначение для нулевого вектора). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Обозначим через θ нулевой вектор пространства L.

Утверждение (вспомогательный результат)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* $\forall x \in L \exists y \in L(x+y=\theta)$*.*

Доказательство. Так как L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $\forall x \in L(x+u=x)$, $\forall x \in L \exists y \in L(x+y=u)$. Так как: $u \in L$, $\forall x \in L(x+u=x)$, то u — нулевой вектор пространства L. Так как θ — нулевой вектор пространства L, то $u=\theta$. Так как $\forall x \in L \exists y \in L(x+y=u)$, то $\forall x \in L \exists y \in L(x+y=\theta)$. □

Утверждение («основное уравнение»)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* a*,* $b \in L$*. Существует единственный объект* x*, удовлетворяющий условиям:* $x \in L$*,* $a+x=b$*.*

Доказательство. Так как $a \in L$, то существует вектор $\tilde{a}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{a} \in L$, $a+\tilde{a}=\theta$.

Пусть: $x \in L$, $a+x=b$. Тогда:

$$\tilde{a}+(a+x) = \tilde{a}+b,$$
$$(\tilde{a}+a)+x = \tilde{a}+b,$$

$$(a+\tilde{a})+x=\tilde{a}+b,$$
$$\theta+x=\tilde{a}+b,$$
$$x+\theta=\tilde{a}+b,$$
$$x=\tilde{a}+b.$$

Пусть: $x_1 \in L$, $a+x_1=b$; $x_2 \in L$, $a+x_2=b$. Тогда: $x_1=\tilde{a}+b$, $x_2=\tilde{a}+b$. Следовательно, $x_1=x_2$.

Обозначим, $x=\tilde{a}+b$. Тогда: $x \in L$,

$$a+x=a+(\tilde{a}+b)=(a+\tilde{a})+b=\theta+b=b+\theta=b. \quad \square$$

Утверждение (основные свойства линейных операций)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть* $x \in L$*. Тогда* $0x=\theta$*.*
2. *Пусть* $x \in L$*. Тогда* $x+(-1)x=\theta$*.*
3. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Тогда* $\lambda\theta=\theta$*.*

Доказательство.

1. Очевидно: $0x+0x=(0+0)x=0x$. С другой стороны, $0x+\theta=0x$. Тогда $0x=\theta$.
2. Очевидно: $x+(-1)x=1x+(-1)x=\big(1+(-1)\big)x=0x=\theta$.
3. Очевидно: $\lambda\theta=\lambda(0\theta)=(\lambda 0)\theta=(0\lambda)\theta=0(\lambda\theta)=\theta$. $\square$

Замечание (противоположный вектор). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $x \in L$. Будем говорить, что y — противоположный вектор к вектору x, если: $y \in L$, $x+y=\theta$.

Пусть $x \in L$. Так как $\theta \in L$, то существует единственный объект y, удовлетворяющий условиям: $y \in L$, $x+y=\theta$. Тогда существует единственный объект y, удовлетворяющий условию: y — противоположный вектор к вектору x.

Пусть $x \in L$. Обозначим через $-x$ противоположный вектор к вектору x.

Пусть $x \in L$. Очевидно, $-x=(-1)x$.

Замечание (разность векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $x, y \in L$. Будем говорить, что u — разность векторов x, y, если: $u \in L$, $y+u=x$.

Пусть $x, y \in L$. Очевидно, существует единственный объект u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $y+u=x$. Тогда существует единственный объект u, удовлетворяющий условию: u — разность векторов x, y.

Пусть $x, y \in L$. Обозначим через $x-y$ разность векторов x, y.

Пусть $x, y \in L$. Очевидно, $x-y=-y+x$.

2.2. Примеры линейных пространств

Утверждение (линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* (M,F_1,F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*,* $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$*. Тогда:* $(M, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times M})$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}_0$*,* θ *— нулевой вектор пространства* $(M, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times M})$*.*

Доказательство. Очевидно: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1 \colon M \times M \implies M$, $\theta \in M$.

Очевидно:

$$F_2|_{\mathbb{K}_0 \times M} \text{ — функция,}$$
$$\mathrm{D}(F_2|_{\mathbb{K}_0 \times M}) = (\mathbb{K}_0 \times M) \cap \mathrm{D}(F_2) = (\mathbb{K}_0 \times M) \cap (\mathbb{K} \times M) = \mathbb{K}_0 \times M,$$
$$\mathrm{R}(F_2|_{\mathbb{K}_0 \times M}) = F_2[\mathbb{K}_0 \times M] \subseteq \mathrm{R}(F_2) \subseteq M.$$

Тогда $F_2|_{\mathbb{K}_0 \times M} : \mathbb{K}_0 \times M \implies M$.

Далее обычно будем писать «$\lambda \otimes x$» вместо «$F_2|_{\mathbb{K}_0 \times M}(\lambda, x)$».

1. Пусть x, $y \in M$. Тогда $x + y = y + x$.
2. Пусть x, y, $z \in M$. Тогда $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Пусть $x \in M$. Тогда $x + \theta = x$.
4. Пусть $x \in M$. Тогда $x + (-x) = \theta$.
5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}_0$, $x \in M$. Тогда:

$$(\alpha\beta) \otimes x = (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) = \alpha \otimes (\beta \otimes x).$$

6. Пусть $x \in M$. Тогда:

$$1 \otimes x = 1x = x.$$

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}_0$, $x \in M$. Тогда:

$$(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x = \alpha \otimes x + \beta \otimes x.$$

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}_0$, x, $y \in M$. Тогда:

$$\lambda \otimes (x + y) = \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y = \lambda \otimes x + \lambda \otimes y.$$

Очевидно: $(M, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times M})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, θ — нулевой вектор пространства $(M, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times M})$. □

Определение (векторная функция). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть: φ — функция, $\mathrm{R}(\varphi) \subseteq L$. Будем говорить, что φ — векторная функция.

Определение (ядро векторной функции). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть: φ — функция, $\mathrm{R}(\varphi) \subseteq L$. Обозначим:

$$\ker(\varphi) = \bigl\{x \colon x \in \mathrm{D}(\varphi) \wedge \varphi(x) = \theta\bigr\}.$$

Будем говорить, что $\ker(\varphi)$ — ядро функции φ (множество корней функции φ; множество нулей функции φ). Очевидно:

$$\ker(\varphi) = \bigl\{x \colon x \in \mathrm{D}(\varphi) \wedge \varphi(x) = \theta\bigr\} = \bigl\{x \colon x \in \mathrm{D}(\varphi) \wedge \varphi(x) \in \{\theta\}\bigr\} = \mathrm{D}\bigl(\varphi, \{\theta\}\bigr).$$

Определение. Пусть: Q — множество, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим множество $\mathrm{Fun}(Q, L)$ (напоминание: $\mathrm{Fun}(Q, L)$ — множество всех функций φ, удовлетворяющих условию $\varphi \colon Q \implies L$).

Пусть φ_1, $\varphi_2 \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Обозначим:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad x \in Q.$$

Тогда $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Обозначим: $F_1(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 + \varphi_2$ при φ_1, $\varphi_2 \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Тогда $F_1\colon \mathrm{Fun}(Q, L) \times \mathrm{Fun}(Q, L) \implies \mathrm{Fun}(Q, L)$. Будем говорить, что F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathrm{Fun}(Q, L)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Обозначим:

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x), \quad x \in Q.$$

Тогда $\lambda\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Обозначим: $F_2(\lambda, \varphi) = \lambda\varphi$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Тогда $F_2\colon \mathbb{K} \times \mathrm{Fun}(Q, L) \implies \mathrm{Fun}(Q, L)$. Будем говорить, что F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathrm{Fun}(Q, L)$.

Обозначим:

$$\Theta(x) = \theta, \quad x \in Q.$$

Тогда $\Theta \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Будем говорить, что Θ — стандартный нулевой элемент на множестве $\mathrm{Fun}(Q, L)$.

Утверждение (линейное пространство векторных функций)**.** *Пусть: Q — множество, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F_1 — стандартная операция сложения на множестве* $\mathrm{Fun}(Q, L)$, *F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве* $\mathrm{Fun}(Q, L)$, *Θ — стандартный нулевой элемент на множестве* $\mathrm{Fun}(Q, L)$. *Тогда: $\big(\mathrm{Fun}(Q, L), F_1, F_2\big)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, Θ — нулевой вектор пространства $\big(\mathrm{Fun}(Q, L), F_1, F_2\big)$.*

Доказательство. Очевидно: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $\mathrm{Fun}(Q, L)$ — множество, $\Theta \in \mathrm{Fun}(Q, L)$,

$$F_1\colon \mathrm{Fun}(Q, L) \times \mathrm{Fun}(Q, L) \implies \mathrm{Fun}(Q, L),$$
$$F_2\colon \mathbb{K} \times \mathrm{Fun}(Q, L) \implies \mathrm{Fun}(Q, L).$$

1. Пусть φ_1, $\varphi_2 \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varphi_2(x) + \varphi_1(x) = (\varphi_2 + \varphi_1)(x).$$

Следовательно, $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1$.

2. Пусть φ_1, φ_2, $\varphi_3 \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big((\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3\big)(x) = \big(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\big) + \varphi_3(x) = \varphi_1(x) + \big(\varphi_2(x) + \varphi_3(x)\big) =$$
$$= \big(\varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)\big)(x).$$

Следовательно, $(\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3 = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)$.

3. Пусть $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$(\varphi + \Theta)(x) = \varphi(x) + \Theta(x) = \varphi(x) + \theta = \varphi(x).$$

Следовательно, $\varphi + \Theta = \varphi$.

4. Пусть $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big(\varphi + (-1)\varphi\big)(x) = \varphi(x) + (-1)\varphi(x) = \theta = \Theta(x).$$

Следовательно, $\varphi + (-1)\varphi = \Theta$.

5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)\varphi\big)(x) = (\alpha\beta)\varphi(x) = \alpha\big(\beta\varphi(x)\big) = \big(\alpha(\beta\varphi)\big)(x).$$

Следовательно, $(\alpha\beta)\varphi = \alpha(\beta\varphi)$.

6. Пусть $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big(1\varphi\big)(x) = 1\varphi(x) = \varphi(x).$$

Следовательно, $1\varphi = \varphi$.

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big((\alpha+\beta)\varphi\big)(x) = (\alpha+\beta)\varphi(x) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x) = \big(\alpha\varphi + \beta\varphi\big)(x).$$

Следовательно, $(\alpha+\beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, φ_1, $\varphi_2 \in \mathrm{Fun}(Q, L)$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big(\lambda(\varphi_1 + \varphi_2)\big)(x) = \lambda\big(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\big) = \lambda\varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x) = \big(\lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2\big)(x).$$

Следовательно, $\lambda(\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2$.

Очевидно: $\big(\mathrm{Fun}(Q, L), F_1, F_2\big)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, Θ — нулевой вектор пространства $\big(\mathrm{Fun}(Q, L), F_1, F_2\big)$. □

Определение. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Рассмотрим множество $\mathbb{K}$.

Обозначим: $F_1(x, y) = x + y$ при x, $y \in \mathbb{K}$. Тогда $F_1\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \implies \mathbb{K}$. Будем говорить, что F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}$.

Обозначим: $F_2(\lambda, x) = \lambda x$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}$. Тогда $F_2\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \implies \mathbb{K}$. Будем говорить, что F_2 — стандартная операция умножения на множестве $\mathbb{K}$.

Замечание. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

Очевидно, $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$.

Пусть x, $y \in \mathbb{K}^1$. Тогда $x + y = (x^1 + y^1)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^1$. Тогда $\lambda x = (\lambda x^1)$.

Обозначим, $\tilde{\theta} = 0$. Тогда $\tilde{\theta} = (0)$.

Утверждение (линейное пространство $\mathbb{K}$)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* F_1 *— стандартная операция сложения на множестве* $\mathbb{K}$*,* F_2 *— стандартная операция умножения на множестве* $\mathbb{K}$*. Тогда:* $(\mathbb{K}, F_1, F_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* 0 *— нулевой вектор пространства* $(\mathbb{K}, F_1, F_2)$*.*

Доказательство. Очевидно: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $\mathbb{K}$ — множество, $F_1\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \implies \mathbb{K}$, $F_2\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \implies \mathbb{K}$, $0 \in \mathbb{K}$.

1. Пусть x, $y \in \mathbb{K}$. Тогда $x + y = y + x$.
2. Пусть x, y, $z \in \mathbb{K}$. Тогда $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Пусть $x \in \mathbb{K}$. Тогда $x + 0 = x$.
4. Пусть $x \in \mathbb{K}$. Тогда $x + (-x) = 0$.
5. Пусть α, β, $x \in \mathbb{K}$. Тогда $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
6. Пусть $x \in \mathbb{K}$. Тогда $1x = x$.
7. Пусть α, β, $x \in \mathbb{K}$. Тогда $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8. Пусть λ, x, $y \in \mathbb{K}$. Тогда $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Очевидно: $(\mathbb{K}, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, 0 — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}, F_1, F_2)$. □

Замечание (линейное пространство $\mathbb{K}(\mathbb{K}_0)$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}$, F_2 — стандартная операция умножения на множестве $\mathbb{K}$.

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$. Тогда: $(\mathbb{K}, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times \mathbb{K}})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, 0 — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times \mathbb{K}})$. Обозначим, $\mathbb{K}(\mathbb{K}_0) = (\mathbb{K}, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times \mathbb{K}})$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$. Рассмотрим множество $\mathbb{K}^N$.

Пусть x, $y \in \mathbb{K}^N$. Обозначим:

$$x + y = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^N + y^N \end{pmatrix}.$$

Тогда $x + y \in \mathbb{K}^N$. Обозначим: $F_1(x, y) = x + y$ при x, $y \in \mathbb{K}^N$. Тогда $F_1 \colon \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \implies \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^N$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^N$. Обозначим:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \vdots \\ \lambda x^N \end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda x \in \mathbb{K}^N$. Обозначим: $F_2(\lambda, x) = \lambda x$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^N$. Тогда $F_2 \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K}^N \implies \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^N$.

Обозначим:

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\tilde{\theta} \in \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что $\tilde{\theta}$ — стандартный нулевой элемент на множестве $\mathbb{K}^N$.

Утверждение (линейное пространство $\mathbb{K}^N$)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; F_1 *— стандартная операция сложения на множестве* $\mathbb{K}^N$, F_2 *— стандартная внешняя операция умножения на множестве* $\mathbb{K}^N$, $\tilde{\theta}$ *— стандартный нулевой элемент на множестве* $\mathbb{K}^N$. *Тогда:* $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $\tilde{\theta}$ *— нулевой вектор пространства* $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$.

Доказательство. Очевидно: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $\mathbb{K}^N$ — множество, $F_1 \colon \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \implies \mathbb{K}^N$, $F_2 \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K}^N \implies \mathbb{K}^N$, $\tilde{\theta} \in \mathbb{K}^N$.

1. Пусть x, $y \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(x + y)^j = x^j + y^j = y^j + x^j = (y + x)^j.$$

Следовательно, $x + y = y + x$.

2. Пусть x, y, $z \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((x + y) + z\big)^j = (x^j + y^j) + z^j = x^j + (y^j + z^j) = \big(x + (y + z)\big)^j.$$

Следовательно, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3. Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(x + \tilde{\theta})^j = x^j + \tilde{\theta}^j = x^j + 0 = x^j.$$

Следовательно, $x + \tilde{\theta} = x$.

4. Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl(x + (-1)x\bigr)^j = x^j + (-1)x^j = 0 = \tilde{\theta}^j.$$

Следовательно, $x + (-1)x = \tilde{\theta}$.

5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl((\alpha\beta)x\bigr)^j = (\alpha\beta)x^j = \alpha(\beta x^j) = \bigl(\alpha(\beta x)\bigr)^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(1x)^j = 1x^j = x^j.$$

Следовательно, $1x = x$.

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl((\alpha + \beta)x\bigr)^j = (\alpha + \beta)x^j = \alpha x^j + \beta x^j = (\alpha x + \beta x)^j.$$

Следовательно, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl(\lambda(x + y)\bigr)^j = \lambda(x^j + y^j) = \lambda x^j + \lambda y^j = (\lambda x + \lambda y)^j.$$

Следовательно, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Очевидно: $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\tilde{\theta}$ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$. $\square$

Замечание (линейное пространство $\mathbb{K}^N(\mathbb{K}_0)$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^N$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^N$, $\tilde{\theta}$ — стандартный нулевой элемент на множестве $\mathbb{K}^N$.

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$. Тогда: $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times \mathbb{K}^N})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, $\tilde{\theta}$ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times \mathbb{K}^N})$. Обозначим, $\mathbb{K}^N(\mathbb{K}_0) = (\mathbb{K}^N, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times \mathbb{K}^N})$.

Определение (что такое матрица). Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$.

1. Будем говорить, что A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец, если:

$$A \text{ — функция},$$
$$\mathrm{D}(A) = \{1, \ldots, N_2\} \times \{1, \ldots, N_1\}.$$

2. Пусть A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец. Далее часто будем писать «A_i^j» вместо «$A(j, i)$».

3. Пусть A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец. Далее часто будем писать «$A_{j,i}$» вместо «$A(j, i)$».

4. Пусть A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец. Далее часто будем писать «$A^{j,i}$» вместо «$A(j,i)$».

5. Пусть $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{N_1}^1, \ldots, \alpha_1^{N_2}, \ldots, \alpha_{N_1}^{N_2}$ — некоторые объекты. Выберем функцию A, удовлетворяющую условиям:

$$\mathrm{D}(A) = \{1, \ldots, N_2\} \times \{1, \ldots, N_1\},$$
$$\forall j = \overline{1, N_2} \forall i = \overline{1, N_1} \big(A(j,i) = \alpha_i^j\big).$$

Обозначим:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_{N_1}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{N_2} & \cdots & \alpha_{N_1}^{N_2} \end{pmatrix} = A.$$

6. Пусть Q — множество. Будем говорить, что A — матрица с элементами из множества Q, имеющая N_2 строки и N_1 столбец, если:

$$A\colon \{1, \ldots, N_2\} \times \{1, \ldots, N_1\} \implies Q.$$

7. Пусть Q — множество. Обозначим через $Q^{N_2 \times N_1}$ множество всех матриц с элементами из множества Q, имеющих N_2 строки и N_1 столбец.

Определение. Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец.

Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Обозначим:

$$A_i = \begin{pmatrix} A_i^1 \\ \vdots \\ A_i^{N_2} \end{pmatrix}.$$

Пусть $j = \overline{1, N_2}$. Обозначим:

$$A^j = \begin{pmatrix} A_1^j & \cdots & A_{N_1}^j \end{pmatrix}.$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть A, $B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Тогда $A + B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим: $F_1(A,B) = A + B$ при A, $B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $F_1\colon \mathbb{K}^{N_2 \times N_1} \times \mathbb{K}^{N_2 \times N_1} \implies \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(\lambda A)_i^j = \lambda A_i^j, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Тогда $\lambda A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим: $F_2(\lambda, A) = \lambda A$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $F_2\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{N_2 \times N_1} \implies \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Обозначим:

$$\tilde{\Theta}_i^j = 0, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Тогда $\tilde{\Theta} \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $\tilde{\Theta}$ — стандартный нулевой элемент на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Утверждение (линейное пространство $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$)**.** *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2\in\mathbb{N}$; F_1 — *стандартная операция сложения на множестве* $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, F_2 — *стандартная внешняя операция умножения на множестве* $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $\tilde{\Theta}$ — *стандартный нулевой элемент на множестве* $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. *Тогда:* $(\mathbb{K}^{N_2\times N_1},F_1,F_2)$ — *линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $\tilde{\Theta}$ — *нулевой вектор пространства* $(\mathbb{K}^{N_2\times N_1},F_1,F_2)$.

Доказательство. Очевидно: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$ — множество, $\tilde{\Theta}\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$,

$$F_1\colon \mathbb{K}^{N_2\times N_1}\times\mathbb{K}^{N_2\times N_1}\implies\mathbb{K}^{N_2\times N_1},$$
$$F_2\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}^{N_2\times N_1}\implies\mathbb{K}^{N_2\times N_1}.$$

1. Пусть A, $B\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(A+B)_i^j=A_i^j+B_i^j=B_i^j+A_i^j=(B+A)_i^j.$$

Следовательно, $A+B=B+A$.

2. Пусть A, B, $C\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big((A+B)+C\big)_i^j=(A_i^j+B_i^j)+C_i^j=A_i^j+(B_i^j+C_i^j)=\big(A+(B+C)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. Пусть $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(A+\Theta)_i^j=A_i^j+\Theta_i^j=A_i^j+0=A_i^j.$$

Следовательно, $A+\Theta=A$.

4. Пусть $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big(A+(-1)A\big)_i^j=A_i^j+(-1)A_i^j=0=\Theta_i^j.$$

Следовательно, $A+(-1)A=\Theta$.

5. Пусть: α, $\beta\in\mathbb{K}$, $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)A\big)_i^j=(\alpha\beta)A_i^j=\alpha(\beta A_i^j)=\big(\alpha(\beta A)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

6. Пусть $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(1A)_i^j=1A_i^j=A_i^j.$$

Следовательно, $1A=A$.

7. Пусть: α, $\beta\in\mathbb{K}$, $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big((\alpha+\beta)A\big)_i^j=(\alpha+\beta)A_i^j=\alpha A_i^j+\beta A_i^j=(\alpha A+\beta A)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

8. Пусть: $\lambda\in\mathbb{K}$, A, $B\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big(\lambda(A+B)\big)_i^j=\lambda(A_i^j+B_i^j)=\lambda A_i^j+\lambda B_i^j=(\lambda A+\lambda B)_i^j.$$

Следовательно, $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

Очевидно: $(\mathbb{K}^{N_2\times N_1}, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\tilde{\Theta}$ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^{N_2\times N_1}, F_1, F_2)$. □

Замечание (линейное пространство $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}(\mathbb{K}_0)$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $\tilde{\Theta}$ — стандартный нулевой элемент на множестве $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$.

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$. Тогда: $(\mathbb{K}^{N_2\times N_1}, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0\times\mathbb{K}^{N_2\times N_1}})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, $\tilde{\Theta}$ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^{N_2\times N_1}, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0\times\mathbb{K}^{N_2\times N_1}})$. Обозначим, $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}(\mathbb{K}_0) = (\mathbb{K}^{N_2\times N_1}, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0\times\mathbb{K}^{N_2\times N_1}})$.

2.3. Подпространство линейного пространства

Определение (подпространство линейного пространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что Q — подпространство пространства L, если:

1. $Q \subseteq L$;
2. $Q \neq \varnothing$;
3. $\forall x \in Q \forall y \in Q (x + y \in Q)$;
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in Q (\lambda x \in Q)$.

Замечание (простейшие примеры). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Очевидно: $\{\theta\}$ — подпространство пространства L; L — подпространство пространства L.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; Q *— подпространство пространства* L. *Тогда* $\theta \in Q$.

Доказательство. Так как Q — подпространство пространства L, то существует вектор x, удовлетворяющий условию $x \in Q$. Так как Q — подпространство пространства L, то: $\theta = 0x \in Q$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$.

Пусть Q *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2). *Тогда:* $Q \subseteq M$, $(Q, F_1|_{Q\times Q}, F_2|_{\mathbb{K}\times Q})$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, θ *— нулевой вектор пространства* $(Q, F_1|_{Q\times Q}, F_2|_{\mathbb{K}\times Q})$.

Доказательство. Так как Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то $Q \subseteq M$. Очевидно: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — множество, $\theta \in Q$.

Очевидно:

$$F_1|_{Q\times Q} \text{ — функция,}$$
$$\mathrm{D}(F_1|_{Q\times Q}) = (Q \times Q) \cap \mathrm{D}(F_1) = (Q \times Q) \cap (M \times M) = Q \times Q.$$

Пусть $x, y \in Q$. Так как Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $F_1|_{Q\times Q}(x, y) = F_1(x, y) \in Q$. Тогда $\mathrm{R}(F_1|_{Q\times Q}) \subseteq Q$. Итак, $F_1|_{Q\times Q} : Q \times Q \implies Q$.

Очевидно:

$$F_2|_{\mathbb{K}\times Q} \text{ — функция,}$$

$$\mathrm{D}(F_2|_{\mathbb{K}\times Q}) = (\mathbb{K}\times Q)\cap \mathrm{D}(F_2) = (\mathbb{K}\times Q)\cap(\mathbb{K}\times M) = \mathbb{K}\times Q.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Так как Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $F_2|_{\mathbb{K}\times Q}(\lambda, x) = F_2(\lambda, x) \in Q$. Тогда $\mathrm{R}(F_2|_{\mathbb{K}\times Q}) \subseteq Q$. Итак, $F_2|_{\mathbb{K}\times Q} : \mathbb{K}\times Q \implies Q$.

Далее обычно будем писать: «$x \oplus y$» вместо «$F_1|_{Q\times Q}(x,y)$»; «$\lambda \otimes x$» вместо «$F_2|_{\mathbb{K}\times Q}(\lambda, x)$».

1. Пусть x, $y \in Q$. Тогда:

$$x \oplus y = x + y = y + x = y \oplus x.$$

2. Пусть x, y, $z \in Q$. Тогда:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \oplus (y \oplus z).$$

3. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$x \oplus \theta = x + \theta = x.$$

4. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$x \oplus (-1) \otimes x = x + (-1)x = \theta.$$

5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Тогда:

$$(\alpha\beta) \otimes x = (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) = \alpha \otimes (\beta \otimes x).$$

6. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$1 \otimes x = 1x = x.$$

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Тогда:

$$(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x = \alpha \otimes x \oplus \beta \otimes x.$$

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in Q$. Тогда:

$$\lambda \otimes (x \oplus y) = \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y = \lambda \otimes x \oplus \lambda \otimes y.$$

Очевидно: $(Q, F_1|_{Q\times Q}, F_2|_{\mathbb{K}\times Q})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, θ — нулевой вектор пространства $(Q, F_1|_{Q\times Q}, F_2|_{\mathbb{K}\times Q})$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

Пусть: $Q \subseteq M$*,* $(Q, F_1|_{Q\times Q}, F_2|_{\mathbb{K}\times Q})$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* Q *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*.*

Доказательство. По условию, $Q \subseteq M$. Так как $(Q, F_1|_{Q\times Q}, F_2|_{\mathbb{K}\times Q})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то $Q \neq \varnothing$. Далее обычно будем писать: «$x \oplus y$» вместо «$F_1|_{Q\times Q}(x, y)$»; «$\lambda \otimes x$» вместо «$F_2|_{\mathbb{K}\times Q}(\lambda, x)$».

Пусть x, $y \in Q$. Так как $(Q, F_1|_{Q\times Q}, F_2|_{\mathbb{K}\times Q})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то: $x + y = x \oplus y \in Q$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Так как $(Q, F_1|_{Q\times Q}, F_2|_{\mathbb{K}\times Q})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то: $\lambda x = \lambda \otimes x \in Q$.

Итак, Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2). □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*.*

Пусть Q_2 *— подпространство пространства* $(Q_1, F_1|_{Q_1 \times Q_1}, F_2|_{\mathbb{K} \times Q_1})$*. Тогда:* $Q_2 \subseteq Q_1$*,* Q_2 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*.*

Доказательство. Так как Q_1 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то $Q_1 \subseteq M$. Так как Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, F_1|_{Q_1 \times Q_1}, F_2|_{\mathbb{K} \times Q_1})$, то: $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_2 \neq \varnothing$. Так как: $Q_1 \subseteq M$, $Q_2 \subseteq Q_1$, то $Q_2 \subseteq M$. Далее обычно будем писать: «$x \oplus y$» вместо «$F_1|_{Q_1 \times Q_1}(x, y)$»; «$\lambda \otimes x$» вместо «$F_2|_{\mathbb{K} \times Q_1}(\lambda, x)$».

Пусть $x, y \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, F_1|_{Q_1 \times Q_1}, F_2|_{\mathbb{K} \times Q_1})$, то: $x + y = x \oplus y \in Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, F_1|_{Q_1 \times Q_1}, F_2|_{\mathbb{K} \times Q_1})$, то: $\lambda x = \lambda \otimes x \in Q_2$.

Итак: $Q_2 \subseteq Q_1$, Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2). □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*.*

Пусть: $Q_2 \subseteq Q_1$*,* Q_2 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*. Тогда* Q_2 *— подпространство пространства* $(Q_1, F_1|_{Q_1 \times Q_1}, F_2|_{\mathbb{K} \times Q_1})$*.*

Доказательство. По условию, $Q_2 \subseteq Q_1$. Так как Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то $Q_2 \neq \varnothing$. Далее обычно будем писать: «$x \oplus y$» вместо «$F_1|_{Q_1 \times Q_1}(x, y)$»; «$\lambda \otimes x$ вместо $F_2|_{\mathbb{K} \times Q_1}(\lambda, x)$».

Пусть $x, y \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $x \oplus y = x + y \in Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $\lambda \otimes x = \lambda x \in Q_2$.

Итак, Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, F_1|_{Q_1 \times Q_1}, F_2|_{\mathbb{K} \times Q_1})$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*. Тогда* $Q_1 \cap Q_2$ *— подпространство пространства* L*.*

Доказательство. Так как $Q_1 \subseteq L$, то: $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_1 \subseteq L$. Так как: $\theta \in Q_1$, $\theta \in Q_2$, то $\theta \in Q_1 \cap Q_2$.

Пусть: $x_1 \in Q_1 \cap Q_2$, $x_2 \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: $x_1 \in Q_1$, $x_1 \in Q_2$; $x_2 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in Q_1$, $x_1 + x_2 \in Q_2$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q_1 \cap Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$; $x \in Q_1$, $x \in Q_2$. Следовательно: $\lambda x \in Q_1$, $\lambda x \in Q_2$. Тогда $\lambda x \in Q_1 \cap Q_2$.

Итак, $Q_1 \cap Q_2$ — подпространство пространства L. □

Утверждение (Внимание! Только для особо интересующихся)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* I *— множество,* $I \neq \varnothing$*,* Q_α *— подпространство пространства* L *при* $\alpha \in I$*. Тогда* $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$ *— подпространство пространства* L*.*

Доказательство. Так как $I \neq \varnothing$, то существует объект α_0, удовлетворяющий условию $\alpha_0 \in I$. Так как $Q_{\alpha_0} \subseteq L$, то: $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha \subseteq Q_{\alpha_0} \subseteq L$. Так как: $\theta \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$, то $\theta \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$.

Пусть $x_1 \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$, $x_2 \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$. Тогда: $x_1 \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$; $x_2 \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Тогда $x_1 + x_2 \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$; $x \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Следовательно: $\lambda x \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Тогда $\lambda x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$.

Итак, $\bigcap\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$ — подпространство пространства L. □

2.4. Линейная зависимость векторов

Определение (линейная комбинация векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$.

Будем говорить, что u — линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_r$ с коэффициентами $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, если $u = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda^k x_k$.

Далее часто будем писать «$\lambda^k x_k$» вместо «$\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda^k x_k$» (частный случай **правила суммирования Эйнштейна**).

Определение (линейная оболочка векторов, линейная зависимость векторов, линейная независимость векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$.

Обозначим:

$$L(x_1, \ldots, x_r) = \{\lambda^k x_k \colon \lambda^1 \in \mathbb{K} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{K}\} =$$
$$= \big\{u \colon \exists \lambda^1 \cdots \exists \lambda^r (\lambda^1 \in \mathbb{K} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{K} \wedge u = \lambda^k x_k)\big\}.$$

Очевидно, $L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq L$. Будем говорить, что $L(x_1, \ldots, x_r)$ — линейная оболочка векторов $x_1, \ldots, x_r$.

Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы, если существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$.

Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, если для любых чисел $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющих условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k x_k = \theta$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\lambda^k = 0)$.

Будем говорить, что по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, если для любых чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r$, удовлетворяющих условиям: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{K}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\alpha^k = \beta^k)$.

Определение (символ Кронекера). Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим: $\delta_k^m = 0$ при: $k, m = \overline{1, r}$, $k \neq m$; $\delta_k^m = 1$ при: $k, m = \overline{1, r}$, $k = m$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда: $x_k = \delta_k^m x_m \in L(x_1, \ldots, x_r)$.

Пусть: Q — подпространство пространства L, $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in Q$. Очевидно, $L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq Q$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$. *Тогда* $L(x_1, \ldots, x_r)$ *— подпространство пространства* L.

Доказательство. Очевидно: $L(x_1, \dots, x_r) \subseteq L$, $0x_1 + \dots + 0x_r \in L(x_1, \dots, x_r)$.

Пусть u, $v \in L(x_1, \dots, x_r)$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $u = \alpha^k x_k$, $v = \beta^k x_k$. Следовательно:

$$u + v = (\alpha^k x_k) + (\beta^k x_k) = (\alpha^k + \beta^k) x_k \in L(x_1, \dots, x_r).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in L(x_1, \dots, x_r)$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u = \alpha^k x_k$. Следовательно:

$$\lambda u = \lambda(\alpha^k x_k) = (\lambda \alpha^k) x_k \in L(x_1, \dots, x_r).$$

Итак, $L(x_1, \dots, x_r)$ — подпространство пространства L. □

Утверждение (критерий линейной зависимости векторов)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — *линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$.

1. *Пусть:* $x \in L$, x — *линейно зависимый вектор. Тогда* $x = \theta$.
2. *Пусть* $x = \theta$. *Тогда:* $x \in L$, x — *линейно зависимый вектор.*
3. *Пусть:* $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $x_1, \dots, x_r \in L$. *Векторы* $x_1, \dots, x_r$ *являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда существует номер* $k_0 = \overline{1, r}$, *удовлетворяющий условию* $x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r)$.

Доказательство.

1. Так как: $x \in L$, x — линейно зависимый вектор, то существует число $\lambda \in \mathbb{K}$, удовлетворяющее условиям: $\lambda x = \theta$, $\lambda \neq 0$. Тогда $x = \theta$.

2. Так как $x = \theta$, то: $x \in L$, $1x = \theta$. Так как $1 \neq 0$, то: $x \in L$, x — линейно зависимый вектор.

3. Пусть $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^N \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$. Выберем номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $\lambda^{k_0} \neq 0$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0} x_{k_0} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \dots + \lambda^r x_r = \theta,$$
$$x_{k_0} = \frac{-\lambda^1}{\lambda_{k_0}} x_1 + \dots + \frac{-\lambda^{k_0-1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0-1} + \frac{-\lambda^{k_0+1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0+1} + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda_{k_0}} x_r,$$
$$x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r).$$

Пусть существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{k_0-1}$, $\lambda^{k_0+1}, \dots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию:

$$x_{k_0} = \lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \dots + \lambda^r x_r.$$

Следовательно:

$$(-\lambda^1) x_1 + \dots + (-\lambda^{k_0-1}) x_{k_0-1} + 1 x_{k_0} + (-\lambda^{k_0+1}) x_{k_0+1} + \dots + (-\lambda^r) x_r = \theta.$$

Так как $1 \neq 0$, то $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение (критерий линейной независимости векторов)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — *линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r \in L$. *Векторы* $x_1, \dots, x_r$ *являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда по любой линейной комбинации векторов* $x_1, \dots, x_r$ *однозначно восстанавливаются её коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы. Пусть: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{K}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$. Тогда $(\alpha^k - \beta^k) x_k = \theta$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, то $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k - \beta^k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k = \beta^k)$. Следовательно, по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.

Пусть по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k x_k = \theta$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^r x_r = 0 x_1 + \cdots + 0 x_r.$$

Так как по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, то $\forall k = \overline{1, r}(\lambda^k = 0)$. Тогда $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы. □

Замечание (перестановки произвольного множества). Пусть M — множество. Будем говорить, что σ — перестановка множества M, если: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Обозначим через $S(M)$ множество всех перестановок множества M.

Пусть σ_1, $\sigma_2 \in S(M)$. Обозначим, $\sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Очевидно, $\sigma_2 \sigma_1 \in S(M)$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно, $\sigma^{-1} \in S(M)$.

Обозначим: $e(x) = x$ при $x \in M$. Очевидно, $e \in S(M)$.

1. Пусть σ_1, σ_2, $\sigma_3 \in S(M)$. Очевидно, $(\sigma_3 \sigma_2) \sigma_1 = \sigma_3 (\sigma_2 \sigma_1)$.
2. Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma e = \sigma$, $e \sigma = \sigma$.
3. Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma \sigma^{-1} = e$, $\sigma^{-1} \sigma = e$.

Замечание (перестановки конечного множества). Пусть M — конечное множество.

Пусть: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$. Так как: $\mathrm{D}(\sigma)$ — конечное множество, σ — обратимая функция, то: $\mathrm{R}(\sigma)$ — конечное множество, $\operatorname{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) = \operatorname{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big)$. Тогда: $\operatorname{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) = \operatorname{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big) = \operatorname{card}(M)$. Так как: M — конечное множество, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$, то $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma \in S(M)$.

Пусть: σ — функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Предположим, что σ — необратимая функция. Так как $\mathrm{D}(\sigma)$ — конечное множество, то: $\mathrm{R}(\sigma)$ — конечное множество, $\operatorname{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) < \operatorname{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big)$. Тогда: $\operatorname{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) < \operatorname{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big) = \operatorname{card}(M)$ (что противоречит утверждению $\mathrm{R}(\sigma) = M$). Итак, σ — обратимая функция. Тогда $\sigma \in S(M)$.

Замечание (перестановки множеств: $\varnothing$, $\{1, \ldots, r\}$). Обозначим, $S_0 = S(\varnothing)$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим, $S_r = S\big(\{1, \ldots, r\}\big)$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — некоторые объекты. Обозначим через σ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, r\}$, $\sigma(1) = x_1, \ldots, \sigma(r) = x_r$. Тогда: σ — функция, $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, r\}$, $\mathrm{R}(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Далее часто будем отождествлять упорядоченную r-ку $(x_1, \ldots, x_r)$ и функцию σ.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \{1, \ldots, r\}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — различные числа. Обозначим через σ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, r\}$, $\sigma(1) = \alpha_1, \ldots, \sigma(r) = \alpha_r$. Тогда: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, r\}$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq \{1, \ldots, r\}$. Следовательно, $\sigma \in S_r$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$*. Пусть:* $\sigma \in S_r$, $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_{\sigma(1)} + \cdots + \lambda^r x_{\sigma(r)} = \theta$, $\exists m = \overline{1, r}(\lambda^m \neq$

0). Тогда:

$$\lambda^{\sigma^{-1}(1)}x_1 + \dots + \lambda^{\sigma^{-1}(r)}x_r = \theta, \quad \exists k = \overline{1, r}(\lambda^{\sigma^{-1}(k)} \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \dots, x_r \in L$*. Пусть:* $r_0 \in \mathbb{N}$*,* $k_1, \dots, k_{r_0} = \overline{1, r}$*,* $k_1 < \dots < k_{r_0}$*,* $x_{k_1}, \dots, x_{k_{r_0}}$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x_1, \dots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $x_{k_1}, \dots, x_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\alpha^1, \dots, \alpha^{r_0} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1 x_{k_1} + \dots + \alpha^{r_0} x_{k_{r_0}} = \theta$, $\exists m = \overline{1, r_0}(\alpha^m \neq 0)$. Обозначим: $\beta^{k_1} = \alpha^1, \dots, \beta^{k_{r_0}} = \alpha^{r_0}$, $\beta^k = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \dots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\beta^{k_1}x_{k_1} + \dots + \beta^{k_{r_0}}x_{k_{r_0}} = \theta, \quad \exists m = \overline{1, r_0}(\beta^{k_m} \neq 0);$$
$$\beta^1 x_1 + \dots + \beta^r x_r = \theta, \quad \exists k = \overline{1, r}(\beta^k \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \dots, x_r, x \in L$*,* $x_1, \dots, x_r$ *— линейно независимые векторы,* $x_1, \dots, x_r, x$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x \in L(x_1, \dots, x_r)$*.*

Доказательство. Так как $x_1, \dots, x_r, x$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r + \lambda^{r+1} x = \theta$, $\exists k = \overline{1, r+1}(\lambda^k \neq 0)$. Предположим, что $\lambda^{r+1} = 0$. Тогда: $\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r = \theta$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$ (что противоречит утверждению: $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые векторы). Итак, $\lambda^{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$x = \frac{-\lambda^1}{\lambda^{r+1}}x_1 + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda^{r+1}}x_r,$$
$$x \in L(x_1, \dots, x_r). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \dots, x_r \in L$*. Пусть:* $r_0 \in \mathbb{N}$*,* $k_1, \dots, k_{r_0} = \overline{1, r}$*,* $k_1 < \dots < k_{r_0}$*,* $r_0 \neq r$*,* $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq L(x_{k_1}, \dots, x_{k_{r_0}})$*. Тогда* $x_1, \dots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Очевидно: $\{1, \dots, r\}$ — конечное множество, $\operatorname{card}(\{1, \dots, r\}) = r$; $\{k_1, \dots, k_{r_0}\}$ — конечное множество, $\operatorname{card}(\{k_1, \dots, k_{r_0}\}) = r_0$.

Так как $\{k_1, \dots, k_{r_0}\} \subseteq \{1, \dots, r\}$, то $r_0 \leqslant r$. Так как $r_0 \neq r$, то $r_0 < r$.

Так как $r_0 \neq r$, то $\{k_1, \dots, k_{r_0}\} \neq \{1, \dots, r\}$. Так как $\{k_1, \dots, k_{r_0}\} \subseteq \{1, \dots, r\}$, то существует число k, удовлетворяющее условиям: $k \in \{1, \dots, r\}$, $k \notin \{k_1, \dots, k_{r_0}\}$. Тогда: $k = \overline{1, r}$, $k \neq k_1, \dots, k \neq k_{r_0}$. Следовательно: $k = \overline{1, r}$, $k_1 \neq k, \dots, k_{r_0} \neq k$. Так как $k_1, \dots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, то: $k = \overline{1, r}$, $k_1, \dots, k_{r_0} \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, r\}$. Тогда: $k = \overline{1, r}$, $x_k \in L(x_{k_1}, \dots, x_{k_{r_0}}) \subseteq L(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_r)$. Следовательно, $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. $\square$

2.5. Внимание! Только для особо интересующихся. Экономное определение линейного пространства

Определение (линейное пространство). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1\colon M \times M \implies M$, $F_2\colon \mathbb{K} \times M \implies M$. Далее обычно будем писать: «$x + y$» вместо «$F_1(x, y)$»; «λx» вместо «$F_2(\lambda, x)$».

Пусть:

1. $\forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M\bigl((x + y) + z = x + (y + z)\bigr)$;
2. $\exists u \in M\bigl(\forall x \in M(x + u = x) \land \forall x \in M \exists y \in M(x + y = u)\bigr)$;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall \beta \in \mathbb{K} \forall x \in M\bigl((\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)\bigr)$;
4. $\forall x \in M(1x = x)$;
5. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall \beta \in \mathbb{K} \forall x \in M\bigl((\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x\bigr)$;
6. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in M \forall y \in M\bigl(\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y\bigr)$.

Будем говорить, что: (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; M — носитель пространства (M, F_1, F_2); F_1 — операция сложения пространства (M, F_1, F_2); F_2 — внешняя операция умножения пространства (M, F_1, F_2); F_1, F_2 — линейные операции пространства (M, F_1, F_2). Будем говорить, что x — вектор пространства (M, F_1, F_2), если $x \in M$. Далее обычно будем отождествлять пространство (M, F_1, F_2) и множество M.

Утверждение (вспомогательный результат №1). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $u \in L$, $\forall x \in L(x + u = x)$, $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = u)$. *Тогда* $\forall x \in L \forall y \in L(x + y = u \implies y + x = u)$.

Доказательство. Пусть: $x \in L$, $y \in L$, $x + y = u$. Так как: $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = u)$, $y \in L$, то существует вектор z, удовлетворяющий условиям: $z \in L$, $y + z = u$. Тогда:

$$y + x = (y + x) + u = (y + x) + (y + z) = \bigl((y + x) + y\bigr) + z = \bigl(y + (x + y)\bigr) + z = \\ = (y + u) + z = y + z = u. \quad \square$$

Утверждение (вспомогательный результат №2). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $u \in L$, $\forall x \in L(x + u = x)$, $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = u)$. *Тогда* $\forall x \in L(u + x = x)$.

Доказательство. Пусть $x \in L$. Так как $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = u)$, то существует вектор y, удовлетворяющий условиям: $y \in L$, $x + y = u$. Тогда:

$$u + x = (x + y) + x = x + (y + x) = x + u = x. \quad \square$$

Утверждение («основное уравнение»). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* a, $b \in L$. *Существует единственный объект* x*, удовлетворяющий условиям:* $x \in L$, $a + x = b$.

Доказательство. Так как L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $\forall x \in L(x + u = x)$, $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = u)$. Так как: $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = u)$, $a \in L$, то существует вектор $\tilde{a}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{a} \in L$, $a + \tilde{a} = u$.

Пусть: $x \in L$, $a + x = b$. Тогда:

$$\tilde{a} + (a + x) = \tilde{a} + b,$$
$$(\tilde{a} + a) + x = \tilde{a} + b,$$

$$u + x = \tilde{a} + b,$$
$$x = \tilde{a} + b.$$

Пусть: $x_1 \in L$, $a+x_1 = b$; $x_2 \in L$, $a+x_2 = b$. Тогда: $x_1 = \tilde{a}+b$, $x_2 = \tilde{a}+b$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Обозначим, $x = \tilde{a} + b$. Тогда: $x \in L$,

$$a + x = a + (\tilde{a} + b) = (a + \tilde{a}) + b = u + b = b. \quad \square$$

Определение (нулевой вектор). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что u — нулевой вектор пространства L, если: $u \in L$, $\forall x \in L(x + u = x)$.

Утверждение (существование и единственность нулевого вектора). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Существует единственный объект* u*, удовлетворяющий условию:* u *— нулевой вектор пространства* L*.*

Доказательство. Так как L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $\forall x \in L(x + u = x)$, $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = u)$. Так как: $u \in L$, $\forall x \in L(x + u = x)$, то u — нулевой вектор пространства L.

Пусть: u_1 — нулевой вектор пространства L, u_2 — нулевой вектор пространства L. Тогда: $u_1 \in L$, $\forall x \in L(x + u_1 = x)$; $u_2 \in L$, $\forall x \in L(x + u_2 = x)$. Так как: $\forall x \in L(x + u_1 = x)$, $u_1 \in L$, то $u_1 + u_1 = u_1$. Так как: $\forall x \in L(x + u_2 = x)$, $u_1 \in L$, то $u_1 + u_2 = u_1$. Тогда $u_1 = u_2$. $\square$

Определение (обозначение для нулевого вектора). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Обозначим через θ нулевой вектор пространства L.

Утверждение (основные свойства линейных операций). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть* $x \in L$*. Тогда* $0x = \theta$*.*
2. *Пусть* $x \in L$*. Тогда* $(-1)x + x = \theta$*.*
3. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Тогда* $\lambda\theta = \theta$*.*

Доказательство.

1. Очевидно: $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$. С другой стороны, $0x + \theta = 0x$. Тогда $0x = \theta$.
2. Очевидно: $(-1)x + x = (-1)x + 1x = (-1 + 1)x = 0x = \theta$.
3. Очевидно: $\lambda\theta = \lambda(0\theta) = (\lambda 0)\theta = (0\lambda)\theta = 0(\lambda\theta) = \theta$. $\square$

Утверждение (коммутативность сложения). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* $\forall x \in L \forall y \in L(x + y = y + x)$*.*

Доказательство. Пусть x, $y \in L$. Тогда $(-1)(x + y) + (x + y) = \theta$. С другой стороны:

$$(-1)(x + y) + (y + x) = \big((-1)x + (-1)y\big) + (y + x) = \Big(\big((-1)x + (-1)y\big) + y\Big) + x =$$
$$= \Big((-1)x + \big((-1)y + y\big)\Big) + x = \big((-1)x + \theta\big) + x = (-1)x + x = \theta.$$

Тогда $x + y = y + x$. $\square$

Замечание (противоположный вектор). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $x \in L$. Будем говорить, что y — противоположный вектор к вектору x, если: $y \in L$, $x + y = \theta$.

Пусть $x \in L$. Так как $\theta \in L$, то существует единственный объект y, удовлетворяющий условиям: $y \in L$, $x + y = \theta$. Тогда существует единственный объект y, удовлетворяющий условию: y — противоположный вектор к вектору x.

Пусть $x \in L$. Обозначим через $-x$ противоположный вектор к вектору x.

Пусть $x \in L$. Очевидно, $-x = (-1)x$.

Замечание (разность векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть x, $y \in L$. Будем говорить, что u — разность векторов x, y, если: $u \in L$, $y + u = x$.

Пусть x, $y \in L$. Очевидно, существует единственный объект u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $y + u = x$. Тогда существует единственный объект u, удовлетворяющий условию: u — разность векторов x, y.

Пусть x, $y \in L$. Обозначим через $x - y$ разность векторов x, y.

Пусть x, $y \in L$. Очевидно, $x - y = -y + x$.

Лекция 3. Базис и размерность (начало; 2-й семестр)

3.1. Базис множества векторов

Определение (базис множества векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, $Q \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$. Будем говорить, что $(e_1, \ldots, e_r)$ — базис множества Q длины r.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in L$, $x_1, \ldots, x_N$ — линейно независимые векторы. Очевидно, $(x_1, \ldots, x_N)$ — базис множества $\{x_1, \ldots, x_N\}$ длины N.

Пусть: $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in L$, $x_1, \ldots, x_N$ — линейно независимые векторы. Очевидно, $(x_1, \ldots, x_N)$ — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_N)$ длины N.

Пусть: Q — подпространство пространства L, e — базис подпространства Q длины r. Очевидно: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, $Q = L(e_1, \ldots, e_r)$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in L$.*

1. Пусть e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_N\}$ длины r. Тогда: e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_N)$ длины r; $e_1, \ldots, e_r \in \{x_1, \ldots, x_N\}$.

2. Пусть: e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_N)$ длины r; $e_1, \ldots, e_r \in \{x_1, \ldots, x_N\}$. Тогда e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_N\}$ длины r.

Доказательство.

1. Так как e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_N\}$ длины r, то: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_r \in \{x_1, \ldots, x_N\}$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, $\{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$.

Очевидно: $e_1, \ldots, e_r \in \{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq L(x_1, \ldots, x_N)$. Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_N)$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^N \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u = \alpha^k x_k$. Пусть $k = \overline{1, N}$. Так как: $x_k \in \{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$, то существуют числа $\beta_k^1, \ldots, \beta_k^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x_k = \beta_k^m e_m$. Тогда:

$$u = \alpha^k x_k = \alpha^k (\beta_k^m e_m) = (\beta_k^m \alpha^k) e_m \in L(e_1, \ldots, e_r).$$

Итак: e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_N)$ длины r; $e_1, \ldots, e_r \in \{x_1, \ldots, x_N\}$.

2. Так как e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_N)$ длины r, то: $r \in \mathbb{N}$, e — упорядоченная r-ка, $e_1, \ldots, e_r \in L(x_1, \ldots, x_N)$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, $L(x_1, \ldots, x_N) \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$.

По условию, $e_1, \ldots, e_r \in \{x_1, \ldots, x_N\}$. Очевидно: $\{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq L(x_1, \ldots, x_N) \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$. Итак, e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_N\}$ длины r. $\square$

Замечание (координаты вектора). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства L, e — базис подпространства Q длины N.

Пусть $x \in Q$. Будем говорить, что $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e, если: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $x = \tilde{x}^k e_k$.

Пусть $x \in Q$. Очевидно, существует единственный столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условию: $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e.

Пусть $x \in Q$. Обозначим через $[x](e)$ столбец координат вектора x в базисе e.

Обозначим: $h_e(x) = [x](e)$ при $x \in Q$. Очевидно: h_e — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_e) = Q$, $\mathrm{R}(h_e) = \mathbb{K}^N$; $h_e^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{x}^k e_k$ при $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что h_e — линейная координатная карта (линейная система координат) в подпространстве Q, соответствующая базису e. Пусть $x \in Q$. Будем говорить, что $h_e(x)$ — столбец координат вектора x в координатной карте h_e.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q *— подпространство пространства* L*,* e *— базис подпространства* Q *длины* N*.*

1. Пусть x*,* $y \in Q$*. Тогда* $[x+y](e) = [x](e) + [y](e)$*.*

2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $x \in Q$*. Тогда* $[\lambda x](e) = \lambda [x](e)$*.*

3. Справедливо утверждение: $[\theta](e) = \tilde{\theta}$ *(здесь* $\tilde{\theta}$ *— нулевой вектор пространства* $\mathbb{K}^N$*).*

4. Справедливо утверждение: $[e_k]^m(e) = \delta_k^m$ *при* k*,* $m = \overline{1,r}$*.*

5. Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in Q$*;* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $[x_1](e), \ldots, [x_r](e)$ *— линейно зависимые столбцы.*

6. Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in Q$*;* $[x_1](e), \ldots, [x_r](e)$ *— линейно зависимые столбцы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство.

1. Очевидно: $[x](e) + [y](e) \in \mathbb{K}^N$,

$$x + y = [x]^k(e)e_k + [y]^k(e)e_k = \big([x]^k(e) + [y]^k(e)\big)e_k = \big([x](e) + [y](e)\big)^k e_k.$$

Тогда $[x+y](e) = [x](e) + [y](e)$.

2. Очевидно: $\lambda[x](e) \in \mathbb{K}^N$,

$$\lambda x = \lambda\big([x]^k(e)e_k\big) = \big(\lambda[x]^k(e)\big)e_k = \big(\lambda[x](e)\big)^k e_k.$$

Тогда $[\lambda x](e) = \lambda[x](e)$.

3. Очевидно: $\tilde{\theta} \in \mathbb{K}^N$, $\theta = \tilde{\theta}^k e_k$. Тогда $[\theta](e) = \tilde{\theta}$.

4. Пусть $k = \overline{1,N}$. Очевидно, $e_k = [e_k]^m(e)e_m$. С другой стороны, $e_k = \delta_k^m e_m$. Тогда: $[e_k]^m(e) = \delta_k^m$ при $m = \overline{1,N}$.

5. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$. Так как $\lambda^k x_k = \theta$, то:

$$\lambda^k[x_k](e) = [\lambda^k x_k](e) = [\theta](e) = \tilde{\theta}.$$

Так как $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$, то $[x_1](e), \ldots, [x_r](e)$ — линейно зависимые столбцы.

6. Так как $[x_1](e), \ldots, [x_r](e)$ — линейно зависимые столбцы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k[x_k](e) = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$. Так как $\lambda^k[x_k](e) = \tilde{\theta}$, то:

$$\lambda^k x_k = \big([\lambda^k x_k](e)\big)^m e_m = \big(\lambda^k[x_k](e)\big)^m e_m = \tilde{\theta}^m e_m = \theta.$$

Так как $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$, то $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_N$ *— некоторые объекты,* $x_1, \ldots, x_N$ *— различные объекты,* $Q = \{x_1, \ldots, x_N\}$*. Фиксируем номер* $k = \overline{1,N}$*. Обозначим:* $e_k(x) = 0$ *при:* $x \in Q$*,* $x \neq x_k$*;* $e_k(x) = 1$ *при* $x = x_k$*.*

1. Справедливо утверждение: e *— базис пространства* $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$ *длины* N*.*

2. Пусть $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$*. Тогда:* $[\varphi]^k(e) = \varphi(x_k)$ *при* $k = \overline{1,N}$*.*

Доказательство.

1. Очевидно: $N \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_N \in \mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$.

Вспомогательное утверждение. Пусть k, $m = \overline{1, N}$. Так как $x_1, \ldots, x_N$ — различные объекты, то $e_k(x_m) = \delta_k^m$.

Вспомогательное утверждение. Пусть $\lambda^1, \ldots, \lambda^N \in \mathbb{K}$. Пусть $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(\lambda^k e_k)(x_m) = \lambda^k e_k(x_m) = \lambda^k \delta_k^m = \lambda^m.$$

Вспомогательное утверждение. Пусть $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$. Пусть $x \in Q$. Тогда существует номер $m = \overline{1, N}$, удовлетворяющий условию $x = x_m$. Следовательно:

$$\Big(\sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k) e_k\Big)(x) = \Big(\sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k) e_k\Big)(x_m) = \varphi(x_m) = \varphi(x).$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{N} \varphi(x_k) e_k = \varphi$.

Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^N \in \mathbb{K}$, $\lambda^k e_k = \Theta$ (здесь Θ — нулевой вектор пространства $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$). Пусть $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(\lambda^k e_k)(x_m) = \Theta(x_m),$$
$$\lambda^m = 0.$$

Следовательно, $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$. Тогда: $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi(x_k) e_k \in L(e_1, \ldots, e_N)$. Итак, e — базис пространства $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$ длины N.

2. Очевидно, $\varphi = [\varphi]^k(e) e_k$. С другой стороны, $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi(x_k) e_k$. Тогда: $[\varphi]^k(e) = \varphi(x_k)$ при $k = \overline{1, N}$. □

Замечание (простейший базис пространства $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N$ — некоторые объекты, $x_1, \ldots, x_N$ — различные объекты, $Q = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Фиксируем номер $k = \overline{1, N}$. Обозначим: $e_k(x) = 0$ при: $x \in Q$, $x \neq x_k$; $e_k(x) = 1$ при $x = x_k$. Тогда e — базис пространства $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$ длины N. Будем говорить, что e — простейший базис пространства $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$. Тогда: $[\varphi]^k(e) = \varphi(x_k)$ при $k = \overline{1, N}$.

Замечание (простейший базис пространства $\mathbb{K}^N$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$. Обозначим: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e_N = (0, \ldots, 0, 1)^T$. Тогда e — базис пространства $\mathbb{K}^N$ длины N. Будем говорить, что e — простейший базис пространства $\mathbb{K}^N$.

Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Тогда: $[x]^k(e) = x^k$ при $k = \overline{1, N}$. Следовательно, $[x](e) = x$.

Замечание (простейший базис пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Обозначим:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_{N_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$e_{N_2N_1-N_1+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_{N_2N_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда e — базис пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$ длины N_2N_1. Будем говорить, что e — простейший базис пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Тогда:

$$[A]^1(e) = A_1^1, \ldots, [A]^{N_1}(e) = A_{N_1}^1, \ldots, [A]^{N_2N_1-N_1+1}(e) = A_1^{N_2}, \ldots, [A]^{N_2N_1}(e) = A_{N_1}^{N_2}.$$

3.2. Размерность линейного пространства

Определение (ранг множества векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$.

1. Обозначим через $\mu_*(Q)$ множество всех чисел k, удовлетворяющих условиям: $k \in \mathbb{N}$, существуют векторы $x_1, \ldots, x_k \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно независимые векторы.

2. Пусть $\mu_*(Q) = \varnothing$. Обозначим, $\operatorname{rank}(Q) = 0$.

Пусть: $\mu_*(Q) \neq \varnothing$, $\exists k \in \mathbb{N} \forall m \in \mu_*(Q)(m \leqslant k)$. Обозначим, $\operatorname{rank}(Q) = \max\bigl(\mu_*(Q)\bigr)$.

Пусть: $\mu_*(Q) \neq \varnothing$, $\neg\exists k \in \mathbb{N} \forall m \in \mu_*(Q)(m \leqslant k)$ (иными словами, $\forall k \in \mathbb{N} \exists m \in \mu_*(Q)(m > k)$). Обозначим, $\operatorname{rank}(Q) = +\infty$.

3. Будем говорить, что $\operatorname{rank}(Q)$ — ранг множества Q.

Определение (размерность подпространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства L. Обозначим, $\dim(Q) = \operatorname{rank}(Q)$. Будем говорить, что $\dim(Q)$ — размерность подпространства Q.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$.

1. Пусть: $k \in \mathbb{N}$, $k \notin \mu_*(Q)$ (иными словами, $k \in \bigl(\mathbb{N} \setminus \mu_*(Q)\bigr)$). Тогда: $k \in \mathbb{N}$, для любых векторов $x_1, \ldots, x_k \in Q$ справедливо утверждение: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно зависимые векторы.

Пусть: $k \in \mathbb{N}$, для любых векторов $x_1, \ldots, x_k \in Q$ справедливо утверждение: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно зависимые векторы. Тогда: $k \in \mathbb{N}$, $k \notin \mu_*(Q)$.

2. Пусть $k \in \mu_*(Q)$. Тогда: $k \in \mathbb{N}$, $\forall m(m \in \mathbb{N} \wedge m \leqslant k)\bigl(m \in \mu_*(Q)\bigr)$.

3. Пусть: $k \in \mathbb{N}$, $k \notin \mu_*(Q)$. Тогда: $k \in \mathbb{N}$, $\forall m(m \in \mathbb{N} \wedge m \geqslant k)\bigl(m \notin \mu_*(Q)\bigr)$.

4. Пусть: $r = 0$, $\operatorname{rank}(Q) = r$. Тогда $\mu_*(Q) = \varnothing$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q) = r$. Тогда $\mu_*(Q) = \{1, \ldots, r\}$.

Пусть: $r = +\infty$, $\operatorname{rank}(Q) = r$. Тогда $\mu_*(Q) = \mathbb{N}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $Q \subseteq L$, $\operatorname{rank}(Q) = 0$. Тогда: Q — множество, $\forall x \in Q(x = \theta)$. Следовательно, $Q = \varnothing \vee Q = \{\theta\}$.

Пусть $Q = \varnothing \vee Q = \{\theta\}$. Тогда: Q — множество, $\forall x \in Q(x = \theta)$. Следовательно: $Q \subseteq L$, $\operatorname{rank}(Q) = 0$.

2. Пусть: $Q \subseteq L$, Q — конечное множество. Тогда $\operatorname{rank}(Q) \leqslant \operatorname{card}(Q)$.

3. Пусть: $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in L$, $x_1, \ldots, x_N$ — линейно независимые векторы. Тогда $\operatorname{rank}\bigl(\{x_1, \ldots, x_N\}\bigr) = N$.

Пусть: $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in L$, $x_1, \ldots, x_N$ — линейно зависимые векторы. Тогда $\operatorname{rank}\bigl(\{x_1, \ldots, x_N\}\bigr) < N$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$*.*

Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $\operatorname{rank}(Q) = r$*,* $e_1, \ldots, e_r \in Q$*,* $e_1, \ldots, e_r$ *— линейно независимые векторы. Тогда* e *— базис множества* Q *длины* r*.*

Доказательство. Очевидно: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x \in Q$. Так как: $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q) = r$, $e_1, \ldots, e_r$, $x \in Q$, $r + 1 > r$, то $e_1, \ldots, e_r$, x — линейно зависимые векторы. Так как $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, то $x \in L(e_1, \ldots, e_r)$. Итак, e — базис множества Q длины r. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$*.*

Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $\operatorname{rank}(Q) = r$*. Тогда существуют векторы* $e_1, \ldots, e_r$*, удовлетворяющие условию:* e *— базис множества* Q *длины* r*.*

Доказательство. Так как: $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q) = r$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_r$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы. Так как: $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q) = r$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, то e — базис множества Q длины r. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q_2 \subseteq L$*,* $Q_1 \subseteq Q_2$*. Тогда* $\operatorname{rank}(Q_1) \leqslant \operatorname{rank}(Q_2)$*.*

Доказательство. Обозначим: $r_1 = \operatorname{rank}(Q_1)$, $r_2 = \operatorname{rank}(Q_2)$. Тогда: $r_1 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $r_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Предположим, что $r_2 < r_1$. Тогда: $r_1 \in \overline{\mathbb{N}}$, $r_2 \in \mathbb{Z}_+$.

Так как: $r_1 \in \overline{\mathbb{N}}$, $r_2 \in \mathbb{Z}_+$, $\operatorname{rank}(Q_1) = r_1$, $r_2 + 1 \leqslant r_1$, то существуют векторы $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$, удовлетворяющие условиям: $x_1, \ldots, x_{r_2+1} \in Q_1$, $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$ — линейно независимые векторы. Так как: $x_1, \ldots, x_{r_2+1} \in Q_1$, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $x_1, \ldots, x_{r_2+1} \in Q_2$. Так как: $r_2 \in \mathbb{Z}_+$, $\operatorname{rank}(Q_2) = r_2$, $x_1, \ldots, x_{r_2+1} \in Q_2$, $r_2 + 1 > r_2$, то $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r_1 \leqslant r_2$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*,* $Q_1 \subseteq Q_2$*,* $\dim(Q_1) = \dim(Q_2)$*,* $\dim(Q_2) \neq +\infty$*. Тогда* $Q_1 = Q_2$*.*

Доказательство. Обозначим, $N = \dim(Q_2)$. Тогда: $N \in \mathbb{Z}_+$, $\dim(Q_1) = N$, $\dim(Q_2) = N$.

Пусть $N = 0$. Так как: $N = 0$, $\dim(Q_1) = N$, $\dim(Q_2) = N$, то: $Q_1 = \{\theta\}$, $Q_2 = \{\theta\}$. Тогда $Q_1 = Q_2$.

Пусть $N \neq 0$. Тогда $N \in \mathbb{N}$. Так как: $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_1) = N$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \ldots, e_N \in Q_1$, $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы. Так как: $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_1) = N$, $e_1, \ldots, e_N \in Q_1$, $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы, то e — базис подпространства Q_1 длины N. Тогда $Q_1 = L(e_1, \ldots, e_N)$. Так как: $e_1, \ldots, e_N \in Q_1$, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $e_1, \ldots, e_N \in Q_2$. Так как: $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_2) = N$, $e_1, \ldots, e_N \in Q_2$, $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы, то e — базис подпространства Q_2 длины N. Тогда $Q_2 = L(e_1, \ldots, e_N)$. Следовательно, $Q_1 = Q_2$. □

Лекция 4. Матричная алгебра (1-й семестр)

4.1. Пространство $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$

Определение (что такое матрица). Пусть $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$.

1. Будем говорить, что A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец, если:

$$\begin{gathered} A \text{ — функция}, \\ \mathrm{D}(A) = \{1, \ldots, N_2\} \times \{1, \ldots, N_1\}. \end{gathered}$$

2. Пусть A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец. Далее часто будем писать «A_i^j» вместо «$A(j, i)$».

3. Пусть A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец. Далее часто будем писать «$A_{j,i}$» вместо «$A(j, i)$».

4. Пусть A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец. Далее часто будем писать «$A^{j,i}$» вместо «$A(j, i)$».

5. Пусть $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_{N_1}^1, \ldots, \alpha_1^{N_2}, \ldots, \alpha_{N_1}^{N_2}$ — некоторые объекты. Выберем функцию A, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{gathered} \mathrm{D}(A) = \{1, \ldots, N_2\} \times \{1, \ldots, N_1\}, \\ \forall j = \overline{1, N_2} \forall i = \overline{1, N_1} \big(A(j, i) = \alpha_i^j\big). \end{gathered}$$

Обозначим:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_{N_1}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{N_2} & \cdots & \alpha_{N_1}^{N_2} \end{pmatrix} = A.$$

6. Пусть Q — множество. Будем говорить, что A — матрица с элементами из множества Q, имеющая N_2 строки и N_1 столбец, если:

$$A \colon \{1, \ldots, N_2\} \times \{1, \ldots, N_1\} \implies Q.$$

7. Пусть Q — множество. Обозначим через $Q^{N_2 \times N_1}$ множество всех матриц с элементами из множества Q, имеющих N_2 строки и N_1 столбец.

Определение. Пусть: $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$; A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец.

Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Обозначим:

$$A_i = \begin{pmatrix} A_i^1 \\ \vdots \\ A_i^{N_2} \end{pmatrix}.$$

Пусть $j = \overline{1, N_2}$. Обозначим:

$$A^j = \begin{pmatrix} A_1^j & \cdots & A_{N_1}^j \end{pmatrix}.$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть $A,\ B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(A + B)_i^j = A_i^j + B_i^j, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Тогда $A+B\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Обозначим: $F_1(A,B)=A+B$ при A, $B\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Тогда $F_1\colon\mathbb{K}^{N_2\times N_1}\times\mathbb{K}^{N_2\times N_1}\implies\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Будем говорить, что F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$.

Пусть: $\lambda\in\mathbb{K}$, $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Обозначим:

$$(\lambda A)_i^j=\lambda A_i^j,\quad i=\overline{1,N_1},\ j=\overline{1,N_2}.$$

Тогда $\lambda A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Обозначим: $F_2(\lambda,A)=\lambda A$ при: $\lambda\in\mathbb{K}$, $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Тогда $F_2\colon\mathbb{K}\times\mathbb{K}^{N_2\times N_1}\implies\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Будем говорить, что F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$.

Обозначим:

$$\tilde\Theta_i^j=0,\quad i=\overline{1,N_1},\ j=\overline{1,N_2}.$$

Тогда $\tilde\Theta\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Будем говорить, что $\tilde\Theta$ — стандартный нулевой элемент на множестве $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$.

Утверждение (линейное пространство $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$)**.** *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*,* N_1*,* $N_2\in\mathbb{N}$*;* F_1 *— стандартная операция сложения на множестве* $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$*,* F_2 *— стандартная внешняя операция умножения на множестве* $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$*,* $\tilde\Theta$ *— стандартный нулевой элемент на множестве* $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$*. Тогда:* $(\mathbb{K}^{N_2\times N_1},F_1,F_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $\tilde\Theta$ *— нулевой вектор пространства* $(\mathbb{K}^{N_2\times N_1},F_1,F_2)$*.*

Доказательство. Очевидно: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$ — множество, $\tilde\Theta\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$,

$$F_1\colon\mathbb{K}^{N_2\times N_1}\times\mathbb{K}^{N_2\times N_1}\implies\mathbb{K}^{N_2\times N_1},$$
$$F_2\colon\mathbb{K}\times\mathbb{K}^{N_2\times N_1}\implies\mathbb{K}^{N_2\times N_1}.$$

1. Пусть A, $B\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(A+B)_i^j=A_i^j+B_i^j=B_i^j+A_i^j=(B+A)_i^j.$$

Следовательно, $A+B=B+A$.

2. Пусть A, B, $C\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big((A+B)+C\big)_i^j=(A_i^j+B_i^j)+C_i^j=A_i^j+(B_i^j+C_i^j)=\big(A+(B+C)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. Пусть $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(A+\Theta)_i^j=A_i^j+\Theta_i^j=A_i^j+0=A_i^j.$$

Следовательно, $A+\Theta=A$.

4. Пусть $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big(A+(-1)A\big)_i^j=A_i^j+(-1)A_i^j=0=\Theta_i^j.$$

Следовательно, $A+(-1)A=\Theta$.

5. Пусть: α, $\beta\in\mathbb{K}$, $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)A\big)_i^j=(\alpha\beta)A_i^j=\alpha(\beta A_i^j)=\big(\alpha(\beta A)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

6. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(1A)_i^j = 1A_i^j = A_i^j.$$

Следовательно, $1A = A$.

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((\alpha + \beta)A\big)_i^j = (\alpha + \beta)A_i^j = \alpha A_i^j + \beta A_i^j = (\alpha A + \beta A)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, A, $B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big(\lambda(A + B)\big)_i^j = \lambda(A_i^j + B_i^j) = \lambda A_i^j + \lambda B_i^j = (\lambda A + \lambda B)_i^j.$$

Следовательно, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Очевидно: $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\tilde{\Theta}$ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2)$. $\square$

Замечание (линейное пространство $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}(\mathbb{K}_0)$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $\tilde{\Theta}$ — стандартный нулевой элемент на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$. Тогда: $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}})$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, $\tilde{\Theta}$ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}})$. Обозначим, $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}(\mathbb{K}_0) = (\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2|_{\mathbb{K}_0 \times \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}})$.

4.2. Перемножение матриц

Определение.

1. Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Обозначим:

$$(BA)_i^j = B_k^j A_i^k, \quad i = \overline{1, N_1}, \, j = \overline{1, N_3}.$$

Очевидно, $BA \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Будем говорить, что BA — произведение матриц B, A.

2. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим:

$$I_i^j = \delta_i^j, \quad i = \overline{1, N}, \, j = \overline{1, N}.$$

Очевидно, $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Будем говорить, что I — единичная матрица из множества $\mathbb{R}^{N \times N}$.

Утверждение.

1. *Пусть: N_1, N_2, N_3, $N_4 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$, $C \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_3}$. Тогда $(CB)A = C(BA)$.*
2. *Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда: $AI_1 = A$, $I_2 A = A$.*
3. *Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Тогда $(B_1 + B_2)A = B_1 A + B_2 A$.*
4. *Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Тогда $(\lambda B)A = \lambda(BA)$.*
5. *Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Тогда $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$.*
6. *Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Тогда $B(\lambda A) = \lambda(BA)$.*

Доказательство.

1. Очевидно, $(CB)A$, $C(BA) \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_4}$. Тогда:

$$\big((CB)A\big)_i^j = \sum_{k=1}^{N_2} (CB)_k^j A_i^k = \sum_{k=1}^{N_2} \left(\sum_{m=1}^{N_3} C_m^j B_k^m \right) A_i^k = \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=1}^{N_3} (C_m^j B_k^m) A_i^k =$$
$$= \sum_{m=1}^{N_3} \sum_{k=1}^{N_2} C_m^j (B_k^m A_i^k) = \sum_{m=1}^{N_3} C_m^j \sum_{k=1}^{N_2} B_k^m A_i^k = \sum_{m=1}^{N_3} C_m^j (BA)_i^m = \big(C(BA)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(CB)A = C(BA)$.

Проделаем аналогичные выкладки, используя правило суммирования Эйнштейна. Очевидно, $(CB)A$, $C(BA) \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_4}$. Тогда:

$$\big((CB)A\big)_i^j = (CB)_k^j A_i^k = (C_m^j B_k^m) A_i^k = C_m^j (B_k^m A_i^k) = C_m^j (BA)_i^m = \big(C(BA)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(CB)A = C(BA)$.

2. Очевидно, AI_1, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(AI_1)_i^j = A_k^j (I_1)_i^k = A_k^j \delta_i^k = A_i^j.$$

Следовательно, $AI_1 = A$.

Очевидно, I_2A, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(I_2A)_i^j = (I_2)_k^j A_i^k = \delta_k^j A_i^k = A_i^j.$$

Следовательно, $I_2A = A$.

3. Очевидно, $(B_1 + B_2)A$, $B_1A + B_2A \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big((B_1 + B_2)A\big)_i^j = (B_1 + B_2)_k^j A_i^k = \big((B_1)_k^j + (B_2)_k^j\big) A_i^k = (B_1)_k^j A_i^k + (B_2)_k^j A_i^k =$$
$$= (B_1A)_i^j + (B_2A)_i^j = (B_1A + B_2A)_i^j.$$

Следовательно, $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$.

4. Очевидно, $(\lambda B)A$, $\lambda(BA) \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big((\lambda B)A\big)_i^j = (\lambda B)_k^j A_i^k = (\lambda B_k^j) A_i^k = \lambda (B_k^j A_i^k) = \lambda (BA)_i^j = \big(\lambda(BA)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(\lambda B)A = \lambda(BA)$.

5. Очевидно, $B(A_1 + A_2)$, $BA_1 + BA_2 \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big(B(A_1 + A_2)\big)_i^j = B_k^j (A_1 + A_2)_i^k = B_k^j \big((A_1)_i^k + (A_2)_i^k\big) = B_k^j (A_1)_i^k + B_k^j (A_2)_i^k =$$
$$= (BA_1)_i^j + (BA_2)_i^j = (BA_1 + BA_2)_i^j.$$

Следовательно, $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$.

6. Очевидно, $B(\lambda A)$, $\lambda(BA) \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big(B(\lambda A)\big)_i^j = B_k^j (\lambda A)_i^k = B_k^j (\lambda A_i^k) = \lambda (B_k^j A_i^k) = \lambda (BA)_i^j = \big(\lambda(BA)\big)_i^j.$$

Следовательно, $B(\lambda A) = \lambda(BA)$. □

Замечание.

1. Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_1\times N_2}$. Будем говорить, что матрицы B, A коммутируют, если $BA = AB$.

   Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_1\times N_2}$, матрицы B, A коммутируют. Тогда $N_2 = N_1$.
2. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Обозначим, $[B, A] = BA - AB$. Будем говорить, что $[B, A]$ — коммутатор матриц B, A.

   Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Матрицы B, A коммутируют тогда и только тогда, когда $[B, A] = \Theta$.
3. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Тогда $[B_1 + B_2, A] = [B_1, A] + [B_2, A]$.
4. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Тогда $[\lambda B, A] = \lambda[B, A]$.
5. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A_1, A_2, $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Тогда $[B, A_1 + A_2] = [B, A_1] + [B, A_2]$.
6. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Тогда $[B, \lambda A] = \lambda[B, A]$.
7. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A, $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Тогда $[A, B] = -[B, A]$.
8. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A, B, $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Тогда $\big[C, [B, A]\big] + \big[A, [C, B]\big] + \big[B, [A, C]\big] = \Theta$.

4.3. Транспонирование матрицы

Определение. Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$. Обозначим:

$$(A^T)^j_i = A^i_j, \quad i = \overline{1, N_2},\ j = \overline{1, N_1}.$$

Очевидно, $A^T \in \mathbb{R}^{N_1\times N_2}$. Будем говорить, что A^T — результат транспонирования матрицы A.

Утверждение.

1. *Пусть:* N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$*;* A, $B \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$. *Тогда* $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. *Пусть:* N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$*;* $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$. *Тогда* $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. *Пусть:* N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3\times N_2}$. *Тогда* $(BA)^T = A^T B^T$.
4. *Пусть:* N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$. *Тогда* $(A^T)^T = A$.

Доказательство.

1. Очевидно, $(A + B)^T$, $A^T + B^T \in \mathbb{R}^{N_1\times N_2}$. Пусть: $i = \overline{1, N_2}$, $j = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$\big((A + B)^T\big)^j_i = (A + B)^i_j = A^i_j + B^i_j = (A^T)^j_i + (B^T)^j_i = (A^T + B^T)^j_i.$$

Следовательно, $(A + B)^T = A^T + B^T$.

2. Очевидно, $(\lambda A)^T$, $\lambda A^T \in \mathbb{R}^{N_1\times N_2}$. Пусть: $i = \overline{1, N_2}$, $j = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$\big((\lambda A)^T\big)^j_i = (\lambda A)^i_j = \lambda A^i_j = \lambda (A^T)^j_i = (\lambda A^T)^j_i.$$

Следовательно, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

3. Очевидно, $(BA)^T$, $A^T B^T \in \mathbb{R}^{N_1\times N_3}$. Пусть: $i = \overline{1, N_3}$, $j = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$\big((BA)^T\big)^j_i = (BA)^i_j = B^i_k A^k_j = (B^T)^k_i (A^T)^j_k = (A^T)^j_k (B^T)^k_i = (A^T B^T)^j_i.$$

Следовательно, $(BA)^T = A^T B^T$.

4. Очевидно, $(A^T)^T$, $A \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((A^T)^T\big)^j_i = (A^T)^i_j = A^j_i.$$

Следовательно, $(A^T)^T = A$. □

4.4. След матрицы

Определение. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Обозначим, $\mathrm{tr}(A) = A^k_k$. Очевидно, $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\mathrm{tr}(A)$ — след матрицы A.

Утверждение. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$.

1. *Пусть* $A,\ B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. *Тогда* $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
2. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. *Тогда* $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A)$.
3. *Пусть* $A,\ B \in \mathbb{R}^{N\times N}$. *Тогда* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
4. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. *Тогда* $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$.

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\mathrm{tr}(A+B) = \sum_{k=1}^{N}(A+B)^k_k = \sum_{k=1}^{N}(A^k_k + B^k_k) = \sum_{k=1}^{N} A^k_k + \sum_{k=1}^{N} B^k_k = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B).$$

2. Очевидно:

$$\mathrm{tr}(\lambda A) = \sum_{k=1}^{N}(\lambda A)^k_k = \sum_{k=1}^{N} \lambda A^k_k = \lambda \sum_{k=1}^{N} A^k_k = \lambda\,\mathrm{tr}(A).$$

3. Очевидно:

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{N}(AB)^k_k = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} A^k_m B^m_k = \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} B^m_k A^k_m = \sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} B^m_k A^k_m = \sum_{m=1}^{N}(BA)^m_m =$$
$$= \mathrm{tr}(BA).$$

4. Очевидно:

$$\mathrm{tr}(A^T) = \sum_{k=1}^{N}(A^T)^k_k = \sum_{k=1}^{N} A^k_k = \mathrm{tr}(A). \quad \square$$

Лекция 5. Определитель матрицы (1-й семестр)

5.1. Определение определителя. Теория перестановок

Определение (определитель в пространстве $\mathbb{K}^{N\times N}$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; $F\colon \mathbb{K}^{N\times N} \implies \mathbb{K}$.

Пусть справедливы утверждения.

1. Пусть: $k=\overline{1,N}$, X, Y, $A_1,\dots,A_{k-1}$, $A_{k+1},\dots,A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1,\dots,A_{k-1},X+Y,A_{k+1},\dots,A_N) = \\ = F(A_1,\dots,A_{k-1},X,A_{k+1},\dots,A_N) + F(A_1,\dots,A_{k-1},Y,A_{k+1},\dots,A_N).$$

2. Пусть: $k=\overline{1,N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A_1,\dots,A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1,\dots,A_{k-1},\lambda A_k,A_{k+1},\dots,A_N) = \lambda F(A_1,\dots,A_N).$$

3. Пусть: k, $m=\overline{1,N}$, $k<m$, $A_1,\dots,A_N \in \mathbb{K}^N$, $A_k=A_m$. Тогда $F(A_1,\dots,A_N)=0$.
4. $F(I)=1$.

Будем говорить, что F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{N\times N}$.

Замечание. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{1\times 1}$. Обозначим, $F(A)=A_1^1$. Очевидно, F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{1\times 1}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Обозначим, $F(A)=A_1^1A_2^2-A_1^2A_2^1$. Очевидно, F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{2\times 2}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$. Обозначим, $F(A)=A_1^1A_2^2A_3^3+A_1^3A_2^1A_3^2+A_1^2A_2^3A_3^1-A_1^3A_2^2A_3^1-A_1^1A_2^3A_3^2-A_1^2A_2^1A_3^3$. Очевидно, F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{3\times 3}$.

Замечание (перестановки произвольного множества). Пусть M — множество. Будем говорить, что σ — перестановка множества M, если: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma)=M$, $\mathrm{R}(\sigma)=M$. Обозначим через $S(M)$ множество всех перестановок множества M.

Пусть σ_1, $\sigma_2 \in S(M)$. Обозначим, $\sigma_2\sigma_1=\sigma_2\circ\sigma_1$. Очевидно, $\sigma_2\sigma_1 \in S(M)$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно, $\sigma^{-1} \in S(M)$.

Обозначим: $e(x)=x$ при $x \in M$. Очевидно, $e \in S(M)$.

1. Пусть σ_1, σ_2, $\sigma_3 \in S(M)$. Очевидно, $(\sigma_3\sigma_2)\sigma_1=\sigma_3(\sigma_2\sigma_1)$.
2. Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma e=\sigma$, $e\sigma=\sigma$.
3. Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma\sigma^{-1}=e$, $\sigma^{-1}\sigma=e$.

Замечание (перестановки конечного множества). Пусть M — конечное множество.

Пусть: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma)=M$, $\mathrm{R}(\sigma)\subseteq M$. Так как: $\mathrm{D}(\sigma)$ — конечное множество, σ — обратимая функция, то: $\mathrm{R}(\sigma)$ — конечное множество, $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big)=\mathrm{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big)$. Тогда: $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big)=\mathrm{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big)=\mathrm{card}(M)$. Так как: M — конечное множество, $\mathrm{R}(\sigma)\subseteq M$, то $\mathrm{R}(\sigma)=M$. Тогда $\sigma \in S(M)$.

Пусть: σ — функция, $\mathrm{D}(\sigma)=M$, $\mathrm{R}(\sigma)=M$. Предположим, что σ — необратимая функция. Так как $\mathrm{D}(\sigma)$ — конечное множество, то: $\mathrm{R}(\sigma)$ — конечное множество, $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big)<\mathrm{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big)$. Тогда: $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big)<\mathrm{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big)=\mathrm{card}(M)$ (что противоречит утверждению $\mathrm{R}(\sigma)=M$). Итак, σ — обратимая функция. Тогда $\sigma \in S(M)$.

Замечание (перестановки множеств: $\varnothing$, $\{1,\dots,r\}$). Обозначим, $S_0=S(\varnothing)$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим, $S_r=S\big(\{1,\dots,r\}\big)$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_r$ — некоторые объекты. Обозначим через σ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(\sigma)=\{1,\dots,r\}$, $\sigma(1)=x_1,\dots,\sigma(r)=x_r$. Тогда: σ — функция,

$\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, r\}$, $\mathrm{R}(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Далее часто будем отождествлять упорядоченную r-ку $(x_1, \ldots, x_r)$ и функцию σ.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \{1, \ldots, r\}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — различные числа. Обозначим через σ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, r\}$, $\sigma(1) = \alpha_1, \ldots, \sigma(r) = \alpha_r$. Тогда: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, r\}$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq \{1, \ldots, r\}$. Следовательно, $\sigma \in S_r$.

Замечание (простые и элементарные перестановки). Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ — простая перестановка, если существуют числа k, $m = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условиям: $k < m$, $\sigma(k) = m$, $\sigma(m) = k$, $\sigma(i) = i$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \neq k$, $i \neq m$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ раскладывается в произведение простых перестановок, если существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — простые перестановки, $\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_1$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ — элементарная перестановка, если существует число $k = \overline{1, N-1}$, удовлетворяющее условиям: $\sigma(k) = k+1$, $\sigma(k+1) = k$, $\sigma(i) = i$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \neq k$, $i \neq k+1$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ раскладывается в произведение элементарных перестановок, если существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_1$.

Очевидно, e раскладывается в произведение элементарных перестановок.

Утверждение. *Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $\sigma \in S_N$. Тогда σ раскладывается в произведение элементарных перестановок.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого числа $\tilde{N} = \overline{1, N}$ существует перестановка $\tilde{\sigma} \in S_N$, удовлетворяющая условиям: $\tilde{\sigma}$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}}$.

Так как $\sigma(1) = \overline{1, N}$, то существует число $k = \overline{1, N}$, удовлетворяющее условию $e(k) = \sigma(1)$. Пусть $k = 1$. Тогда: $e \in S_N$, e раскладывается в произведение элементарных перестановок, $e(1) = \sigma(1)$. Пусть $k \geqslant 2$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $(e\sigma_r \cdots \sigma_1)(1) = \sigma(1)$. Следовательно: $e\sigma_r \cdots \sigma_1 \in S_N$, $e\sigma_r \cdots \sigma_1$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $(e\sigma_r \cdots \sigma_1)(1) = \sigma(1)$.

Пусть: $\tilde{N} = \overline{1, N-1}$, $\tilde{\sigma} \in S_N$, $\tilde{\sigma}$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}}$. Так как $\sigma(\tilde{N}+1) = \overline{1, N}$, то существует число $k = \overline{1, N}$, удовлетворяющее условию $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(\tilde{N}+1)$. Предположим, что $k \leqslant \tilde{N}$. Тогда: $\sigma(\tilde{N}+1) = \tilde{\sigma}(k) = \sigma(k)$. Так как σ — обратимая функция, то $\tilde{N}+1 = k$ (что противоречит утверждению: $k \leqslant \tilde{N}$). Итак, $k \geqslant \tilde{N}+1$. Пусть $k = \tilde{N}+1$. Тогда: $\tilde{\sigma} \in S_N$, $\tilde{\sigma}$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}+1}$. Пусть $k \geqslant \tilde{N}+2$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $(\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1)(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}+1}$. Следовательно: $\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1 \in S_N$, $\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $(\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1)(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}+1}$. $\square$

Определение. Обозначим: $h(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0)$; $h(x) = 1$ при $x \in [0, +\infty)$. Очевидно, $h\colon \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$. Будем говорить, что h — функция Хевисайда.

Определение. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим:

$$P(\sigma) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(j)\bigr).$$

Очевидно, $P(\sigma) \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что $P(\sigma)$ — число беспорядков в перестановке σ.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{P(\sigma)}$. Очевидно, $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$. Будем говорить, что $\operatorname{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки σ.

Очевидно: $P(e) = 0$, $\operatorname{sgn}(e) = 1$.

Определение. Пусть $N = 0$, 1.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим, $P(\sigma) = 0$. Будем говорить, что $P(\sigma)$ — число беспорядков в перестановке σ.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим, $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$. Будем говорить, что $\operatorname{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки σ.

Пусть $\sigma \in S_N$. Очевидно, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{P(\sigma)}$.

Замечание. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $\sigma \in S_N$, $i_0 = \overline{1, N-1}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
P(\sigma) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(j)\bigr) = \\
= \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant N, \\ i, j \neq i_0, i_0 + 1}} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(j)\bigr) + h\bigl(\sigma(i_0) - \sigma(i_0 + 1)\bigr) + \\
+ \sum_{j = i_0 + 2}^{N} h\bigl(\sigma(i_0) - \sigma(j)\bigr) + \sum_{j = i_0 + 2}^{N} h\bigl(\sigma(i_0 + 1) - \sigma(j)\bigr) + \\
+ \sum_{i=1}^{i_0 - 1} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(i_0)\bigr) + \sum_{i=1}^{i_0 - 1} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(i_0 + 1)\bigr).
\end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; σ_1, $\sigma_2 \in S_N$, σ_1 — элементарная перестановка. Тогда: $\bigl|P(\sigma_2\sigma_1) - P(\sigma_2)\bigr| = 1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1) = -\operatorname{sgn}(\sigma_2)$.*

Доказательство. Так как σ_1 — элементарная перестановка, то существует число $i_0 = \overline{1, N-1}$, удовлетворяющее условиям: $\sigma_1(i_0) = i_0 + 1$, $\sigma_1(i_0 + 1) = i_0$, $\sigma_1(i) = i$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \neq i_0$, $i \neq i_0 + 1$. Тогда:

$$\begin{gathered}
P(\sigma_2) = \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant N, \\ i, j \neq i_0, i_0 + 1}} h\bigl(\sigma_2(i) - \sigma_2(j)\bigr) + h\bigl(\sigma_2(i_0) - \sigma_2(i_0 + 1)\bigr) + \\
+ \sum_{j = i_0 + 2}^{N} h\bigl(\sigma_2(i_0) - \sigma_2(j)\bigr) + \sum_{j = i_0 + 2}^{N} h\bigl(\sigma_2(i_0 + 1) - \sigma_2(j)\bigr) + \\
+ \sum_{i=1}^{i_0 - 1} h\bigl(\sigma_2(i) - \sigma_2(i_0)\bigr) + \sum_{i=1}^{i_0 - 1} h\bigl(\sigma_2(i) - \sigma_2(i_0 + 1)\bigr);
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
P(\sigma_2\sigma_1) = \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant N, \\ i, j \neq i_0, i_0 + 1}} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i) - (\sigma_2\sigma_1)(j)\bigr) + h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i_0) - (\sigma_2\sigma_1)(i_0 + 1)\bigr) + \\
+ \sum_{j = i_0 + 2}^{N} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i_0) - (\sigma_2\sigma_1)(j)\bigr) + \sum_{j = i_0 + 2}^{N} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i_0 + 1) - (\sigma_2\sigma_1)(j)\bigr) +
\end{gathered}$$

$$+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\big((\sigma_2\sigma_1)(i)-(\sigma_2\sigma_1)(i_0)\big)+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\big((\sigma_2\sigma_1)(i)-(\sigma_2\sigma_1)(i_0+1)\big)=$$
$$=\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant N,\\ i,\,j\neq i_0,\,i_0+1}} h\big(\sigma_2(i)-\sigma_2(j)\big)+h\big(\sigma_2(i_0+1)-\sigma_2(i_0)\big)+$$
$$+\sum_{j=i_0+2}^{N} h\big(\sigma_2(i_0+1)-\sigma_2(j)\big)+\sum_{j=i_0+2}^{N} h\big(\sigma_2(i_0)-\sigma_2(j)\big)+$$
$$+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\big(\sigma_2(i)-\sigma_2(i_0+1)\big)+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\big(\sigma_2(i)-\sigma_2(i_0)\big).$$

Следовательно:

$$P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)=h\big(\sigma_2(i_0+1)-\sigma_2(i_0)\big)-h\big(\sigma_2(i_0)-\sigma_2(i_0+1)\big).$$

Так как σ_2 — обратимая функция, то $\sigma_2(i_0)\neq\sigma_2(i_0+1)$. Пусть $\sigma_2(i_0)<\sigma_2(i_0+1)$. Тогда $P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)=1$. Следовательно: $\big|P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)\big|=1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=-\operatorname{sgn}(\sigma_2)$. Пусть $\sigma_2(i_0)>\sigma_2(i_0+1)$. Тогда $P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)=-1$. Следовательно: $\big|P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)\big|=1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=-\operatorname{sgn}(\sigma_2)$. □

Утверждение.

1. Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $r\in\mathbb{N}$, $\sigma_1,\ldots,\sigma_r\in S_N$, $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ — элементарные перестановки. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=(-1)^r$.

2. Пусть: $N\in\mathbb{N}$, $N\geqslant 2$; $\sigma\in S_N$, σ — элементарная перестановка. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$.

3. Пусть: $N\in\mathbb{Z}_+$; σ_1, $\sigma_2\in S_N$. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=\operatorname{sgn}(\sigma_2)\operatorname{sgn}(\sigma_1)$.

4. Пусть: $N\in\mathbb{Z}_+$; $\sigma\in S_N$. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma)$.

5. Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $\sigma\in S_N$, σ — простая перестановка. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$.

6. Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $r\in\mathbb{N}$, $\sigma_1,\ldots,\sigma_r\in S_N$, $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ — простые перестановки. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=(-1)^r$.

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=\operatorname{sgn}(e\sigma_r\cdots\sigma_1)=(-1)^r\operatorname{sgn}(e)=(-1)^r.$$

2. Очевидно: $\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^1=-1$.

3. Пусть $N\geqslant 2$. Тогда существует число $r\in\mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_{1,1},\ldots,\sigma_{1,r}\in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_{1,1},\ldots,\sigma_{1,r}$ — элементарные перестановки, $\sigma_1=\sigma_{1,r}\cdots\sigma_{1,1}$. Следовательно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_{1,r}\cdots\sigma_{1,1})=\operatorname{sgn}(\sigma_2)(-1)^r=\operatorname{sgn}(\sigma_2)\operatorname{sgn}(\sigma_1).$$

Пусть $N=0,\,1$. Тогда σ_1, $\sigma_2=e$. Следовательно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=\operatorname{sgn}(ee)=\operatorname{sgn}(e)=\operatorname{sgn}(e)\operatorname{sgn}(e)=\operatorname{sgn}(\sigma_2)\operatorname{sgn}(\sigma_1).$$

4. Очевидно: $\sigma\sigma^{-1}=e$, $\operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(e)$, $\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=1$, $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma)$.

5. Так как σ — простая перестановка, то существуют числа k, $m=\overline{1,N}$, удовлетворяющие условиям: $k<m$, $\sigma(k)=m$, $\sigma(m)=k$, $\sigma(i)=i$ при: $i=\overline{1,N}$, $i\neq k$, $i\neq m$. Тогда существуют перестановки $\sigma_1,\ldots,\sigma_{2(m-k)-1}\in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1,\ldots,\sigma_{2(m-k)-1}$ — элементарные перестановки, $\sigma=e\sigma_{2(m-k)-1}\cdots\sigma_1$. Следовательно: $\operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(e\sigma_{2(m-k)-1}\cdots\sigma_1)=(-1)^{2(m-k)-1}\operatorname{sgn}(e)=-1$.

6. Очевидно: $\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=\operatorname{sgn}(\sigma_r)\cdots\operatorname{sgn}(\sigma_1)=(-1)^r$. □

5.2. Существование и единственность определителя

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; F *— определитель в пространстве* $\mathbb{K}^{N \times N}$.

1. *Пусть:* k, $m = \overline{1, N}$, $k < m$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. *Тогда:*

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = -F(A_1, \ldots, A_N).$$

2. *Пусть:* $\sigma \in S_N$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. *Тогда:*

$$F(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(A_1, \ldots, A_N).$$

3. *Пусть* $\sigma \in S_N$. *Тогда:*

$$F(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

4. *Пусть* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. *Тогда:*

$$F(A) = F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}.$$

5. *Пусть* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. *Тогда:*

$$F(A) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)}.$$

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\begin{gathered}
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k + A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0, \\
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) + \\
+ F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) + \\
+ F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) + \\
+ F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0, \\
F(A_1, \ldots, A_N) + F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0, \\
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = -F(A_1, \ldots, A_N).
\end{gathered}$$

2. Пусть $N \geqslant 2$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_1$. Следовательно:

$$\begin{gathered}
F(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N)}) = F(A_{(\sigma_r \cdots \sigma_1)(1)}, \ldots, A_{(\sigma_r \cdots \sigma_1)(N)}) = (-1)^r F(A_1, \ldots, A_N) = \\
= \operatorname{sgn}(\sigma) F(A_1, \ldots, A_N).
\end{gathered}$$

Пусть $N = 1$. Тогда $\sigma = e$. Следовательно:

$$F(A_{\sigma(1)}) = F(A_{e(1)}) = F(A_1) = \operatorname{sgn}(e) F(A_1) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(A_1).$$

3. Очевидно:

$$F(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(I_1, \ldots, I_N) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(I) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

4. Очевидно:

$$F(A) = F(A_1, \ldots, A_N) = F(I_{k_1} A_1^{k_1}, \ldots, I_{k_N} A_N^{k_N}) = F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}.$$

5. Очевидно:

$$F(A) = F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_N = \overline{1,N}, \\ k_1, \ldots, k_N \text{ — различные числа}}} F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N} F(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)}. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*;* F_1, F_2 *— определители в пространстве* $\mathbb{K}^{N \times N}$*. Тогда* $F_1 = F_2$.

Доказательство. Очевидно, F_1, $F_2 \colon \mathbb{K}^{N \times N} \implies \mathbb{K}$. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Тогда:

$$F_1(A) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = F_2(A).$$

Следовательно, $F_1 = F_2$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*;* $F(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)}$ *при* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$*. Тогда* F *— определитель в пространстве* $\mathbb{K}^{N \times N}$.

Доказательство. Очевидно, $F \colon \mathbb{K}^{N \times N} \implies \mathbb{K}$.

1. Пусть: $k = \overline{1,N}$, X, Y, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X + Y, A_{k+1}, \ldots, A_N) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} (X+Y)^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} +$$
$$+ \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} Y^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$
$$= F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_N) + F(A_1, \ldots, A_{k-1}, Y, A_{k+1}, \ldots, A_N).$$

2. Пусть: $k = \overline{1,N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_N) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} (\lambda A_k)^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$
$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = \lambda F(A_1, \ldots, A_N).$$

3. Пусть: k, $m = \overline{1,N}$, $k < m$, X, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_{m+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Обозначим: $\sigma_0(k) = m$, $\sigma_0(m) = k$, $\sigma_0(i) = i$ при: $i = \overline{1,N}$, $i \neq k$, $i \neq m$. Тогда: $\sigma_0 \in S_N$, σ_0 — простая перестановка. Обозначим:

$$S_{N,1} = \bigl\{\sigma \colon \sigma \in S_N \wedge \sigma(k) < \sigma(m)\bigr\},$$

$$S_{N,2} = \big\{\sigma \colon \sigma \in S_N \wedge \sigma(k) > \sigma(m)\big\}.$$

Тогда: $S_{N,1} \cup S_{N,2} = S_N$, $S_{N,1} \cap S_{N,2} = \varnothing$, $S_{N,1}$, $S_{N,2} \neq \varnothing$. Следовательно:

$$\begin{gathered}
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, X, A_{m+1}, \ldots, A_N) = \\
= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = \\
= \sum_{\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} + \\
+ \sum_{\sigma \in S_{N,2}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = \\
= \big[\text{замена: } \tilde\sigma = \sigma\sigma_0,\ \sigma \in S_{N,2};\ \sigma = \tilde\sigma\sigma_0,\ \tilde\sigma \in S_{N,1}\big] = \\
= \sum_{\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} + \\
+ \sum_{\tilde\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma\sigma_0) A_1^{(\tilde\sigma\sigma_0)(1)} \cdots A_{k-1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(k-1)} X^{(\tilde\sigma\sigma_0)(k)} \times \\
\times A_{k+1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(k+1)} \cdots A_{m-1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(m-1)} X^{(\tilde\sigma\sigma_0)(m)} A_{m+1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(m+1)} \cdots A_N^{(\tilde\sigma\sigma_0)(N)} = \\
= \sum_{\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} - \\
- \sum_{\tilde\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma) A_1^{\tilde\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\tilde\sigma(k-1)} X^{\tilde\sigma(m)} A_{k+1}^{\tilde\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\tilde\sigma(m-1)} X^{\tilde\sigma(k)} A_{m+1}^{\tilde\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\tilde\sigma(N)} = 0.
\end{gathered}$$

4. Очевидно:

$$F(I) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) I_1^{\sigma(1)} \cdots I_N^{\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \delta_1^{\sigma(1)} \cdots \delta_N^{\sigma(N)} = \operatorname{sgn}(e) \delta_1^{e(1)} \cdots \delta_N^{e(N)} = 1. \quad \square$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\det_N$ определитель в пространстве $\mathbb{K}^{N \times N}$. Далее обычно будем писать «det» вместо «$\det_N$».

5.3. Основные свойства определителя

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$.

1. *Пусть:* $k = \overline{1, N}$, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. *Тогда:*
$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \theta, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.$$
2. *Пусть:* $N \geqslant 2$, $k = \overline{1, N}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$, $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. *Тогда:*
$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$
3. *Пусть:* $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$ *— линейно зависимые столбцы. Тогда:*
$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$
4. *Пусть:* $N \geqslant 2$, $k = \overline{1, N}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$, $X \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. *Тогда:*
$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_N).$$

5. *Пусть:* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $k_1, \ldots, k_N = \overline{1,N}$. *Тогда:*

$$\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}).$$

6. *Пусть* A, $B \in \mathbb{K}^{N\times N}$. *Тогда:*

$$\det(BA) = \det(B)\det(A).$$

7. *Пусть* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$. *Тогда:*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Доказательство.
1. Очевидно:

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \theta, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, 0\theta, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \\ = 0\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \theta, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.$$

2. Так как $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^N$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1, \ldots, \alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^N \in \mathbb{K}$, $A_k = \sum\limits_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \alpha^m A_m$. Тогда:

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = \det\Big(A_1, \ldots, A_{k-1}, \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \alpha^m A_m, A_{k+1}, \ldots, A_N\Big) = \\ = \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \alpha^m \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.$$

3. Пусть $N \geqslant 2$. Так как $A_1, \ldots, A_N$ — линейно зависимые столбцы, то существует номер $k = \overline{1,N}$, удовлетворяющий условию $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. Тогда $\det(A_1, \ldots, A_N) = 0$.

Пусть $N = 1$. Так как A_1 — линейно зависимый столбец, то $A_1 = \theta$. Тогда: $\det(A_1) = \det(\theta) = 0$.

4. Очевидно:

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \\ = \det(A_1, \ldots, A_N) + \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_N).$$

5. Пусть числа $k_1, \ldots, k_N$ не являются различными. Тогда: $\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = 0$, $\det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) = 0$. Следовательно, $\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N})$.

Пусть $k_1, \ldots, k_N$ — различные числа. Обозначим: $\sigma(1) = k_1, \ldots, \sigma(N) = k_N$. Тогда $\sigma \in S_N$. Следовательно:

$$\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A_1, \ldots, A_N) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A); \\ \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) = \det(A)\det(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A)\det(I_1, \ldots, I_N) = \\ = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A)\det(I) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A).$$

Тогда $\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N})$.

6. Очевидно:
$$\det(BA)=\det\big((BA)_1,\ldots,(BA)_N\big)=\det(B_{k_1}A_1^{k_1},\ldots,B_{k_N}A_N^{k_N})=$$
$$=\det(B_{k_1},\ldots,B_{k_N})A_1^{k_1}\cdots A_N^{k_N}=\det(I_{k_1},\ldots,I_{k_N})\det(B)A_1^{k_1}\cdots A_N^{k_N}=\det(B)\det(A).$$
7. Очевидно:
$$\det(A^T)=\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)(A^T)_1^{\sigma(1)}\cdots(A^T)_N^{\sigma(N)}=\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)A^1_{\sigma(1)}\cdots A^N_{\sigma(N)}=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma^{-1}(1)}\cdots A_N^{\sigma^{-1}(N)}=[\text{замена: }\tilde\sigma=\sigma^{-1},\ \sigma\in S_N;\ \sigma=\tilde\sigma^{-1},\ \tilde\sigma\in S_N]=$$
$$=\sum_{\tilde\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\tilde\sigma^{-1})A_1^{\tilde\sigma(1)}\cdots A_N^{\tilde\sigma(N)}=\sum_{\tilde\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\tilde\sigma)A_1^{\tilde\sigma(1)}\cdots A_N^{\tilde\sigma(N)}=\det(A).\quad\square$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$, $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$, $i,\ j=\overline{1,N}$. Обозначим через $\overline{\Delta}_i^j(A)$ определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычёркиванием столбца A_i и строки A^j. Будем говорить, что $\overline{\Delta}_i^j(A)$ — минор матрицы A, дополнительный к элементу A_i^j. Будем говорить, что $(-1)^{j+i}\overline{\Delta}_i^j(A)$ — алгебраическое дополнение элемента A_i^j в матрице A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* $N\in\mathbb{Z}$*,* $N\geqslant 2$*;* $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$*. Тогда:*
$$\det(A_1,\ldots,A_{N-1},I_N)=\overline{\Delta}_N^N(A).$$

Доказательство. Пусть $\tilde\sigma\in S_{N-1}$. Обозначим: $\varphi(\tilde\sigma)(k)=\tilde\sigma(k)$ при $k=\overline{1,N-1}$; $\varphi(\tilde\sigma)(N)=N$. Тогда: $\varphi(\tilde\sigma)\in S_N$, $\operatorname{sgn}\big(\varphi(\tilde\sigma)\big)=\operatorname{sgn}(\tilde\sigma)$. Очевидно: φ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\varphi)=S_{N-1}$, $\mathrm{R}(\varphi)=\big\{\sigma\colon\sigma\in S_N\wedge\sigma(N)=N\big\}$. Тогда:
$$\det(A_1,\ldots,A_{N-1},I_N)=\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)}\cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)}I_N^{\sigma(N)}=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)}\cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)}\delta_N^{\sigma(N)}=\sum_{\sigma\in S_N,\,\sigma(N)=N}\operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)}\cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)}\delta_N^{\sigma(N)}=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_N,\,\sigma(N)=N}\operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)}\cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)}=\big[\text{замена: }\sigma=\varphi(\tilde\sigma),\ \tilde\sigma\in S_{N-1}\big]=$$
$$=\sum_{\tilde\sigma\in S_{N-1}}\operatorname{sgn}\big(\varphi(\tilde\sigma)\big)A_1^{\varphi(\tilde\sigma)(1)}\cdots A_{N-1}^{\varphi(\tilde\sigma)(N-1)}=\sum_{\tilde\sigma\in S_{N-1}}\operatorname{sgn}(\tilde\sigma)A_1^{\tilde\sigma(1)}\cdots A_{N-1}^{\tilde\sigma(N-1)}=\overline{\Delta}_N^N(A).\quad\square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* $N\in\mathbb{Z}$*,* $N\geqslant 2$*;* $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$*,* $i_0,\ j_0=\overline{1,N}$*. Тогда:*
$$\det(A_1,\ldots,A_{i_0-1},I_{j_0},A_{i_0+1},\ldots,A_N)=(-1)^{j_0+i_0}\overline{\Delta}_{i_0}^{j_0}(A).$$

Доказательство. Обозначим:
$$B=(A_1,\ldots,A_{i_0-1},A_{i_0+1},\ldots,A_N,I_{j_0}),$$
$$C=\begin{pmatrix}B^1\\ \vdots\\ B^{j_0-1}\\ B^{j_0+1}\\ \vdots\\ B^N\\ B^{j_0}\end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, I_{j_0}, A_{i_0+1}, \ldots, A_N) = (-1)^{N-i_0} \det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, A_{i_0+1}, \ldots, A_N, I_{j_0}) =$$
$$= (-1)^{N-i_0} \det(B) = (-1)^{N-i_0} \det \begin{pmatrix} B^1 \\ \vdots \\ B^{j_0-1} \\ B^{j_0} \\ B^{j_0+1} \\ \vdots \\ B^N \end{pmatrix} = (-1)^{N-i_0}(-1)^{N-j_0} \det \begin{pmatrix} B^1 \\ \vdots \\ B^{j_0-1} \\ B^{j_0+1} \\ \vdots \\ B^N \\ B^{j_0} \end{pmatrix} =$$
$$= (-1)^{N-i_0}(-1)^{N-j_0} \det(C) = (-1)^{N-i_0}(-1)^{N-j_0} \det(C_1, \ldots, C_{N-1}, C_N) =$$
$$= (-1)^{j_0+i_0} \det(C_1, \ldots, C_{N-1}, I_N) = (-1)^{j_0+i_0} \overline{\Delta}_N^N(C) = (-1)^{j_0+i_0} \overline{\Delta}_{i_0}^{j_0}(A). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{Z}$*,* $N \geqslant 2$*;* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $i_0 = \overline{1, N}$*. Тогда:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+i_0} \overline{\Delta}_{i_0}^{j}(A) A_{i_0}^{j}.$$

Доказательство. Очевидно:

$$\det(A) = \det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, A_{i_0}, A_{i_0+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, I_j A_{i_0}^j, A_{i_0+1}, \ldots, A_N) =$$
$$= \det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, I_j, A_{i_0+1}, \ldots, A_N) A_{i_0}^j = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+i_0} \overline{\Delta}_{i_0}^{j}(A) A_{i_0}^{j}. \quad \square$$

5.4. Метод Гаусса—Жордана для вычисления определителя

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$.

Пусть: $\exists i = \overline{1, N}(A_i = \tilde{\theta})$ либо $\exists j = \overline{1, N}(A^j = \tilde{\theta})$. Тогда $\det(A) = 0$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i = \overline{1, N}(A_i \neq \tilde{\theta})$, $\forall j = \overline{1, N}(A^j \neq \tilde{\theta})$, $N = 2$. Тогда $\det(A) = A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i = \overline{1, N}(A_i \neq \tilde{\theta})$, $\forall j = \overline{1, N}(A^j \neq \tilde{\theta})$, $N \geqslant 3$. Обозначим, $N_1 = N - 1$. Тогда: $N_1 \in \mathbb{Z}$, $N_1 \geqslant 2$. Выберем числа i_0, $j_0 = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условию $A_{i_0}^{j_0} \neq 0$. Первый вариант. Обнулим элементы, стоящие над элементом $A_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $A_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по столбцу с номером i_0, получим число $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, получим матрицу $B_1 \in \mathbb{R}^{N_1\times N_1}$, удовлетворяющую условию $\det(A) = \lambda_1 \det(B_1)$. Второй вариант. Обнулим элементы, стоящие левее элемента $A_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие правее элемента $A_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по строке с номером j_0, получим число $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, получим матрицу $B_1 \in \mathbb{R}^{N_1\times N_1}$, удовлетворяющую условию $\det(A) = \lambda_1 \det(B_1)$. Перейдём к следующему шагу.

Пусть: $\exists i = \overline{1, N_1}\big((B_1)_i = \tilde{\theta}\big)$ либо $\exists j = \overline{1, N_1}\big((B_1)^j = \tilde{\theta}\big)$. Тогда: $\det(A) = \lambda_1 \det(B_1) = 0$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i = \overline{1, N_1}\big((B_1)_i \neq \tilde{\theta}\big)$, $\forall j = \overline{1, N_1}\big((B_1)^j \neq \tilde{\theta}\big)$, $N_1 = 2$. Тогда: $\det(A) = \lambda_1 \det(B_1) = \lambda_1\big((B_1)_1^1 (B_1)_2^2 - (B_1)_1^2 (B_1)_2^1\big)$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i = \overline{1, N_1}\big((B_1)_i \neq \tilde{\theta}\big)$, $\forall j = \overline{1, N_1}\big((B_1)^j \neq \tilde{\theta}\big)$, $N_1 \geqslant 3$. Обозначим, $N_2 = N_1 - 1$. Тогда: $N_2 \in \mathbb{Z}$, $N_2 \geqslant 2$. Выберем числа i_0, $j_0 = \overline{1, N_1}$, удовлетворяющие условию $(B_1)_{i_0}^{j_0} \neq 0$.

Первый вариант. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_1)_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_1)_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по столбцу с номером i_0, получим число $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, получим матрицу $B_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$, удовлетворяющую условию $\det(A) = \lambda_2 \det(B_2)$. Второй вариант. Обнулим элементы, стоящие левее элемента $(B_1)_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие правее элемента $(B_1)_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по строке с номером j_0, получим число $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, получим матрицу $B_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$, удовлетворяющую условию $\det(A) = \lambda_2 \det(B_2)$. Перейдём к следующему шагу.

Продолжая рассуждения, получим $\det(A)$.

Лекция 6. Базис и размерность (окончание; 2-й семестр)

6.1. Теорема о базисном миноре

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$. Обозначим:

$$\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A) = \begin{vmatrix} A^{j_1}_{i_1} & \cdot & A^{j_1}_{i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{j_r}_{i_1} & \cdot & A^{j_r}_{i_r} \end{vmatrix}.$$

Будем говорить, что $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A)$ — минор матрицы A порядка r.

Пусть: $r_1 \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_{r_1} = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_{r_1}$, $j_1, \ldots, j_{r_1} = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_{r_1}$; $r_2 \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_{r_2} = \overline{1, N_1}$, $k_1 < \cdots < k_{r_2}$, $m_1, \ldots, m_{r_2} = \overline{1, N_2}$, $m_1 < \cdots < m_{r_2}$. Будем говорить, что минор $\Delta^{m_1,\ldots,m_{r_2}}_{k_1,\ldots,k_{r_2}}(A)$ окаймляет минор $\Delta^{j_1,\ldots,j_{r_1}}_{i_1,\ldots,i_{r_1}}(A)$, если: $r_1 < r_2$, $\{i_1, \ldots, i_{r_1}\} \subseteq \{k_1, \ldots, k_{r_2}\}$, $\{j_1, \ldots, j_{r_1}\} \subseteq \{m_1, \ldots, m_{r_2}\}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r. Будем говорить, что $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базисные столбцы матрицы A.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r. Будем говорить, что $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базисные строки матрицы A.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r; $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r. Будем говорить, что $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A)$ — базисный минор матрицы A.

Теорема (о базисном миноре). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A) \neq 0$.

Пусть все миноры матрицы A порядка $r+1$, окаймляющие минор $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A)$, равны нулю (если они существуют).

Тогда: $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_r})$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r; $(A^{j_1}, \ldots, A^{j_r})$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r.

Доказательство. Очевидно: $r \in \mathbb{N}$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r} \in \{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$.

Обозначим:

$$\delta = \Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A),$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^{j_1}_{i_1} & \cdot & A^{j_1}_{i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{j_r}_{i_1} & \cdot & A^{j_r}_{i_r} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_r$ — линейно зависимые столбцы. Следовательно: $\delta = \det(\tilde{A}) = 0$ (что противоречит утверждению: $\delta \neq 0$). Итак, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно независимые столбцы.

Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Обозначим:

$$B(i,j) = \begin{pmatrix} A^{j_1}_{i_1} & \cdot & A^{j_1}_{i_r} & A^{j_1}_{i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{j_r}_{i_1} & \cdot & A^{j_r}_{i_r} & A^{j_r}_{i} \\ A^{j}_{i_1} & \cdot & A^{j}_{i_r} & A^{j}_{i} \end{pmatrix}.$$

Пусть: $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, $j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$. Тогда $\det\bigl(B(i,j)\bigr)$ равен (с точностью до знака) одному из миноров матрицы A порядка $r+1$, окаймляющих минор δ. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$. Пусть $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$. Тогда последний столбец матрицы $B(i,j)$ равен одному из предыдущих столбцов матрицы $B(i,j)$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$. Пусть $j \in \{j_1, \ldots, j_r\}$. Тогда последняя строка матрицы $B(i,j)$ равна одной из предыдущих строк матрицы $B(i,j)$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$. Итак, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Очевидно:

$$\begin{gathered}\det\bigl(B(i,j)\bigr) = \\ = (-1)^{(r+1)+1}\overline{\Delta}_1^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)B_1^{r+1}(i,j) + \cdots + (-1)^{(r+1)+r}\overline{\Delta}_r^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)B_r^{r+1}(i,j) + \\ + (-1)^{(r+1)+(r+1)}\overline{\Delta}_{r+1}^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)B_{r+1}^{r+1}(i,j) = \\ = (-1)^{(r+1)+1}\overline{\Delta}_1^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_{i_1}^j + \cdots + (-1)^{(r+1)+r}\overline{\Delta}_r^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_{i_r}^j + \delta A_i^j.\end{gathered}$$

Так как $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$, то:

$$(-1)^{(r+1)+1}\overline{\Delta}_1^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_{i_1}^j + \cdots + (-1)^{(r+1)+r}\overline{\Delta}_r^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_{i_r}^j + \delta A_i^j = 0.$$

Так как $\delta \neq 0$, то:

$$A_i^j = \frac{-(-1)^{(r+1)+1}\overline{\Delta}_1^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)}{\delta}A_{i_1}^j + \cdots + \frac{-(-1)^{(r+1)+r}\overline{\Delta}_r^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)}{\delta}A_{i_r}^j.$$

Пусть $k = \overline{1,r}$. Очевидно, число $\frac{-(-1)^{(r+1)+k}\overline{\Delta}_k^{r+1}(B(i,j))}{\delta}$ не зависит от выбора номера $j = \overline{1,N_2}$. Обозначим, $C^k(i) = \frac{-(-1)^{(r+1)+k}\overline{\Delta}_k^{r+1}(B(i,j))}{\delta}$. Тогда $A_i^j = \sum\limits_{k=1}^{r} C^k(i)A_{i_k}^j$. Следовательно:

$$(A_i)^j = A_i^j = \sum_{k=1}^{r} C^k(i)A_{i_k}^j = \sum_{k=1}^{r} C^k(i)(A_{i_k})^j = \Bigl(\sum_{k=1}^{r} C^k(i)A_{i_k}\Bigr)^j.$$

В силу произвольности выбора номера $j = \overline{1,N_2}$ получаем, что $A_i = \sum\limits_{k=1}^{r} C^k(i)A_{i_k}$. Тогда $A_i \in L(A_{i_1}, \ldots, A_{i_r})$. Итак, $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_r})$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r.

Аналогично проводятся рассуждения для строк. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $A \neq \tilde{\Theta}$ (здесь $\tilde{\Theta}$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$). Тогда существует число $r = \overline{1, \min\bigl(\{N_1, N_2\}\bigr)}$, существуют числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1,N_1}$, существуют числа $j_1, \ldots, j_r = \overline{1,N_2}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A) \neq 0$, все миноры матрицы A порядка $r+1$, окаймляющие минор $\Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A)$, равны нулю (если они существуют).

6.2. Базис и размерность

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$*.*

Пусть e *— базис множества* Q *длины* r*. Тогда:* $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q) = r$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ *— линейно независимые векторы.*

Доказательство. Так как e — базис множества Q длины r, то: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы.

Рассмотрим подпространство $L(e_1, \ldots, e_r)$. Так как e — базис множества Q длины r, то: $Q \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$, e — базис подпространства $L(e_1, \ldots, e_r)$ длины r.

Пусть $x_1, \ldots, x_{r+1} \in Q$. Обозначим: $\tilde{x}_i^j = [x_i]^j(e)$ при: $i = \overline{1, r+1}$, $j = \overline{1, r}$. Очевидно: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{r \times (r+1)}$, $\tilde{x}_i = [x_i](e)$ при $i = \overline{1, N}$.

Пусть $\tilde{x} = \tilde{\Theta}$ (здесь $\tilde{\Theta}$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{r \times (r+1)}$). Тогда $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{r+1} = \tilde{\theta}$ (здесь $\tilde{\theta}$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^r$). Следовательно, $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{r+1}$ — линейно зависимые столбцы.

Пусть $\tilde{x} \neq \tilde{\Theta}$. Тогда существует число $r_0 = \overline{1, r}$, существуют числа $i_1, \ldots, i_{r_0} = \overline{1, r+1}$, существуют числа $j_1, \ldots, j_{r_0} = \overline{1, r}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \cdots < i_{r_0}$, $j_1 < \cdots < j_{r_0}$, $\Delta_{i_1, \ldots, i_{r_0}}^{j_1, \ldots, j_{r_0}}(\tilde{x}) \neq 0$, все миноры матрицы $\tilde{x}$ порядка r_0+1, окаймляющие минор $\Delta_{i_1, \ldots, i_{r_0}}^{j_1, \ldots, j_{r_0}}(\tilde{x})$, равны нулю (если они существуют). Согласно теореме о базисном миноре, $\{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{r+1}\} \subseteq L(\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{r_0}})$. Так как: $r_0 \leqslant r < r+1$, то $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{r+1}$ — линейно зависимые столбцы.

Итак, $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{r+1}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда $x_1, \ldots, x_{r+1}$ — линейно зависимые векторы. Итак, $\operatorname{rank}(Q) = r$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $N \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_N \in L$*. Тогда* $\dim\big(L(x_1, \ldots, x_N)\big) = \operatorname{rank}\big(\{x_1, \ldots, x_N\}\big)$.

Доказательство. Обозначим, $r = \operatorname{rank}\big(\{x_1, \ldots, x_N\}\big)$. Тогда $r \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Так как $r \leqslant N$, то $r \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $r = 0$. Так как: $r = 0$, $\operatorname{rank}\big(\{x_1, \ldots, x_N\}\big) = r$, то $x_1, \ldots, x_N = \theta$. Тогда: $\dim\big(L(x_1, \ldots, x_N)\big) = \dim\big(\{\theta\}\big) = 0 = r$.

Пусть $r \neq 0$. Тогда $r \in \mathbb{N}$. Так как: $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}\big(\{x_1, \ldots, x_N\}\big) = r$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_r$, удовлетворяющие условию: e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_N\}$ длины r. Тогда e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_N)$ длины r. Следовательно, $\dim\big(L(x_1, \ldots, x_N)\big) = r$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$.

Пусть: $N \in \mathbb{N}$*,* $N < \operatorname{rank}(Q)$*,* $x_1, \ldots, x_N \in Q$*,* $x_1, \ldots, x_N$ *— линейно независимые векторы. Тогда существует вектор* $u \in Q$*, удовлетворяющий условию:* $x_1, \ldots, x_N$*,* u *— линейно независимые векторы.*

Доказательство. Предположим, что для любого вектора $u \in Q$ справедливо утверждение: $x_1, \ldots, x_N$, u — линейно зависимые векторы.

Очевидно: $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in Q$, $x_1, \ldots, x_N$ — линейно независимые векторы.

Пусть $u \in Q$. Тогда $x_1, \ldots, x_N$, u — линейно зависимые векторы. Так как $x_1, \ldots, x_N$ — линейно независимые векторы, то $u \in L(x_1, \ldots, x_N)$. Итак, $(x_1, \ldots, x_N)$ — базис множества Q длины N. Тогда $\operatorname{rank}(Q) = N$ (что противоречит утверждению: $N < \operatorname{rank}(Q)$). Итак, существует вектор $u \in Q$, удовлетворяющий условию: $x_1, \ldots, x_N$, u — линейно независимые векторы. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$.

Пусть: N_1*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $N_1 < N_2 \leqslant \operatorname{rank}(Q)$*,* $x_1, \ldots, x_{N_1} \in Q$*,* $x_1, \ldots, x_{N_1}$ *— линейно независимые векторы. Тогда существуют векторы* $x_{N_1+1}, \ldots, x_{N_2} \in Q$*, удовлетворяющие условию:* $x_1, \ldots, x_{N_2}$ *— линейно независимые векторы.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q_2 \subseteq L$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q_2) = N_2$*;* $Q_1 \subseteq Q_2$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q_1) = N_1$.

Пусть: $(e_1, \ldots, e_{N_1})$ *— базис множества* Q_1, $N_1 < N_2$. *Тогда существуют векторы* $e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}$*, удовлетворяющие условию:* $(e_1, \ldots, e_{N_2})$ *— базис множества* Q_2.

Доказательство. Так как $(e_1, \ldots, e_{N_1})$ — базис множества Q_1, то: $e_1, \ldots, e_{N_1} \in Q_1$, $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — линейно независимые векторы. Так как $Q_1 \subseteq Q_2$, то: $e_1, \ldots, e_{N_1} \in Q_2$, $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — линейно независимые векторы. Так как: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2 = \operatorname{rank}(Q_2)$, $e_1, \ldots, e_{N_1} \in Q_2$, $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — линейно независимые векторы, то существуют векторы $e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2} \in Q_2$, удовлетворяющие условию: $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — линейно независимые векторы. Так как: $N_2 \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q_2) = N_2$, $e_1, \ldots, e_{N_2} \in Q_2$, $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — линейно независимые векторы, то $(e_1, \ldots, e_{N_2})$ — базис множества Q_2. $\square$

Лекция 7. Подпространства линейных пространств (2-й семестр)

7.1. Операции над множествами векторов

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим множество $P(L)$ (напоминание: $P(L) = \{Q \colon Q \subseteq L\}$).

Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq L$. Обозначим:

$$Q_1 + Q_2 = \{x_1 + x_2 \colon x_1 \in Q_1 \wedge x_2 \in Q_2\} = \bigl\{u \colon \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \in Q_1 \wedge x_2 \in Q_2 \wedge u = x_1 + x_2)\bigr\}.$$

Очевидно, $Q_1 + Q_2 \subseteq L$. Обозначим: $F_1(Q_1, Q_2) = Q_1 + Q_2$ при Q_1, $Q_2 \subseteq L$. Будем говорить, что F_1 — стандартная операция сложения на множестве $P(L)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $Q \subseteq L$. Обозначим:

$$\lambda Q = \{\lambda x \colon x \in Q\} = \bigl\{u \colon \exists x (x \in Q \wedge u = \lambda x)\bigr\}.$$

Очевидно, $\lambda Q \subseteq L$. Обозначим: $F_2(\lambda, Q) = \lambda Q$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $Q \subseteq L$. Будем говорить, что F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $P(L)$.

Очевидно, $\{\theta\} \subseteq L$. Будем говорить, что $\{\theta\}$ — стандартный нулевой элемент на множестве $P(L)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$.

1. *Пусть* $Q \subseteq L$. *Тогда* $Q + \varnothing = \varnothing$.
2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Тогда* $\lambda\varnothing = \varnothing$.
3. *Пусть:* $Q \subseteq L$, $x_0 \in L$. *Тогда:*

$$Q + \{x_0\} = \{x + x_0 \colon x \in Q\} = \bigl\{u \colon \exists x (x \in Q \wedge u = x + x_0)\bigr\}.$$

4. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_0 \in L$. *Тогда* $\lambda\{x_0\} = \{\lambda x_0\}$.

Доказательство.

1. Очевидно:

$$Q + \varnothing = \bigl\{u \colon \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \in Q \wedge x_2 \in \varnothing \wedge u = x_1 + x_2)\bigr\} = \varnothing.$$

2. Очевидно:

$$\lambda\varnothing = \bigl\{u \colon \exists x (x \in \varnothing \wedge u = \lambda x)\bigr\} = \varnothing.$$

3. Пусть $u \in Q + \{x_0\}$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q$, $x_2 \in \{x_0\}$, $u = x_1 + x_2$. Следовательно: $x_1 \in Q$, $x_2 = x_0$, $u = x_1 + x_2$. Тогда: $x_1 \in Q$, $u = x_1 + x_0$.

Пусть существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in Q$, $u = x + x_0$. Тогда: $x \in Q$, $x_0 \in \{x_0\}$, $u = x + x_0$. Следовательно, $u \in Q + \{x_0\}$. Итак:

$$Q + \{x_0\} = \bigl\{u \colon \exists x (x \in Q \wedge u = x + x_0)\bigr\}.$$

4. Пусть $u \in \lambda\{x_0\}$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in \{x_0\}$, $u = \lambda x$. Следовательно: $x = x_0$, $u = \lambda x$. Тогда $u = \lambda x_0$. Так как $\lambda x_0 \in \{\lambda x_0\}$, то $u \in \{\lambda x_0\}$.

Пусть $u \in \{\lambda x_0\}$. Тогда $u = \lambda x_0$. Следовательно: $x_0 \in \{x_0\}$, $u = \lambda x_0$. Тогда $u \in \lambda\{x_0\}$. Итак, $\lambda\{x_0\} = \{\lambda x_0\}$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть* Q_1*,* $Q_2 \subseteq L$*. Тогда* $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$*.*
2. *Пусть* Q_1*,* Q_2*,* $Q_3 \subseteq L$*. Тогда* $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$*.*
3. *Пусть* $Q \subseteq L$*. Тогда* $Q + \{\theta\} = Q$*.*
4. *Пусть:* α*,* $\beta \in \mathbb{K}$*,* $Q \subseteq L$*. Тогда* $(\alpha\beta)Q = \alpha(\beta Q)$*.*
5. *Пусть* $Q \subseteq L$*. Тогда* $1Q = Q$*.*
6. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* Q_1*,* $Q_2 \subseteq L$*. Тогда* $\lambda(Q_1 + Q_2) = \lambda Q_1 + \lambda Q_2$*.*

Доказательство.

1. Пусть $u \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $u = x_1 + x_2$. Следовательно:

$$u = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in Q_2 + Q_1.$$

Пусть $u \in Q_2 + Q_1$. Тогда существуют векторы x_2, x_1, удовлетворяющие условиям: $x_2 \in Q_2$, $x_1 \in Q_1$, $u = x_2 + x_1$. Следовательно:

$$u = x_2 + x_1 = x_1 + x_2 \in Q_1 + Q_2.$$

Итак, $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$.

2. Пусть $u \in (Q_1 + Q_2) + Q_3$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $u = (x_1 + x_2) + x_3$. Следовательно:

$$u = (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) \in Q_1 + (Q_2 + Q_3).$$

Пусть $u \in Q_1 + (Q_2 + Q_3)$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $u = x_1 + (x_2 + x_3)$. Следовательно:

$$u = x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 \in (Q_1 + Q_2) + Q_3.$$

Итак, $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$.

3. Очевидно:

$$Q + \{\theta\} = \bigl\{u\colon \exists x(x \in Q \wedge u = x + \theta)\bigr\} = \bigl\{u\colon \exists x(x \in Q \wedge u = x)\bigr\} = Q.$$

4. Пусть $u \in (\alpha\beta)Q$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in Q$, $u = (\alpha\beta)x$. Следовательно:

$$u = (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \in \alpha(\beta Q).$$

Пусть $u \in \alpha(\beta Q)$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in Q$, $u = \alpha(\beta x)$. Следовательно:

$$u = \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \in (\alpha\beta)Q.$$

Итак, $(\alpha\beta)Q = \alpha(\beta Q)$.

5. Очевидно:

$$1Q = \bigl\{u\colon \exists x(x \in Q \wedge u = 1x)\bigr\} = \bigl\{u\colon \exists x(x \in Q \wedge u = x)\bigr\} = Q.$$

6. Пусть $u \in \lambda(Q_1+Q_2)$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $u = \lambda(x_1 + x_2)$. Следовательно:

$$u = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in \lambda Q_1 + \lambda Q_2.$$

Пусть $u \in \lambda Q_1 + \lambda Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q$, $x_2 \in Q_2$, $u = \lambda x_1 + \lambda x_2$. Следовательно:

$$u = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) \in \lambda(Q_1 + Q_2).$$

Итак, $\lambda(Q_1 + Q_2) = \lambda Q_1 + \lambda Q_2$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq L$. *Тогда:*

$$Q_1 + \cdots + Q_r = \{x_1 + \cdots + x_r \colon x_1 \in Q_1 \wedge \cdots \wedge x_r \in Q_r\} =$$
$$= \bigl\{u \colon \exists x_1 \cdots \exists x_r (x_1 \in Q_1 \wedge \cdots \wedge x_r \in Q_r \wedge u = x_1 + \cdots + x_r)\bigr\}.$$

7.2. Операции над подпространствами

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$.

1. Пусть Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L. *Тогда* $Q_1 + Q_2$ *— подпространство пространства* L.

2. Пусть Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L. *Тогда* Q_1, $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$.

3. Пусть: Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L, $\dim(Q_1) = +\infty \vee \dim(Q_2) = +\infty$. *Тогда* $\dim(Q_1 + Q_2) = +\infty$.

4. Пусть: $r_1 \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_{r_1} \in L$, $r_2 \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_{r_2} \in L$. *Тогда:*

$$L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2}) = L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2}).$$

5. Пусть Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L. *Тогда* $\dim(Q_1+Q_2) \leqslant \dim(Q_1)+\dim(Q_2)$.

6. Пусть: Q *— подпространство пространства* L, $Q_0 \subseteq Q$, $Q_0 \neq \varnothing$. *Тогда* $Q + Q_0 = Q$.

Доказательство.

1. Очевидно, $Q_1 + Q_2 \subseteq L$. Так как Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, то Q_1, $Q_2 \neq \varnothing$. Тогда $Q_1 + Q_2 \neq \varnothing$.

Пусть x, $y \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, y_1, y_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$; $y_1 \in Q_1$, $y_2 \in Q_2$, $y = y_1 + y_2$. Так как Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, то:

$$x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in Q_1 + Q_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1+x_2$. Так как Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, то:

$$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in Q_1 + Q_2.$$

Итак, $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L.

2. Пусть $x \in Q_1$. Так как Q_2 — подпространство пространства L, то $\theta \in Q_2$. Тогда: $x = x + \theta \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_1 \subseteq Q_1 + Q_2$.

Пусть $x \in Q_2$. Так как Q_1 — подпространство пространства L, то $\theta \in Q_1$. Тогда: $x = \theta + x \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$.

3. Пусть $\dim(Q_1) = +\infty$. Так как Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, то $Q_1 \subseteq Q_1 + Q_2$. Тогда: $\dim(Q_1 + Q_2) \geqslant \dim(Q_1) = +\infty$. Следовательно, $\dim(Q_1 + Q_2) = +\infty$.

Пусть $\dim(Q_2) = +\infty$. Так как Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, то $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$. Тогда: $\dim(Q_1 + Q_2) \geqslant \dim(Q_2) = +\infty$. Следовательно, $\dim(Q_1 + Q_2) = +\infty$.

4. Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2})$. Тогда существуют векторы u_1, u_2, удовлетворяющие условиям: $u_1 \in L(x_1, \ldots, x_{r_1})$, $u_2 \in L(y_1, \ldots, y_{r_2})$, $u = u_1 + u_2$. Так как $u_1 \in L(x_1, \ldots, x_{r_1})$, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u_1 = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}$. Так как $u_2 \in L(y_1, \ldots, y_{r_2})$, то существуют числа $\beta^1, \ldots, \beta^{r_2} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u_2 = \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}$. Тогда:

$$\begin{gathered} u = u_1 + u_2 = (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}) = \\ = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2} \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2}). \end{gathered}$$

Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2})$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_1}$, $\beta^1, \ldots, \beta^{r_2} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}$. Следовательно:

$$\begin{gathered} u = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2} = \\ = (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}) \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2}). \end{gathered}$$

Итак, $L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2}) = L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2})$.

5. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Тогда N_1, $N_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$.

Пусть $N_1 = 0$. Так как: $N_1 = 0$, $\dim(Q_1) = N_1$, то $Q_1 = \{\theta\}$. Тогда:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2).$$

Пусть $N_2 = 0$. Так как: $N_2 = 0$, $\dim(Q_2) = N_2$, то $Q_2 = \{\theta\}$. Тогда:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2).$$

Пусть $N_1 = +\infty \vee N_2 = +\infty$. Так как: $N_1 = +\infty \vee N_2 = +\infty$, $\dim(Q_1) = N_1 \wedge \dim(Q_2) = N_2$, то $\dim(Q_1 + Q_2) = +\infty$. Тогда:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = +\infty = \dim(Q_1) + \dim(Q_2).$$

Пусть: N_1, $N_2 \neq 0$, N_1, $N_2 \neq +\infty$. Тогда N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Так как: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_1) = N_1$, $\dim(Q_2) = N_2$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, $f_1, \ldots, f_{N_2}$, удовлетворяющие условиям: $(e_1, \ldots, e_{N_1})$ — базис подпространства Q_1, $(f_1, \ldots, f_{N_2})$ — базис подпространства Q_2. Тогда: $Q_1 = L(e_1, \ldots, e_{N_1})$, $Q_2 = L(f_1, \ldots, f_{N_2})$. Следовательно:

$$\begin{gathered} \dim(Q_1 + Q_2) = \dim\bigl(L(e_1, \ldots, e_{N_1}) + L(f_1, \ldots, f_{N_2})\bigr) = \dim\bigl(L(e_1, \ldots, e_{N_1}, f_1, \ldots, f_{N_2})\bigr) = \\ = \operatorname{rank}\bigl(\{e_1, \ldots, e_{N_1}, f_1, \ldots, f_{N_2}\}\bigr) \leqslant N_1 + N_2. \end{gathered}$$

6. Пусть $x \in Q + Q_0$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q$, $x_2 \in Q_0$, $x = x_1 + x_2$. Так как: $x_2 \in Q_0$, $Q_0 \subseteq Q$, то $x_2 \in Q$. Так как: Q — подпространство пространства L; x_1, $x_2 \in Q$; $x = x_1 + x_2$, то $x \in Q$.

Пусть $x \in Q$. Так как $Q_0 \neq \varnothing$, то существует вектор x_2, удовлетворяющий условию: $x_2 \in Q_0$. Так как $Q_0 \subseteq Q$, то $x_2 \in Q$. Так как: Q — подпространство пространства L; x, $x_2 \in Q$; $x_2 \in Q_0$, то: $x = \bigl(x + (-1)x_2\bigr) + x_2 \in Q + Q_0$. Итак, $Q + Q_0 = Q$. □

7.3. Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств

Определение (линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L.

1. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, если:

$$\forall x_1 \in Q_1 \cdots \forall x_r \in Q_r \big(x_1 + \cdots + x_r = \theta \implies x_1 = \theta \wedge \cdots \wedge x_r = \theta\big).$$

2. Будем говорить, что Q — прямая сумма подпространств $Q_1, \ldots, Q_r$, если: $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, $Q = Q_1 + \cdots + Q_r$.
3. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Обозначим:

$$Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_r = Q_1 + \cdots + Q_r.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства L. Очевидно, Q — линейно независимое подпространство.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Подпространства Q_1, Q_2 линейно независимы тогда и только тогда, когда $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$.*

Доказательство. Пусть Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства. Так как Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, то: $\theta \in Q_1$, $\theta \in Q_2$. Тогда $\theta \in Q_1 \cap Q_2$. Пусть $x \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: $x \in Q_1$, $x \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства L, то: $x \in Q_1$, $(-1)x \in Q_2$, $x + (-1)x = \theta$. Так как Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства, то $x = \theta$. Итак, $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$.

Пусть $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$. Пусть: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_1 + x_2 = \theta$. Так как Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, то: $x_1 \in Q_1$, $x_1 = (-1)x_2 \in Q_2$; $x_2 = (-1)x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$. Тогда x_1, $x_2 \in Q_1 \cap Q_2$. Так как $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$, то x_1, $x_2 = \theta$. Итак, Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L. Подпространства $Q_1, \ldots, Q_r$ линейно независимы тогда и только тогда, когда:*

$$\forall x_1 \in Q_1 \cdots \forall x_r \in Q_r \forall y_1 \in Q_1 \cdots \forall y_r \in Q_r$$
$$\big(x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_r\big).$$

Доказательство. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $y_1 \in Q_1, \ldots, y_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L, то: $x_1 - y_1 \in Q_1, \ldots, x_r - y_r \in Q_r$, $(x_1 - y_1) + \cdots + (x_r - y_r) = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $x_1 - y_1 = \theta, \ldots, x_r - y_r = \theta$. Тогда: $x_1 = y_1, \ldots, x_r = y_r$.

Пусть:

$$\forall x_1 \in Q_1 \cdots \forall x_r \in Q_r \forall y_1 \in Q_1 \cdots \forall y_r \in Q_r$$
$$\big(x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_r\big).$$

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L, то: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $\theta \in Q_1, \ldots, \theta \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta + \cdots + \theta$ (здесь выражение $\theta + \cdots + \theta$ содержит r слагаемых). Тогда $x_1, \ldots, x_r = \theta$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$.

1. Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L, $\sigma \in S_r$. *Тогда* $Q_{\sigma(1)}, \ldots, Q_{\sigma(r)}$ *— линейно независимые подпространства.*

2. Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L, $r_0 \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, $k_1 < \cdots < k_{r_0}$. *Тогда* $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ *— линейно независимые подпространства.*

3. Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ *— некоторые объекты,* $r_0 \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, $k_1 < \cdots < k_{r_0}$, $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ *— линейно независимые подпространства пространства* L, $Q_k = \{\theta\}$ *при:* $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. *Тогда* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство.

1. Пусть: $x_1 \in Q_{\sigma(1)}, \ldots, x_r \in Q_{\sigma(r)}$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Тогда: $x_{\sigma^{-1}(1)} \in Q_1, \ldots, x_{\sigma^{-1}(r)} \in Q_r$, $x_{\sigma^{-1}(1)} + \cdots + x_{\sigma^{-1}(r)} = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(r)} = \theta$. Тогда $x_1, \ldots, x_r = \theta$. Итак, $Q_{\sigma(1)}, \ldots, Q_{\sigma(r)}$ — линейно независимые подпространства.

2. Пусть: $x_1 \in Q_{k_1}, \ldots, x_{r_0} \in Q_{k_{r_0}}$, $x_1 + \cdots + x_{r_0} = \theta$. Пусть: $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Так как Q_k — подпространство пространства L, то $\theta \in Q_k$. Обозначим: $y_{k_1} = x_1, \ldots, y_{k_{r_0}} = x_{r_0}$, $y_k = \theta$ при: $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда: $y_1 \in Q_1, \ldots, y_r \in Q_r$, $y_1 + \cdots + y_r = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $y_{k_1}, \ldots, y_{k_{r_0}} = \theta$. Тогда $x_1, \ldots, x_{r_0} = \theta$. Итак, $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства.

3. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Пусть: $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Так как: $Q_k = \{\theta\}$, $x_k \in Q_k$, то $x_k = \theta$. Тогда: $x_{k_1} \in Q_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}} \in Q_{k_{r_0}}$, $x_{k_1} + \cdots + x_{k_{r_0}} = \theta$. Так как $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства, то $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}} = \theta$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$.

Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ — некоторые объекты, $k_0 = \overline{1, r}$, Q_{k_0} — подпространство пространства L, $Q_k = \{\theta\}$ при: $k = \overline{1, r}$, $k \neq k_0$. Так как Q_{k_0} — линейно независимое подпространство, то $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Пусть: $Q_k = \{\theta\}$ при $k = \overline{1, r}$. Так как: Q_1 — подпространство пространства L, $Q_k = \{\theta\}$ при $k = \overline{2, r}$, то $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$.

1. Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L; $x_{k,1}, \ldots, x_{k,N_k}$ *— линейно независимые векторы подпространства* Q_k *при* $k = \overline{1, r}$. *Тогда* $x_{1,1}, \ldots, x_{1,N_1}, \ldots, x_{r,1}, \ldots, x_{r,N_r}$ *— линейно независимые векторы подпространства* $Q_1 + \cdots + Q_r$.

2. Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L; $(e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k})$ *— базис подпространства* Q_k *при* $k = \overline{1, r}$. *Тогда* $(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r})$ *— базис подпространства* $Q_1 + \cdots + Q_r$.

3. Пусть: $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ *— линейно независимые векторы пространства* L; $Q_k = L(e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k})$ *при* $k = \overline{1, r}$. *Тогда* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство.

1. Пусть: $k=\overline{1,r}$, $m=\overline{1,N_k}$. Так как $Q_1,\ldots,Q_r$ — подпространства пространства L, то $Q_k\subseteq Q_1+\cdots+Q_r$. Так как $x_{k,m}\in Q_k$, то $x_{k,m}\in Q_1+\cdots+Q_r$.

Пусть: $\alpha^{k,m}\in\mathbb{K}$ при: $k=\overline{1,r}$, $m=\overline{1,N_k}$; $\sum\limits_{\substack{k=\overline{1,r},\\ m=\overline{1,N_k}}}\alpha^{k,m}x_{k,m}=\theta$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{m=1}^{N_k}\alpha^{k,m}x_{k,m}=\theta$. Пусть $k=\overline{1,r}$. Так как: Q_k — подпространство пространства L, $x_{k,m}\in Q_k$ при $m=\overline{1,N_k}$, то $\sum\limits_{m=1}^{N_k}\alpha^{k,m}x_{k,m}\in Q_k$. Так как $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $\sum\limits_{m=1}^{N_k}\alpha^{k,m}x_{k,m}=\theta$ при $k=\overline{1,r}$. Пусть $k=\overline{1,r}$. Так как: $\sum\limits_{m=1}^{N_k}\alpha^{k,m}x_{k,m}=\theta$, $x_{k,1},\ldots,x_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы, то: $\alpha^{k,m}=0$ при $m=\overline{1,N_k}$. Итак, $x_{1,1},\ldots,x_{1,N_1},\ldots,x_{r,1},\ldots,x_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы.

2. Пусть $k=\overline{1,r}$. Так как $(e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k})$ — базис подпространства Q_k, то $Q_k=L(e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k})$. Тогда:

$$\begin{aligned}Q_1+\cdots+Q_r&=L(e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1})+\cdots+L(e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r})=\\&=L(e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}).\end{aligned}$$

Так как: $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L; $e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы подпространства Q_k при $k=\overline{1,r}$, то $e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы. Тогда $(e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r})$ — базис подпространства $Q_1+\cdots+Q_r$.

3. Пусть: $x_k\in Q_k$ при $k=\overline{1,r}$; $\sum\limits_{k=1}^{r}x_k=\theta$. Пусть $k=\overline{1,r}$. Так как: $Q_k=L(e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k})$, $x_k\in Q_k$, то существуют числа $\alpha^{k,1},\ldots,\alpha^{k,N_k}\in\mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x_k=\sum\limits_{m=1}^{N_k}\alpha^{k,m}e_{k,m}$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{r}x_k=\theta$, то $\sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{m=1}^{N_k}\alpha^{k,m}e_{k,m}=\theta$. Тогда $\sum\limits_{\substack{k=\overline{1,r},\\ m=\overline{1,N_k}}}\alpha^{k,m}e_{k,m}=\theta$. Так как $e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы, то: $\alpha^{k,m}=0$ при: $k=\overline{1,r}$, $m=\overline{1,N_k}$. Тогда: $x_k=\sum\limits_{m=1}^{N_k}\alpha^{k,m}e_{k,m}=\theta$ при $k=\overline{1,r}$. Итак, $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r\in\mathbb{N}$*,* $Q_1,\ldots,Q_r$ *— подпространства пространства* L*,* $\dim(Q_k)\in\mathbb{N}$ *при* $k=\overline{1,r}$*.*

1. Пусть $Q_1,\ldots,Q_r$ *— линейно независимые подпространства. Тогда* $\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=\dim(Q_1)+\cdots+\dim(Q_r)$*.*

2. Пусть $\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=\dim(Q_1)+\cdots+\dim(Q_r)$*. Тогда* $Q_1,\ldots,Q_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство. Пусть $k=\overline{1,r}$. Обозначим, $N_k=\dim(Q_k)$. Тогда $N_k\in\mathbb{N}$. Так как: $N_k\in\mathbb{N}$, $\dim(Q_k)=N_k$, то существуют векторы $e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k}$, удовлетворяющие условию: $(e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k})$ — базис подпространства Q_k. Тогда $Q_k=L(e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k})$.

1. Так как: $Q_1,\ldots,Q_r$ — линейно независимые подпространства, $(e_{k,1},\ldots,e_{k,N_k})$ — базис подпространства Q_k при $k=\overline{1,r}$, то $(e_{1,1},\ldots,e_{1,N_1},\ldots,e_{r,1},\ldots,e_{r,N_r})$ — базис подпространства $Q_1+\cdots+Q_r$. Тогда $\dim(Q_1+\cdots+Q_r)=N_1+\cdots+N_r$.

2. Предположим, что $e_{1,1},\dots,e_{1,N_1},\dots,e_{r,1},\dots,e_{r,N_r}$ — линейно зависимые векторы. Тогда:

$$\dim(Q_1+\dots+Q_r)=\dim\bigl(L(e_{1,1},\dots,e_{1,N_1})+\dots+L(e_{r,1},\dots,e_{r,N_r})\bigr)=$$
$$=\dim\bigl(L(e_{1,1},\dots,e_{1,N_1},\dots,e_{r,1},\dots,e_{r,N_r})\bigr)=\operatorname{rank}\bigl(\{e_{1,1},\dots,e_{1,N_1},\dots,e_{r,1},\dots,e_{r,N_r}\}\bigr)<$$
$$<N_1+\dots+N_r$$

(что противоречит утверждению $\dim(Q_1+\dots+Q_r)=N_1+\dots+N_r$). Итак, $e_{1,1},\dots,e_{1,N_1},\dots,e_{r,1},\dots,e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы. Так как: $Q_k=L(e_{k,1},\dots,e_{k,N_k})$ при $k=\overline{1,r}$, то $Q_1,\dots,Q_r$ — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r\in\mathbb{N}$*,* $Q_1,\dots,Q_r$ *— подпространства пространства* L*.*

1. Пусть $Q_1,\dots,Q_r$ *— линейно независимые подпространства. Тогда* $\dim(Q_1+\dots+Q_r)=\dim(Q_1)+\dots+\dim(Q_r)$*.*

2. Пусть: $\dim(Q_1+\dots+Q_r)=\dim(Q_1)+\dots+\dim(Q_r)$*,* $\dim(Q_k)\neq+\infty$ *при* $k=\overline{1,r}$*. Тогда* $Q_1,\dots,Q_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство.

1. Пусть $k=\overline{1,r}$. Обозначим, $N_k=\dim(Q_k)$. Тогда $N_k\in\overline{\mathbb{Z}}_+$.

Пусть $\forall k=\overline{1,r}(N_k=0)$. Так как: $\forall k=\overline{1,r}(N_k=0)$, $\forall k=\overline{1,r}\bigl(\dim(Q_k)=N_k\bigr)$, то $\forall k=\overline{1,r}(Q_k=\{\theta\})$. Тогда:

$$\dim(Q_1+\dots+Q_r)=\dim\bigl(\{\theta\}\bigr)=0=N_1+\dots+N_r.$$

Пусть $\exists k=\overline{1,r}(N_k=+\infty)$. Так как: $\exists k=\overline{1,r}(N_k=+\infty)$, $\forall k=\overline{1,r}\bigl(\dim(Q_k)=N_k\bigr)$, то $\dim(Q_1+\dots+Q_r)=+\infty$. Тогда:

$$\dim(Q_1+\dots+Q_r)=+\infty=N_1+\dots+N_r.$$

Пусть: $\exists k=\overline{1,r}(N_k\neq 0)$, $\forall k=\overline{1,r}(N_k\neq+\infty)$. Тогда существует число $r_0=\overline{1,r}$, существуют числа $k_1,\dots,k_{r_0}=\overline{1,r}$, удовлетворяющие условиям: $k_1<\dots<k_{r_0}$, $N_{k_1},\dots,N_{k_{r_0}}\neq 0$, $N_{k_1},\dots,N_{k_{r_0}}\neq+\infty$, $N_k=0$ при: $k=\overline{1,r}$, $k\notin\{k_1,\dots,k_{r_0}\}$. Следовательно: $r_0=\overline{1,r}$, $k_1,\dots,k_{r_0}=\overline{1,r}$, $k_1<\dots<k_{r_0}$, $N_{k_1},\dots,N_{k_{r_0}}\in\mathbb{N}$, $N_k=0$ при: $k=\overline{1,r}$, $k\notin\{k_1,\dots,k_{r_0}\}$.

Так как $Q_1,\dots,Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $Q_{k_1},\dots,Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства. Так как: $Q_{k_1},\dots,Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства, $N_{k_1},\dots,N_{k_{r_0}}\in\mathbb{N}$, $\dim(Q_{k_1})=N_{k_1}$, … , $\dim(Q_{k_{r_0}})=N_{k_{r_0}}$, то $\dim(Q_{k_1}+\dots+Q_{k_{r_0}})=N_{k_1}+\dots+N_{k_{r_0}}$. Так как: $N_k=0$, $\dim(Q_k)=N_k$ при: $k=\overline{1,r}$, $k\notin\{k_1,\dots,k_{r_0}\}$, то: $Q_k=\{\theta\}$ при: $k=\overline{1,r}$, $k\notin\{k_1,\dots,k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\dim(Q_1+\dots+Q_r)=\dim(Q_{k_1}+\dots+Q_{k_{r_0}})=N_{k_1}+\dots+N_{k_{r_0}}=N_1+\dots+N_r.$$

2. Пусть $k=\overline{1,r}$. Обозначим, $N_k=\dim(Q_k)$. Тогда $N_k\in\mathbb{Z}_+$.

Пусть $\forall k=\overline{1,r}(N_k=0)$. Так как: $\forall k=\overline{1,r}(N_k=0)$, $\forall k=\overline{1,r}\bigl(\dim(Q_k)=N_k\bigr)$, то $\forall k=\overline{1,r}\bigl(Q_k=\{\theta\}\bigr)$. Тогда $Q_1,\dots,Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Пусть $\exists k=\overline{1,r}(N_k\neq 0)$. Тогда существует число $r_0=\overline{1,r}$, существуют числа $k_1,\dots,k_{r_0}=\overline{1,r}$, удовлетворяющие условиям: $k_1<\dots<k_{r_0}$, $N_{k_1},\dots,N_{k_{r_0}}\neq 0$, $N_k=0$ при: $k=\overline{1,r}$, $k\notin\{k_1,\dots,k_{r_0}\}$. Следовательно: $r_0=\overline{1,r}$, $k_1,\dots,k_{r_0}=\overline{1,r}$, $k_1<\dots<k_{r_0}$, $N_{k_1},\dots,N_{k_{r_0}}\in\mathbb{N}$, $N_k=0$ при: $k=\overline{1,r}$, $k\notin\{k_1,\dots,k_{r_0}\}$.

Так как: $N_k = 0$, $\dim(Q_k) = N_k$ при: $k = \overline{1,r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$, то: $Q_k = \{\theta\}$ при: $k = \overline{1,r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Так как $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N_1 + \cdots + N_r$, то:

$$\dim(Q_{k_1} + \cdots + Q_{k_{r_0}}) = \dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N_1 + \cdots + N_r = N_{k_1} + \cdots + N_{k_{r_0}}.$$

Так как: $\dim(Q_{k_1} + \cdots + Q_{k_{r_0}}) = N_{k_1} + \cdots + N_{k_{r_0}}$, $N_{k_1}, \ldots, N_{k_{r_0}} \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_{k_1}) = N_{k_1}$, $\ldots$, $\dim(Q_{k_{r_0}}) = N_{k_{r_0}}$, то $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства. Так как: $Q_k = \{\theta\}$ при: $k = \overline{1,r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$, то $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

7.4. Линейное дополнение одного подпространства до другого

Определение (линейное дополнение одного подпространства до другого). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Будем говорить, что D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства Q_2, если:

$$D \text{ — подпространство пространства } L,$$
$$Q_2 = Q_1 + D,$$
$$Q_1,\ D \text{ — линейно независимые подпространства.}$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Пусть D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства Q_2. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_2 = Q_1 + D$; Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Так как: Q_1, D — подпространства пространства L, $Q_2 = Q_1 + D$, то Q_1, $D \subseteq Q_2$.

Так как Q_1, D — линейно независимые подпространства, то $Q_1 \cap D = \{\theta\}$.

Так как: $Q_2 = Q_1 + D$; Q_1, D — линейно независимые подпространства, то $\dim(Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(D)$.

Очевидно, Q_1 — линейное дополнение подпространства D до подпространства Q_2.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $Q_1 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$. Тогда существует линейное дополнение D подпространства Q_1 до подпространства Q_2.*

Доказательство. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Тогда: N_1, $N_2 \in \mathbb{Z}_+$, $N_1 \leqslant N_2$.

Пусть $N_1 = 0$. Так как: $N_1 = 0$, $\dim(Q_1) = N_1$, то $Q_1 = \{\theta\}$. Обозначим, $D = Q_2$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = \{\theta\} + Q_2 = Q_2$. Так как: $Q_1 = \{\theta\}$, D — подпространство пространства L, то Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Пусть $N_1 = N_2$. Так как: Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $Q_1 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_1) = N_1$, $\dim(Q_2) = N_2$, $N_1 = N_2$, $N_2 \neq +\infty$, то $Q_1 = Q_2$. Обозначим, $D = \{\theta\}$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = Q_2 + \{\theta\} = Q_2$. Так как: Q_1 — подпространство пространства L, $D = \{\theta\}$, то Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Пусть: $N_1 \neq 0$, $N_1 \neq N_2$. Тогда: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$. Так как: $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_1) = N_1$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, удовлетворяющие условию: $(e_1, \ldots, e_{N_1})$ — базис подпространства Q_1. Тогда $Q_1 = L(e_1, \ldots, e_{N_1})$. Так как: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_1) = N_1$, $\dim(Q_2) = N_2$, $Q_1 \subseteq Q_2$, $(e_1, \ldots, e_{N_1})$ — базис подпространства Q_1, $N_1 < N_2$, то существуют векторы $e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}$, удовлетворяющие условию: $(e_1, \ldots, e_{N_2})$ — базис подпространства Q_2. Тогда $Q_2 = L(e_1, \ldots, e_{N_2})$. Обозначим, $D = L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2})$. Тогда:

$$D \text{ — подпространство пространства } L,$$

$$Q_1 + D = L(e_1, \ldots, e_{N_1}) + L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}) = L(e_1, \ldots, e_{N_2}) = Q_2.$$

Так как: $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — линейно независимые векторы, $Q_1 = L(e_1, \ldots, e_{N_1})$, $D = L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2})$, то Q_1, D — линейно независимые подпространства. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*.*

Пусть D *— линейное дополнение подпространства* $Q_1 \cap Q_2$ *до подпространства* Q_2*. Тогда* D *— линейное дополнение подпространства* Q_1 *до подпространства* $Q_1 + Q_2$*.*

Доказательство. Так как Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, то $Q_1 \cap Q_2$ — подпространство пространства L. Тогда $Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing$.

Так как D — линейное дополнение подпространства $Q_1 \cap Q_2$ до подпространства Q_2, то: D — подпространство пространства L, $Q_2 = Q_1 \cap Q_2 + D$; $Q_1 \cap Q_2$, D — линейно независимые подпространства.

Так как D — линейное дополнение подпространства $Q_1 \cap Q_2$ до подпространства Q_2, то: $D \subseteq Q_2$, $(Q_1 \cap Q_2) \cap D = \{\theta\}$.

Так как: Q_1 — подпространство пространства L, $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing$, то $Q_1 + Q_1 \cap Q_2 = Q_1$. Тогда:

$$Q_1 + Q_2 = Q_1 + (Q_1 \cap Q_2 + D) = (Q_1 + Q_1 \cap Q_2) + D = Q_1 + D.$$

Так как $D \subseteq Q_2$, то $Q_2 \cap D = D$. Тогда:

$$Q_1 \cap D = Q_1 \cap (Q_2 \cap D) = (Q_1 \cap Q_2) \cap D = \{\theta\}.$$

Следовательно, Q_1, D — линейно независимые подпространства. Итак, D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства $Q_1 + Q_2$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*,* $\dim(Q_2) \neq +\infty$*. Тогда* $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$*.*

Доказательство. Так как: $Q_1 \cap Q_2$, Q_2 — подпространства пространства L, $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$, то существует линейное дополнение D подпространства $Q_1 \cap Q_2$ до подпространства Q_2. Тогда $\dim(Q_2) = \dim(Q_1 \cap Q_2) + \dim(D)$. Следовательно, $\dim(D) = \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$.

Так как D — линейное дополнение подпространства $Q_1 \cap Q_2$ до подпространства Q_2, то D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства $Q_1 + Q_2$. Тогда $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(D)$. Следовательно, $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$. $\square$

Лекция 8. Общие сведения о линейных операторах и изоморфизмах (2-й семестр)

8.1. Линейный оператор и изоморфизм

Замечание. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Обозначим, $\overline{\lambda} = \mathrm{Re}(\lambda) - i\,\mathrm{Im}(\lambda)$. Очевидно, $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим, $\overline{\lambda} = \lambda$. Очевидно, $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{Q}$. Обозначим, $\overline{\lambda} = \lambda$. Очевидно, $\overline{\lambda} \in \mathbb{Q}$.

Определение (линейный оператор). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — линейный оператор, если:

1. $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1;
2. $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$;
3. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть A — линейный оператор. Тогда: $A(x+y) = A(x)+A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$.

Пусть: $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Тогда A — линейный оператор.

Определение (полулинейный оператор). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — полулинейный оператор, если:

1. $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1;
2. $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$;
3. $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть A — полулинейный оператор. Тогда: $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$.

Пусть: $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Тогда A — полулинейный оператор.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Обозначим через $\mathrm{lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \to L_2$, A — линейный оператор.

2. Обозначим через $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор.

3. Будем говорить, что A — изоморфизм пространства L_1 на пространство L_2, если: A — обратимая функция, $\mathrm{D}(A) = L_1$, $\mathrm{R}(A) = L_2$, $A(x + y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$.

4. Будем писать $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$, если A — изоморфизм пространства L_1 на пространство L_2. Утверждение $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$ можно читать: «пространство L_1 изоморфно пространству L_2 относительно функции A».

5. Будем писать $L_1 \approx L_2$ если $\exists A(L_1 \overset{A}{\approx} L_2)$. Утверждение $L_1 \approx L_2$ читается: «пространство L_1 изоморфно пространству L_2».

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Тогда: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A) = L_1$.
   Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A) = L_1$. Тогда $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$.

2. Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. Тогда: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A) = L_1$, $\mathrm{R}(A) = L_2$, A — обратимый оператор.
   Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A) = L_1$, $\mathrm{R}(A) = L_2$, A — обратимый оператор. Тогда $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$.

3. Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. Тогда: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{R}(A) = L_2$, A — обратимый оператор.
   Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{R}(A) = L_2$, A — обратимый оператор. Тогда $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ *— подпространство пространства* $\mathrm{Fun}(L_1, L_2)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $\mathrm{Lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{Fun}(L_1, L_2)$.

2. Пусть Θ — нулевой элемент пространства $\mathrm{Fun}(L_1, L_2)$. Докажем, что $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\Theta\colon L_1 \implies L_2$.
   Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:
$$\Theta(x + y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta(x) + \Theta(y).$$
   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:
$$\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x).$$

3. Пусть A, $B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Докажем, что $A+B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $A+B\colon L_1 \implies L_2$.
   Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:
$$\begin{aligned}(A + B)(x + y) = A(x + y) + B(x + y) = \big(A(x) + A(y)\big) + \big(B(x) + B(y)\big) =\\ = \big(A(x) + B(x)\big) + \big(A(y) + B(y)\big) = (A + B)(x) + (A + B)(y).\end{aligned}$$
   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:
$$(A + B)(\lambda x) = A(\lambda x) + B(\lambda x) = \lambda A(x) + \lambda B(x) = \lambda\big(A(x) + B(x)\big) = \lambda(A + B)(x).$$

4. Пусть: $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Докажем, что $\alpha A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\alpha A\colon L_1 \implies L_2$.
   Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:
$$(\alpha A)(x + y) = \alpha A(x + y) = \alpha\big(A(x) + A(y)\big) = \alpha A(x) + \alpha A(y) = (\alpha A)(x) + (\alpha A)(y).$$
   Пусть: $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:
$$(\alpha A)(\beta x) = \alpha A(\beta x) = \alpha\big(\beta A(x)\big) = \beta\big(\alpha A(x)\big) = \beta(\alpha A)(x). \quad \square$$

Замечание (примеры линейных операторов). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Обозначим: $I(x) = x$ при $x \in L$. Докажем, что $L \overset{I}{\approx} L$. Очевидно: I — обратимая функция, $\mathrm{D}(I) = L$, $\mathrm{R}(I) = L$.

Пусть x, $y \in L$. Тогда: $I(x + y) = x + y = I(x) + I(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда: $I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x)$.

2. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L. Обозначим: $h_e(x) = [x](e)$ при $x \in L$. Докажем, что $L \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$. Очевидно: h_e — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_e) = L$, $\mathrm{R}(h_e) = \mathbb{K}^N$.

Пусть x, $y \in L$. Тогда: $h_e(x + y) = [x + y](e) = [x](e) + [y](e) = h_e(x) + h_e(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда: $h_e(\lambda x) = [\lambda x](e) = \lambda[x](e) = \lambda h_e(x)$.

Очевидно: $h_e^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{x}^k e_k$ при $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$.

3. Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим: $\hat{A}(x) = Ax$ при $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. Будем говорить, что $\hat{A}$ — оператор умножения на матрицу A. Докажем, что $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{N_1}, \mathbb{K}^{N_2})$. Очевидно, $\hat{A}\colon \mathbb{K}^{N_1} \implies \mathbb{K}^{N_2}$.

Пусть x, $y \in \mathbb{K}^{N_1}$. Тогда: $\hat{A}(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = \hat{A}(x) + \hat{A}(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. Тогда: $\hat{A}(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda\hat{A}(x)$.

Очевидно:

$$\mathrm{R}(\hat{A}) = \Bigl\{y\colon \exists x\bigl(x \in \mathbb{K}^{N_1} \land y = \hat{A}(x)\bigr)\Bigr\} = \bigl\{y\colon \exists x(x \in \mathbb{K}^{N_1} \land y = Ax)\bigr\} =$$
$$= \bigl\{y\colon \exists x^1 \cdots \exists x^{N_1}(x^1 \in \mathbb{K} \land \cdots \land x^{N_1} \in \mathbb{K} \land y = x^k A_k)\bigr\} = L(A_1, \ldots, A_{N_1}).$$

Тогда:

$$\mathrm{R}(\hat{A}) \text{ — подпространство пространства } \mathbb{K}^{N_2},$$
$$\dim\bigl(\mathrm{R}(\hat{A})\bigr) = \dim\bigl(L(A_1, \ldots, A_{N_1})\bigr) = \mathrm{rank}(A).$$

8.2. Простейшие свойства линейных операторов

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$.

1. Справедливы утверждения: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$*,* $A(\theta_1) = \theta_2$.

2. Пусть Q *— подпространство пространства* L_2*. Тогда* $\mathrm{D}(A, Q)$ *— подпространство пространства* L_1.

Справедливо утверждение: $\ker(A)$ *— подпространство пространства* L_1.

3. Пусть Q *— подпространство пространства* L_1*. Тогда* $A[Q]$ *— подпространство пространства* L_2.

Справедливо утверждение: $\mathrm{R}(A)$ *— подпространство пространства* L_2.

4. Пусть Q *— подпространство пространства* L_1*. Тогда:* $A|_Q \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $\ker(A|_Q) = Q \cap \ker(A)$.

5. Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $A(x_1), \ldots, A(x_r)$ *— линейно зависимые векторы.*

6. Пусть $Q \subseteq L_1$*. Тогда* $\mathrm{rank}\bigl(A[Q]\bigr) \leqslant \mathrm{rank}(Q)$.

Пусть Q *— подпространство пространства* L_1*. Тогда* $\dim\bigl(A[Q]\bigr) \leqslant \dim(Q)$.

Справедливо утверждение: $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) \leqslant \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$.

Доказательство.

1. Так как $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, то $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$. Очевидно: $A(\theta_1) = A(0\theta_1) = 0A(\theta_1) = \theta_2$.

2. Пусть Q — подпространство пространства L_2. Очевидно: $\mathrm{D}(A,Q) \subseteq \mathrm{D}(A) \subseteq L_1$. Так как Q — подпространство пространства L_2, то: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A(\theta_1) = \theta_2 \in Q$. Тогда $\theta_1 \in \mathrm{D}(A,Q)$.

Пусть x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A,Q)$. Тогда: $x_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1) \in Q$; $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_2) \in Q$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) \in Q$. Тогда $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A,Q)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A,Q)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $A(x) \in Q$. Следовательно: $\lambda x \in \mathrm{D}(A)$, $A(\lambda x) = \lambda A(x) \in Q$. Тогда $\lambda x \in \mathrm{D}(A,Q)$. Итак, $\mathrm{D}(A,Q)$ — подпространство пространства L_1.

Так как: $\{\theta_2\}$ — подпространство пространства L_2, $\ker(A) = \mathrm{D}\bigl(A,\{\theta_2\}\bigr)$, то $\ker(A)$ — подпространство пространства L_1.

3. Пусть Q — подпространство пространства L_1. Очевидно: $A[Q] \subseteq \mathrm{R}(A) \subseteq L_2$. Так как Q — подпространство пространства L_1, то: $\theta_1 \in Q$, $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$. Тогда $A(\theta_1) \in A[Q]$.

Пусть y_1, $y_2 \in A[Q]$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q$, $x_1 \in \mathrm{D}(A)$, $y_1 = A(x_1)$; $x_2 \in Q$, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $y_2 = A(x_2)$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in Q$, $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $y_1 + y_2 = A(x_1) + A(x_2) = A(x_1 + x_2)$. Тогда $y_1 + y_2 \in A[Q]$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in A[Q]$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in Q$, $x \in \mathrm{D}(A)$, $y = A(x)$. Следовательно: $\lambda x \in Q$, $\lambda x \in \mathrm{D}(A)$, $\lambda y = \lambda A(x) = A(\lambda x)$. Тогда $\lambda y \in A[Q]$. Итак, $A[Q]$ — подпространство пространства L_2.

Так как: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A) = A\bigl[\mathrm{D}(A)\bigr]$, то $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2.

4. Так как $A\colon L_1 \to L_2$, то $A|_Q : L_1 \to L_2$. Так как: Q, $\mathrm{D}(A)$ — подпространства пространства L_1, $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A)$, то $\mathrm{D}(A|_Q)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x, $y \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $A|_Q(x+y) = A(x+y) = A(x) + A(y) = A|_Q(x) + A|_Q(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $A|_Q(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda\, A|_Q(x)$. Итак, $A|_Q \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$.

Очевидно:

$$\ker(A|_Q) = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(A|_Q) \wedge A|_Q(x) = \theta_2\bigr\} = \bigl\{x\colon x \in Q \wedge x \in \mathrm{D}(A) \wedge A(x) = \theta_2\bigr\} = \\ = \bigl\{x\colon x \in Q \wedge x \in \ker(A)\bigr\} = Q \cap \ker(A).$$

5. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta_1$, $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$. Так как $\lambda^k x_k = \theta_1$, то: $\lambda^k A(x_k) = A(\lambda^k x_k) = A(\theta_1) = \theta_2$. Так как $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$, то $A(x_1), \ldots, A(x_r)$ — линейно зависимые векторы.

6. Пусть $Q \subseteq L_1$. Обозначим: $r_1 = \mathrm{rank}(Q)$, $r_2 = \mathrm{rank}\bigl(A[Q]\bigr)$. Тогда r_1, $r_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Предположим, что $r_1 < r_2$. Тогда: $r_1 \in \mathbb{Z}_+$, $r_2 \in \overline{\mathbb{N}}$.

Так как: $r_1 \in \mathbb{Z}_+$, $r_2 \in \overline{\mathbb{N}}$, $\mathrm{rank}\bigl(A[Q]\bigr) = r_2$, $r_1 + 1 \leqslant r_2$, то существуют векторы $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$, удовлетворяющие условиям: $y_1, \ldots, y_{r_1+1} \in A[Q]$, $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно независимые векторы. Пусть $k = \overline{1, r_1+1}$. Так как $y_k \in A[Q]$, то существует вектор x_k, удовлетворяющий условиям: $x_k \in Q$, $x_k \in \mathrm{D}(A)$, $y_k = A(x_k)$. Так как: $r_1 \in \mathbb{Z}_+$, $\mathrm{rank}(Q) = r_1$, $x_1, \ldots, x_{r_1+1} \in Q$, $r_1 + 1 > r_1$, то $x_1, \ldots, x_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $x_1, \ldots, x_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы, $x_k \in \mathrm{D}(A)$, $y_k = A(x_k)$ при $k = \overline{1, r_1+1}$, то $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r_2 \leqslant r_1$.

Пусть Q — подпространство пространства L_1. Тогда $A[Q]$ — подпространство пространства L_2. Так как $Q \subseteq L_1$, то $\mathrm{rank}\bigl(A[Q]\bigr) \leqslant \mathrm{rank}(Q)$. Так как: Q — подпространство пространства L_1, $A[Q]$ — подпространство пространства L_2, то $\dim\bigl(A[Q]\bigr) \leqslant \dim(Q)$.

Так как: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A) = A\bigl[\mathrm{D}(A)\bigr]$, то $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) \leqslant$

$\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Обозначим, $\mathrm{rank}(A) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr)$. Тогда:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) \leqslant \dim(L_2);$$
$$\mathrm{rank}(A) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) \leqslant \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \leqslant \dim(L_1).$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2, L_3 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. Обозначим, $BA = B \circ A$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2*,* L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*
Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $BA \in \mathrm{lin}(L_1, L_3)$*.*
Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $BA \in \mathrm{Lin}(L_1, L_3)$*.*
Пусть: $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$*,* $L_2 \overset{B}{\approx} L_3$*. Тогда* $L_1 \overset{BA}{\approx} L_3$*.*

Доказательство. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. Так как: $A\colon L_1 \to L_2$, $B\colon L_2 \to L_3$, то $BA\colon L_1 \to L_3$. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(B)$ — подпространство пространства L_2, $\mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\bigl(A, \mathrm{D}(B)\bigr)$, то $\mathrm{D}(BA)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(BA)$. Тогда:

$$(BA)(x_1 + x_2) = B\bigl(A(x_1 + x_2)\bigr) = B(Ax_1 + Ax_2) = B(Ax_1) + B(Ax_2) = (BA)x_1 + (BA)x_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Тогда:

$$(BA)(\lambda x) = B\bigl(A(\lambda x)\bigr) = B\bigl(\lambda A(x)\bigr) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x).$$

Итак, $BA \in \mathrm{lin}(L_1, L_3)$.

Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$, то $BA \in \mathrm{lin}(L_1, L_3)$. Так как $\mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{D}(B)$, то $\mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}(A)$. Тогда: $\mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}(A) = L_1$. Итак, $BA \in \mathrm{Lin}(L_1, L_3)$.

Пусть: $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$, $L_2 \overset{B}{\approx} L_3$. Так как: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$, то $BA \in \mathrm{Lin}(L_1, L_3)$. Так как $\mathrm{D}(B) \subseteq \mathrm{R}(A)$, то $\mathrm{R}(BA) = \mathrm{R}(B)$. Тогда: $\mathrm{R}(BA) = \mathrm{R}(B) = L_3$. Так как A, B — обратимые операторы, то BA — обратимый оператор. Итак, $L_1 \overset{BA}{\approx} L_3$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2*,* L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*
1. *Пусть:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B_1, B_2 \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$*.*
2. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$*.*
3. *Пусть:* $A_1, A_2 \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$*.*
4. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$*.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\bigl((B_1 + B_2)A\bigr)x = (B_1 + B_2)(Ax) = B_1(Ax) + B_2(Ax) = (B_1A)x + (B_2A)x = (B_1A + B_2A)x.$$

2. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\bigl((\lambda B)A\bigr)x = (\lambda B)(Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \bigl(\lambda(BA)\bigr)x.$$

3. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\bigl(B(A_1 + A_2)\bigr)x = B\bigl((A_1 + A_2)x\bigr) = B\bigl(A_1x + A_2x\bigr) = B(A_1x) + B(A_2x) =$$
$$= (BA_1)x + (BA_2)x = (BA_1 + BA_2)x.$$

4. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\bigl(B(\lambda A)\bigr)x = B\bigl((\lambda A)x\bigr) = B\bigl(\lambda A(x)\bigr) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \bigl(\lambda(BA)\bigr)x. \quad \square$$

8.3. Простейшие свойства линейных обратимых операторов

Утверждение (критерий обратимости линейного оператора). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*. Оператор* A *является обратимым тогда и только тогда, когда* $\ker(A) = \{\theta_1\}$*.*

Доказательство. Пусть A — обратимый оператор. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$, то $\theta_1 \in \ker(A)$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = \theta_2$. С другой стороны: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$. Так как A — обратимый оператор, то $x = \theta_1$. Итак, $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Пусть: x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = Ax_2$. Тогда: $x_1 - x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = \theta_2$. Следовательно, $x_1 - x_2 \in \ker(A)$. Так как $\ker(A) = \{\theta_1\}$, то $x_1 - x_2 = \theta_1$. Тогда $x_1 = x_2$. Итак, A — обратимый оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* A *— обратимый оператор. Тогда:* $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$*,* A^{-1} *— обратимый оператор.*

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$*. Тогда* $L_2 \overset{A^{-1}}{\approx} L_1$*.*

2. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* A *— обратимый оператор,* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы. Тогда* $Ax_1, \ldots, Ax_r$ *— линейно независимые векторы.*

3. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* A *— обратимый оператор,* $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$*. Тогда* $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) = \operatorname{rank}(Q)$.

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* A *— обратимый оператор,* $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$*,* Q *— подпространство пространства* L_1*. Тогда* $\dim\big(A[Q]\big) = \dim(Q)$.

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* A *— обратимый оператор. Тогда* $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$.

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$*. Тогда* $\dim(L_1) = \dim(L_2)$.

Доказательство.

1. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор. Так как $A\colon L_1 \to L_2$, то $A^{-1}\colon L_2 \to L_1$. Так как: $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2, $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A)$, то $\mathrm{D}(A^{-1})$ — подпространство пространства L_2.

Пусть y_1, $y_2 \in \mathrm{R}(A)$. Тогда:

$$A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}\big(A(A^{-1}y_1) + A(A^{-1}y_2)\big) = A^{-1}\big(A(A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2)\big) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда:

$$A^{-1}(\lambda y) = A^{-1}\big(\lambda A(A^{-1}y)\big) = A^{-1}\Big(A\big(\lambda A^{-1}(y)\big)\Big) = \lambda A^{-1}(y).$$

Итак, $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$. Очевидно, A^{-1} — обратимый оператор.

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, то: $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$, A^{-1} — обратимый оператор. Очевидно: $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A) = L_2$, $\mathrm{R}(A^{-1}) = \mathrm{D}(A) = L_1$. Итак, $L_2 \overset{A^{-1}}{\approx} L_1$.

2. Предположим, что $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы. Пусть $k = \overline{1, r}$. Так как $x_k \in \mathrm{D}(A)$, то: $Ax_k \in \mathrm{R}(A)$, $x_k = A^{-1}(Ax_k)$. Так как: $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$, $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы, то $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы (что противоречит условию). Итак, $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно независимые векторы.

3. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $Q \subseteq \mathrm{D}(A) \subseteq L_1$, то $\operatorname{rank}\bigl(A[Q]\bigr) \leqslant \operatorname{rank}(Q)$. Очевидно: $A[Q] \subseteq \mathrm{R}(A) \subseteq L_2$, $A^{-1}\bigl[A[Q]\bigr] = (A^{-1}A)[Q] = I_1|_{\mathrm{D}(A)}[Q] = Q \cap \mathrm{D}(A)$. Так как $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, то: $A[Q] \subseteq L_2$, $A^{-1}\bigl[A[Q]\bigr] = Q$. Так как $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$, то $\operatorname{rank}(Q) \leqslant \operatorname{rank}\bigl(A[Q]\bigr)$. Итак, $\operatorname{rank}\bigl(A[Q]\bigr) = \operatorname{rank}(Q)$.

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, Q — подпространство пространства L_1. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, Q — подпространство пространства L_1, то $A[Q]$ — подпространство пространства L_2. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, то $\operatorname{rank}\bigl(A[Q]\bigr) = \operatorname{rank}(Q)$. Так как: Q — подпространство пространства L_1, $A[Q]$ — подпространство пространства L_2, то $\dim\bigl(A[Q]\bigr) = \dim(Q)$.

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор. Так как: $\mathrm{D}(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A) = A\bigl[\mathrm{D}(A)\bigr]$, то $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$.

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, то $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$. Тогда: $\dim(L_1) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim(L_2)$. □

Теорема. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L_1$, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$;* $\dim(L_1) = \dim(L_2)$, $\dim(L_2) \neq +\infty$. *Тогда* $L_1 \approx L_2$.

Доказательство. Обозначим, $N = \dim(L_2)$. Тогда: $N \in \mathbb{Z}_+$, $\dim(L_1) = N$.

Пусть $N = 0$. Так как $\dim(L_1)$, $\dim(L_2) = N$, то: $L_1 = \{\theta_1\}$, $L_2 = \{\theta_2\}$. Обозначим, $A(\theta_1) = \theta_2$. Тогда $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$.

Пусть $N \neq 0$. Тогда $N \in \mathbb{N}$. Так как $\dim(L_1)$, $\dim(L_2) = N$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, $f_1, \ldots, f_N$, удовлетворяющие условиям: $(e_1, \ldots, e_N)$ — базис пространства L_1, $(f_1, \ldots, f_N)$ — базис пространства L_2. Тогда: $L_1 \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$, $L_2 \overset{h_f}{\approx} \mathbb{K}^N$. Следовательно: $L_1 \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$, $\mathbb{K}^N \overset{h_f^{-1}}{\approx} L_2$. Тогда $L_1 \overset{h_f^{-1}h_e}{\approx} L_2$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1)$, $\dim(L_2) = N$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. Пусть $x \in L_1$. Тогда $(h_f^{-1}h_e)(x) = [x]^k(e) f_k$.

8.4. Первая теорема Фредгольма

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L_1$, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$;* $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$. *Тогда* $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$.

Доказательство. Так как: $\ker(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$, то $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) \neq +\infty$.

Так как: $\ker(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$, то существует линейное дополнение Q подпространства $\ker(A)$ до подпространства $\mathrm{D}(A)$. Тогда: $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\ker(A) \cap Q = \{\theta_1\}$, $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) = \dim\bigl(\ker(A)\bigr) + \dim(Q)$. Так как $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) = \dim\bigl(\ker(A)\bigr) + \dim(Q)$, то $\dim(Q) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$.

Рассмотрим оператор $A|_Q$. Очевидно: $A|_Q \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A) = Q$, $\ker(A|_Q) = Q \cap \ker(A) = \{\theta_1\}$. Так как: $A|_Q \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $\ker(A|_Q) = \{\theta_1\}$, то: $A|_Q \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $A|_Q$ — обратимый оператор. Тогда $\dim\bigl(\mathrm{R}(A|_Q)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A|_Q)\bigr)$. Следовательно: $\dim\bigl(\mathrm{R}(A|_Q)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A|_Q)\bigr) = \dim(Q) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$.

Очевидно: $\mathrm{R}(A|_Q) = A[Q] \subseteq \mathrm{R}(A)$. Пусть $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathrm{D}(A)$, $y = Ax$. Так как: $x \in \mathrm{D}(A)$, $\mathrm{D}(A) = \ker(A) + Q$, то существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in \ker(A)$, $x_2 \in Q$, $x = x_1 + x_2$.

Тогда: $y = Ax = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \theta_2 + A|_Q x_2 = A|_Q x_2 \in \mathrm{R}(A|_Q)$. Следовательно, $\mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{R}(A|_Q)$. Итак, $\mathrm{R}(A|_Q) = \mathrm{R}(A)$. Тогда: $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A|_Q)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_1)$, $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$. Тогда:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr).$$

Теорема (1-я теорема Фредгольма)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(L_1) = \dim(L_2)$*,* $\dim(L_2) \neq +\infty$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда* $\mathrm{R}(A) = L_2 \iff \ker(A) = \{\theta_1\}$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{R}(A) = L_2$. Тогда: $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim(L_2) = \dim(L_1) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) \neq +\infty$, то $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A)\bigr)$. Тогда $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) - \dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr)$. Так как $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$, то $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Так как $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, то: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор. Тогда $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$. Следовательно: $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) = \dim(L_1) = \dim(L_2)$. Так как: $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2, $\dim(L_2) \neq +\infty$, то $\mathrm{R}(A) = L_2$. $\square$

8.5. Факультативный материал. Операции над частично определёнными векторными функциями

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — множество, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим множество $\mathrm{fun}(Q, L)$ (напоминание: $\mathrm{fun}(Q, L)$ — множество всех функций φ, удовлетворяющих условию $\varphi\colon Q \to L$).

Пусть φ_1, $\varphi_2\colon Q \to L$. Обозначим:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad x \in \mathrm{D}(\varphi_1) \cap \mathrm{D}(\varphi_2).$$

Очевидно, $\varphi_1 + \varphi_2\colon Q \to L$. Обозначим: $F_1(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 + \varphi_2$ при φ_1, $\varphi_2\colon Q \to L$. Будем говорить, что F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathrm{fun}(Q, L)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi\colon Q \to L$. Обозначим:

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x), \quad x \in \mathrm{D}(\varphi).$$

Очевидно, $\lambda\varphi\colon Q \to L$. Обозначим: $F_2(\lambda, \varphi) = \lambda\varphi$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi\colon Q \to L$. Будем говорить, что F_2 — стандартная операция умножения на множестве $\mathrm{fun}(Q, L)$.

Обозначим:

$$\Theta(x) = \theta, \quad x \in Q.$$

Очевидно, $\Theta\colon Q \implies L$. Будем говорить, что Θ — стандартный нулевой элемент множества $\mathrm{fun}(Q, L)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* Q *— множество,* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть φ_1*,* $\varphi_2\colon Q \to L$*. Тогда* $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1$*.*

2. Пусть $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3\colon Q \to L$. *Тогда* $(\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3 = \varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3)$.
3. Пусть $\varphi\colon Q \to L$. *Тогда* $\varphi + \Theta = \varphi$.
4. Пусть $\varphi\colon Q \to L$. *Тогда* $\varphi + (-1)\varphi = \Theta|_{\mathrm{D}(\varphi)}$.
5. Пусть: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$, $\varphi\colon Q \to L$. *Тогда* $(\alpha\beta)\varphi = \alpha(\beta\varphi)$.
6. Пусть $\varphi\colon Q \to L$. *Тогда* $1\varphi = \varphi$.
7. Пусть: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$, $\varphi\colon Q \to L$. *Тогда* $(\alpha+\beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$.
8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi_1,\ \varphi_2\colon Q \to L$. *Тогда* $\lambda(\varphi_1+\varphi_2) = \lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2$.

Доказательство.
1. Очевидно:

$$\mathrm{D}(\varphi_1+\varphi_2) = \mathrm{D}(\varphi_1) \cap \mathrm{D}(\varphi_2) = \mathrm{D}(\varphi_2) \cap \mathrm{D}(\varphi_1) = \mathrm{D}(\varphi_2+\varphi_1).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}(\varphi_1+\varphi_2)$. Тогда:

$$(\varphi_1+\varphi_2)(x) = \varphi_1(x)+\varphi_2(x) = \varphi_2(x)+\varphi_1(x) = (\varphi_2+\varphi_1)(x).$$

Следовательно, $\varphi_1+\varphi_2 = \varphi_2+\varphi_1$.
2. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big((\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3\big) = \big(\mathrm{D}(\varphi_1) \cap \mathrm{D}(\varphi_2)\big) \cap \mathrm{D}(\varphi_3) = \mathrm{D}(\varphi_1) \cap \big(\mathrm{D}(\varphi_2) \cap \mathrm{D}(\varphi_3)\big) = \\ = \mathrm{D}\big(\varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3)\big).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3\big)$. Тогда:

$$\big((\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3\big)(x) = \big(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\big)+\varphi_3(x) = \varphi_1(x)+\big(\varphi_2(x)+\varphi_3(x)\big) = \\ = \big(\varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3)\big)(x).$$

Следовательно, $(\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3 = \varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3)$.
3. Очевидно:

$$\mathrm{D}(\varphi+\Theta) = \mathrm{D}(\varphi) \cap Q = \mathrm{D}(\varphi).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}(\varphi+\Theta)$. Тогда:

$$(\varphi+\Theta)(x) = \varphi(x)+\Theta(x) = \varphi(x)+\theta = \varphi(x).$$

Следовательно, $\varphi+\Theta = \varphi$.
4. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big(\varphi+(-1)\varphi\big) = \mathrm{D}(\varphi) \cap \mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{D}(\varphi) \cap Q = \mathrm{D}(\Theta|_{\mathrm{D}(\varphi)}).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big(\varphi+(-1)\varphi\big)$. Тогда:

$$\big(\varphi+(-1)\varphi\big)(x) = \varphi(x)+(-1)\varphi(x) = \theta = \Theta(x) = \Theta|_{\mathrm{D}(\varphi)}(x).$$

Следовательно, $\varphi+(-1)\varphi = \Theta|_{\mathrm{D}(\varphi)}$.
5. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big((\alpha\beta)\varphi\big) = \mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{D}\big(\alpha(\beta\varphi)\big).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((\alpha\beta)\varphi\big)$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)\varphi\big)(x) = (\alpha\beta)\varphi(x) = \alpha\big(\beta\varphi(x)\big) = \big(\alpha(\beta\varphi)\big)(x).$$

Следовательно, $(\alpha\beta)\varphi = \alpha(\beta\varphi)$.

6. Очевидно, $\mathrm{D}(1\varphi) = \mathrm{D}(\varphi)$. Пусть $x \in \mathrm{D}(1\varphi)$. Тогда:

$$(1\varphi)(x) = 1\varphi(x) = \varphi(x).$$

Следовательно, $1\varphi = \varphi$.

7. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big((\alpha+\beta)\varphi\big) = \mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{D}(\varphi) \cap \mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{D}(\alpha\varphi + \beta\varphi).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((\alpha+\beta)\varphi\big)$. Тогда:

$$\big((\alpha+\beta)\varphi\big)(x) = (\alpha+\beta)\varphi(x) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x) = (\alpha\varphi+\beta\varphi)(x).$$

Следовательно, $(\alpha+\beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$.

8. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big(\lambda(\varphi_1+\varphi_2)\big) = \mathrm{D}(\varphi_1) \cap \mathrm{D}(\varphi_2) = \mathrm{D}(\lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big(\lambda(\varphi_1+\varphi_2)\big)$. Тогда:

$$\big(\lambda(\varphi_1+\varphi_2)\big)(x) = \lambda\big(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\big) = \lambda\varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x) = (\lambda\varphi_1+\lambda\varphi_2)(x).$$

Следовательно, $\lambda(\varphi_1+\varphi_2) = \lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* Q *— множество,* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть* $\varphi\colon Q \to L$*. Тогда* $0\varphi = \Theta|_{\mathrm{D}(\varphi)}$*.*
2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Тогда* $\lambda\Theta = \Theta$*.*

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\mathrm{D}(0\varphi) = \mathrm{D}(\varphi) = \mathrm{D}(\varphi) \cap Q = \mathrm{D}(\Theta|_{\mathrm{D}(\varphi)}).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}(0\varphi)$. Тогда:

$$(0\varphi)(x) = 0\varphi(x) = \theta = \Theta(x) = \Theta|_{\mathrm{D}(\varphi)}(x).$$

Следовательно, $0\varphi = \Theta|_{\mathrm{D}(\varphi)}$.

2. Очевидно, $\mathrm{D}(\lambda\Theta) = \mathrm{D}(\Theta)$. Пусть $x \in \mathrm{D}(\lambda\Theta)$. Тогда:

$$(\lambda\Theta)(x) = \lambda\Theta(x) = \lambda\theta = \theta = \Theta(x).$$

Следовательно, $\lambda\Theta = \Theta$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Справедливо утверждение* $\mathrm{lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{fun}(L_1, L_2)$*.*
2. *Справедливо утверждение* $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*.*
3. *Пусть* A*,* $B \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*. Тогда* $A + B \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*.*
4. *Пусть:* $\alpha \in \mathbb{K}$*,* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*. Тогда* $\alpha A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $\mathrm{lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{fun}(L_1, L_2)$.

2. Очевидно, $\Theta\colon L_1 \implies L_2$.
Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$\Theta(x+y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta(x) + \Theta(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x).$$

3. Очевидно: $A + B\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(A+B) = \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B)$. Так как: $\mathrm{D}(A)$, $\mathrm{D}(B)$ — подпространства пространства L_1, $\mathrm{D}(A+B) = \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(B)$, то $\mathrm{D}(A+B)$ — подпространство пространства L_1.
Пусть x, $y \in \mathrm{D}(A+B)$. Тогда:

$$(A+B)(x+y) = A(x+y) + B(x+y) = \big(A(x) + A(y)\big) + \big(B(x) + B(y)\big) = \\ = \big(A(x) + B(x)\big) + \big(A(y) + B(y)\big) = (A+B)(x) + (A+B)(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A+B)$. Тогда:

$$(A+B)(\lambda x) = A(\lambda x) + B(\lambda x) = \lambda A(x) + \lambda B(x) = \lambda\big(A(x) + B(x)\big) = \lambda(A+B)(x).$$

4. Очевидно: $\alpha A\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(\alpha A) = \mathrm{D}(A)$. Так как: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{D}(\alpha A) = \mathrm{D}(A)$, то $\mathrm{D}(\alpha A)$ — подпространство пространства L_1.
Пусть x, $y \in \mathrm{D}(\alpha A)$. Тогда:

$$(\alpha A)(x+y) = \alpha A(x+y) = \alpha\big(A(x) + A(y)\big) = \alpha A(x) + \alpha A(y) = (\alpha A)(x) + (\alpha A)(y).$$

Пусть: $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(\alpha A)$. Тогда:

$$(\alpha A)(\beta x) = \alpha A(\beta x) = \alpha\big(\beta A(x)\big) = \beta\big(\alpha A(x)\big) = \beta(\alpha A)(x). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2*,* L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*
1. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* B_1*,* $B_2 \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда:* $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$*.*
2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$*.*
3. Пусть: A_1*,* $A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $B(A_1 + A_2)|_{\mathrm{D}(BA_1 + BA_2)} = BA_1 + BA_2$*.*
4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $\lambda \neq 0$*,* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$*.*

Доказательство.
1. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big((B_1 + B_2)A\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_1 + B_2)\big\} = \\ = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge \big(Ax \in \mathrm{D}(B_1) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_2)\big)\Big\} = \\ = \Big\{x\colon \big(x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_1)\big) \wedge \big(x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B_2)\big)\Big\} = \\ = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(B_1A) \wedge x \in \mathrm{D}(B_2A)\big\} = \mathrm{D}(B_1A + B_2A).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((B_1 + B_2)A\big)$. Тогда:

$$\big((B_1 + B_2)A\big)x = (B_1 + B_2)(Ax) = B_1(Ax) + B_2(Ax) = (B_1A)x + (B_2A)x = (B_1A + B_2A)x.$$

2. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big((\lambda B)A\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(\lambda B)\big\} =$$
$$= \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\big\} = \mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((\lambda B)A\big)$. Тогда:

$$\big((\lambda B)A\big)x = (\lambda B)(Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x.$$

3. Пусть $x \in \mathrm{D}(BA_1 + BA_2)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(BA_1)$, $x \in \mathrm{D}(BA_2)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A_1)$, $A_1x \in \mathrm{D}(B)$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$, $A_2x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A_1)$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$, $A_1x + A_2x \in \mathrm{D}(B)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A_1 + A_2)$, $(A_1 + A_2)x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда $x \in \mathrm{D}\big(B(A_1 + A_2)\big)$. Следовательно, $\mathrm{D}(BA_1 + BA_2) \subseteq \mathrm{D}\big(B(A_1 + A_2)\big)$. Тогда:

$$\mathrm{D}\Big(B(A_1 + A_2)|_{\mathrm{D}(BA_1+BA_2)}\Big) = \mathrm{D}(BA_1 + BA_2) \cap \mathrm{D}\big(B(A_1 + A_2)\big) = \mathrm{D}(BA_1 + BA_2).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}(BA_1 + BA_2)$. Тогда:

$$(BA_1 + BA_2)x = (BA_1)x + (BA_2)x = B(A_1x) + B(A_2x) = B\big(A_1x + A_2x\big) =$$
$$= B\big((A_1 + A_2)x\big) = \big(B(A_1 + A_2)\big)x = B(A_1 + A_2)|_{\mathrm{D}(BA_1+BA_2)}(x).$$

4. Так как $\lambda \neq 0$, то:

$$\mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(\lambda A) \wedge (\lambda A)x \in \mathrm{D}(B)\big\} =$$
$$= \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge \lambda A(x) \in \mathrm{D}(B)\big\} = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\big\} = \mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big)$. Тогда:

$$\big(B(\lambda A)\big)x = B\big((\lambda A)x\big) = B\big(\lambda A(x)\big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x. \quad \square$$

Лекция 9. Ранг матрицы (1-й семестр)

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) = 0$. *Тогда* $A_1, \ldots, A_N$ *— линейно зависимые столбцы.*

Доказательство. Пусть $A = \Theta$ (здесь Θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N\times N}$). Тогда $A_1, \ldots, A_N = \tilde{\theta}$ (здесь $\tilde{\theta}$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^N$). Следовательно, $A_1, \ldots, A_N$ — линейно зависимые столбцы.

Пусть $A \neq \Theta$. Тогда существует число $r = \overline{1, N}$, существуют числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$, существуют числа $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\overline{\Delta}{}^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A) \neq 0$, все миноры матрицы A порядка $r+1$, окаймляющие минор $\overline{\Delta}{}^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A)$, равны нулю (если они существуют). Следовательно, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_N\}$ длины r. Так как $\det(A) = 0$, то $r \neq N$. Тогда $r < N$. Следовательно, $A_1, \ldots, A_N$ — линейно зависимые столбцы. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A) \neq 0$.

Пусть все миноры матрицы A порядка $r+1$, окаймляющие минор $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A)$, равны нулю (если они существуют).

Тогда: $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r; $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r.

Так как $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r, то $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\bigr) = r$. Так как $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r, то $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис подпространства $L(A_1, \ldots A_{N_1})$ длины r. Тогда $\dim\bigl(L(A_1, \ldots A_{N_1})\bigr) = r$.

Так как $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r, то $\operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}\bigr) = r$. Так как $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r, то $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис подпространства $L(A^1, \ldots, A^{N_2})$ длины r. Тогда $\dim\bigl(L(A^1, \ldots, A^{N_2})\bigr) = r$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Обозначим, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\bigr)$. Будем говорить, что $\operatorname{rank}(A)$ — ранг матрицы A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$.

1. *Справедливо утверждение:* $\operatorname{rank}(A) = \dim\bigl(L(A_1, \ldots, A_{N_1})\bigr)$.
2. *Справедливо утверждение:* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}\bigr)$.
3. *Справедливо утверждение:* $\operatorname{rank}(A) = \dim\bigl(L(A^1, \ldots, A^{N_2})\bigr)$.
4. *Пусть:* $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A) \neq 0$. *Пусть все миноры матрицы* A *порядка* $r+1$, *окаймляющие минор* $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A)$, *равны нулю (если они существуют). Тогда* $\operatorname{rank}(A) = r$.

Доказательство.

1. Очевидно: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\bigr) = \dim\bigl(L(A_1, \ldots, A_{N_1})\bigr)$.

2. Пусть $A = \Theta$ (здесь Θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$). Тогда: $A_1, \ldots, A_{N_1} = \tilde{\theta}_2$ (здесь $\tilde{\theta}_2$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N_2\times 1}$); $A^1, \ldots, A^{N_2} = \tilde{\theta}_1$ (здесь $\tilde{\theta}_1$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{1\times N_1}$). Следовательно:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{\tilde{\theta}_2\}\bigr) = 0 = \operatorname{rank}\bigl(\{\tilde{\theta}_1\}\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}\bigr).$$

Пусть $A \neq \Theta$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, существуют числа $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\overline{\Delta}^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A) \neq 0$, все миноры матрицы A порядка $r+1$, окаймляющие минор $\overline{\Delta}^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A)$, равны нулю (если они существуют). Следовательно: $\operatorname{rank}\big(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\big) = r$, $\operatorname{rank}\big(\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}\big) = r$. Тогда: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\big(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\big) = r = \operatorname{rank}\big(\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}\big)$.

3. Очевидно: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\big(\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}\big) = \dim\big(L(A^1, \ldots, A^{N_2})\big)$.
4. Очевидно, $\operatorname{rank}\big(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\big) = r$. Тогда: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\big(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\big) = r$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$.

1. Пусть: $A_1, \ldots, A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $\sigma \in S_{N_1}$. *Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N_1)}) = \operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{N_1}).$$

2. Пусть: $N_1 \geqslant 2$, $k = \overline{1, N_1}$, $A_1, \ldots, A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $X \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1})$. *Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{N_1}).$$

3. Пусть: $N_1 \geqslant 2$, $k = \overline{1, N_1}$, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$. *Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}_2, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}).$$

4. Пусть: $N_1 \geqslant 2$, $k = \overline{1, N_1}$, $A_1, \ldots, A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1})$. *Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{N_1}).$$

5. Пусть: $k = \overline{1, N_1}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $A_1, \ldots, A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$. *Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{N_1}).$$

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\operatorname{rank}(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N_1)}) = \operatorname{rank}\big(\{A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N_1)}\}\big) = \operatorname{rank}\big(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\big) = \\ = \operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{N_1}).$$

2. Достаточно доказать, что:

$$L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}) = L(A_1, \ldots, A_{N_1}).$$

Так как $X \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1})$, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m \neq k} \alpha^m A_m$.

Пусть $Y \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\beta^1, \ldots, \beta^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $Y = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m \neq k} \beta^m A_m + \beta^k (A_k + X)$. Следовательно:

$$Y = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m \neq k} \beta^m A_m + \beta^k (A_k + X) = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m \neq k} \beta^m A_m + \beta^k \Bigg(A_k + \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m \neq k} \alpha^m A_m\Bigg) =$$

$$= \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} (\beta^m + \beta^k\alpha^m)A_m + \beta^k A_k \in L(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

Пусть $Y \in L(A_1,\dots,A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\beta^1,\dots,\beta^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $Y = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1}} \beta^m A_m$. Следовательно:

$$Y = \sum_{m=\overline{1,N_1}} \beta^m A_m = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \beta^m A_m + \beta^k A_k =$$

$$= \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} (\beta^m - \beta^k\alpha^m)A_m + \beta^k\Bigg(A_k + \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m\Bigg) =$$

$$= \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} (\beta^m - \beta^k\alpha^m)A_m + \beta^k(A_k + X) \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_k+X,A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

3. Достаточно доказать, что:

$$L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = L(A_1,\dots,A_{k-1},\tilde{\theta}_2,A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1,\dots,\alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1},\dots,\alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m$. Следовательно:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + 1\tilde{\theta}_2 \in L(A_1,\dots,A_{k-1},\tilde{\theta}_2,A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1,\dots,A_{k-1},\tilde{\theta}_2,A_{k+1},\dots,A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1,\dots,\alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \alpha^k\tilde{\theta}_2$. Следовательно:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \alpha^k\tilde{\theta}_2 = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

4. Так как $A_k \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1})$, то:

$$-A_k \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

Тогда:

$$\operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{N_1}) = \operatorname{rank}\big(A_1,\dots,A_{k-1},A_k+(-A_k),A_{k+1},\dots,A_{N_1}\big) =$$
$$= \operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{k-1},\tilde{\theta}_2,A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

5. Достаточно доказать, что:

$$L(A_1,\dots,A_{k-1},\lambda A_k,A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = L(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1,\dots,A_{k-1},\lambda A_k,A_{k+1},\dots,A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1,\dots,\alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \alpha^k(\lambda A_k)$. Следовательно:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \alpha^k(\lambda A_k) = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + (\alpha^k\lambda)A_k \in L(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1, \ldots, A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1}} \alpha^m A_m$. Так как $\lambda \neq 0$, то:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1}} \alpha^m A_m = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \alpha^k A_k = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \frac{\alpha^k}{\lambda}(\lambda A_k) \in$$
$$\in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}). \quad \square$$

Лекция 10. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ; 1-й семестр)

10.1. Линейное операторное уравнение

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $b \in L_2$. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} x \in \mathrm{D}(A), \\ A(x) = b. \end{cases} \tag{1}$$

Будем говорить, что (1) — линейное операторное уравнение. Пусть $b = \theta_2$. Будем говорить, что (1) — однородное линейное операторное уравнение. Пусть $b \neq \theta_2$. Будем говорить, что (1) — неоднородное линейное операторное уравнение.

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} x \in \mathrm{D}(A), \\ A(x) = \theta_2. \end{cases} \tag{2}$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$. Рассмотрим уравнение (2). Очевидно: $\ker(A)$ — множество всех решений уравнения (2), $\ker(A)$ — подпространство пространства L_1.

1. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$ (общее решение уравнения (2): $x = \theta_1$).

2. Пусть: $m \in \mathbb{N}$, $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = m$. Тогда существуют векторы $e_1, \ldots, e_m$, удовлетворяющие условию: $(e_1, \ldots, e_m)$ — базис подпространства $\ker(A)$. Следовательно, $\ker(A) = L(e_1, \ldots, e_m)$ (общее решение уравнения (2): $x = C^1 e_1 + \cdots + C^m e_m$).

3. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = +\infty$. Ничего сказать нельзя.

Будем говорить, что e — фундаментальная совокупность решений (ФСР) уравнения (2), если e — базис подпространства $\ker(A)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $b \in L_2$. Рассмотрим уравнение (1). Обозначим через Q множество всех решений уравнения (1). Тогда $Q \subseteq L_1$.

Пусть: $x_1 \in Q$, $x_2 \in Q$. Тогда: $x_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1) = b$; $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_2) = b$. Следовательно: $x_1 - x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 - x_2) = A(x_1) - A(x_2) = b - b = \theta_2$. Тогда $x_1 - x_2 \in \ker(A)$.

Пусть: $x_0 \in Q$, $\tilde{x} \in \ker(A)$. Тогда: $x_0 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_0) = b$; $\tilde{x} \in \mathrm{D}(A)$, $A(\tilde{x}) = \theta_2$. Следовательно: $x_0 + \tilde{x} \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_0 + \tilde{x}) = A(x_0) + A(\tilde{x}) = b + \theta_2 = b$. Тогда $x_0 + \tilde{x} \in Q$.

Пусть $x_0 \in Q$. Тогда $Q = \{x_0\} + \ker(A)$.

1. Пусть $b \notin \mathrm{R}(A)$. Тогда $Q = \varnothing$.

2. Пусть $b \in \mathrm{R}(A)$. Тогда существует вектор x_0, удовлетворяющий условию $x_0 \in Q$. Следовательно, $Q = \{x_0\} + \ker(A)$ (общее решение уравнения (1): $x = x_0 + \tilde{x}$).

2.1. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Следовательно: $Q = \{x_0\} + \ker(A) = \{x_0\} + \{\theta_1\} = \{x_0\}$ (общее решение уравнения (1): $x = x_0$).

2.2. Пусть: $m \in \mathbb{N}$, $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = m$. Тогда существуют векторы $e_1, \ldots, e_m$, удовлетворяющие условию: $(e_1, \ldots, e_m)$ — базис подпространства $\ker(A)$. Следовательно, $\ker(A) = L(e_1, \ldots, e_m)$. Тогда: $Q = \{x_0\} + \ker(A) = \{x_0\} + L(e_1, \ldots, e_m)$ (общее решение уравнения (1): $x = x_0 + C^1 e_1 + \cdots + C^m e_m$).

2.3. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = +\infty$. Ничего сказать нельзя.

10.2. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $b \in \mathbb{K}^{N_2}$. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{K}^{N_1}, \\ Ax = b. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, уравнение (3) можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} x^1, \dots, x^{N_1} \in \mathbb{K}; \\ A^1_1 x^1 + \dots + A^1_{N_1} x^{N_1} = b^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^{N_2}_1 x^1 + \dots + A^{N_2}_{N_1} x^{N_1} = b^{N_2}. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, уравнение (3) можно переписать в виде линейного операторного уравнения:

$$\begin{cases} x \in \mathrm{D}(\hat{A}), \\ \hat{A}(x) = b. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь: $\hat{A}(x) = Ax$ при $x \in \mathbb{K}^{N_1}$.

Будем говорить, что A — основная матрица уравнения (3). Будем говорить, что (A, b) — расширенная матрица уравнения (3).

10.3. Квадратная СЛАУ

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Будем говорить, что X — обратная матрица к матрице A, если: $X \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $AX = I$.

Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A) \neq 0$. Обозначим:

$$\big(\alpha_*(A)\big)^j_i = \frac{(-1)^{i+j}\overline{\Delta}^i_j(A)}{\det(A)}, \quad i,\, j = \overline{1, N}.$$

Очевидно, $\alpha_*(A) \in \mathbb{K}^{N \times N}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$.

1. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A) \neq 0$, $b \in \mathbb{K}^N$*;* $x \in \mathbb{K}^N$, $Ax = b$. *Тогда:*

$$x^j = \frac{\det(A_1, \dots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \dots, A_N)}{\det(A)}, \quad j = \overline{1, N}$$

(***формулы Крамера***).

2. Пусть: A, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $AB = I$. *Тогда:* $\det(A) \neq 0$, $\big(\det(A)\big)^{-1} = \det(B)$*;* $\det(B) \neq 0$, $\big(\det(B)\big)^{-1} = \det(A)$.

3. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, *существует матрица* X *удовлетворяющая условию:* X *— обратная матрица к матрице* A. *Тогда* $\det(A) \neq 0$.

4. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A) \neq 0$. *Тогда:* $A\alpha_*(A) = I$, $\alpha_*(A)A = I$.

5. Пусть: $N_0 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $\det(A) \neq 0$*,* $B \in \mathbb{K}^{N\times N_0}$*. Существует единственная матрица* X*, удовлетворяющая условиям:* $X \in \mathbb{K}^{N\times N_0}$*,* $AX = B$*.*

6. Пусть: $N_0 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $\det(A) \neq 0$*,* $B \in \mathbb{K}^{N_0\times N}$*. Существует единственная матрица* X*, удовлетворяющая условиям:* $X \in \mathbb{K}^{N_0\times N}$*,* $XA = B$*.*

7. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $\det(A) \neq 0$*. Тогда существует единственная матрица* X*, удовлетворяющая условию:* X *— обратная матрица к матрице* A*.*

Доказательство.

1. Пусть $j = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\frac{\det(A_1,\ldots,A_{j-1},b,A_{j+1},\ldots,A_N)}{\det(A)} = \frac{\det(A_1,\ldots,A_{j-1},Ax,A_{j+1},\ldots,A_N)}{\det(A)} =$$
$$= \frac{\det(A_1,\ldots,A_{j-1},x^kA_k,A_{j+1},\ldots,A_N)}{\det(A)} = x^k\frac{\det(A_1,\ldots,A_{j-1},A_k,A_{j+1},\ldots,A_N)}{\det(A)} = x^k\delta_k^j =$$
$$= x^j.$$

2. Очевидно: $AB = I$; $\det(AB) = \det(I)$; $\det(A)\det(B) = 1$. Тогда: $\det(A) \neq 0$, $\big(\det(A)\big)^{-1} = \det(B)$; $\det(B) \neq 0$, $\big(\det(B)\big)^{-1} = \det(A)$.

3. Выберем матрицу X, удовлетворяющую условию: X — обратная матрица к матрице A. Тогда $AX = I$. Следовательно, $\det(A) \neq 0$.

4. Пусть i, $j = \overline{1,N}$. Обозначим:

$$B(i,j) = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{i-1} \\ A^j \\ A^{i+1} \\ \vdots \\ A^N \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\big(A\alpha_*(A)\big)_i^j = \sum_{k=1}^N A_k^j\big(\alpha_*(A)\big)_i^k = \sum_{k=1}^N A_k^j\frac{(-1)^{i+k}\overline{\Delta}_k^i(A)}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^N(-1)^{i+k}\overline{\Delta}_k^i(A)A_k^j =$$
$$= \frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^N(-1)^{i+k}\overline{\Delta}_k^i\big(B(i,j)\big)\big(B(i,j)\big)_k^i = \frac{1}{\det(A)}\det\big(B(i,j)\big) = \delta_i^j = I_i^j.$$

Следовательно, $A\alpha_*(A) = I$.

Пусть i, $j = \overline{1,N}$. Обозначим, $B(i,j) = (A_1,\ldots,A_{j-1},A_i,A_{j+1},\ldots,A_N)$. Тогда:

$$\big(\alpha_*(A)A\big)_i^j = \sum_{k=1}^N\big(\alpha_*(A)\big)_k^jA_i^k = \sum_{k=1}^N\frac{(-1)^{k+j}\overline{\Delta}_j^k(A)}{\det(A)}A_i^k = \frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^N(-1)^{k+j}\overline{\Delta}_j^k(A)A_i^k =$$
$$= \frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^N(-1)^{k+j}\overline{\Delta}_j^k\big(B(i,j)\big)\big(B(i,j)\big)_j^k = \frac{1}{\det(A)}\det\big(B(i,j)\big) = \delta_i^j = I_i^j.$$

Следовательно, $\alpha_*(A)A = I$.

5. Пусть: $X \in \mathbb{K}^{N\times N_0}$, $AX = B$. Тогда:

$$\begin{gathered}\alpha_*(A)(AX) = \alpha_*(A)B,\\ \big(\alpha_*(A)A\big)X = \alpha_*(A)B,\\ IX = \alpha_*(A)B,\\ X = \alpha_*(A)B.\end{gathered}$$

Пусть: $X_1 \in \mathbb{K}^{N\times N_0}$, $AX_1 = B$; $X_2 \in \mathbb{K}^{N\times N_0}$, $AX_2 = B$. Тогда: $X_1 = \alpha_*(A)B$, $X_2 = \alpha_*(A)B$. Следовательно, $X_1 = X_2$.

Обозначим, $X = \alpha_*(A)B$. Тогда: $X \in \mathbb{K}^{N\times N_0}$, $AX = A\big(\alpha_*(A)B\big) = \big(A\alpha_*(A)\big)B = IB = B$.

6. Пусть: $X \in \mathbb{K}^{N_0\times N}$, $XA = B$. Тогда:

$$\begin{gathered}(XA)\alpha_*(A) = B\alpha_*(A),\\ X\big(A\alpha_*(A)\big) = B\alpha_*(A),\\ XI = B\alpha_*(A),\\ X = B\alpha_*(A).\end{gathered}$$

Пусть: $X_1 \in \mathbb{K}^{N_0\times N}$, $X_1A = B$; $X_2 \in \mathbb{K}^{N_0\times N}$, $X_2A = B$. Тогда: $X_1 = B\alpha_*(A)$, $X_2 = B\alpha_*(A)$. Следовательно, $X_1 = X_2$.

Обозначим, $X = B\alpha_*(A)$. Тогда: $X \in \mathbb{K}^{N_0\times N}$, $XA = \big(B\alpha_*(A)\big)A = B\big(\alpha_*(A)A\big) = BI = B$.

7. По условию: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$.

Очевидно: $\alpha_*(A) \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $A\alpha_*(A) = I$. Тогда $\alpha_*(A)$ — обратная матрица к матрице A.

Пусть X_1, X_2 — обратные матрицы к матрице A. Тогда: $X_1 \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $AX_1 = I$; $X_2 \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $AX_2 = I$. Так как: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$, $I \in \mathbb{K}^{N\times N}$, то $X_1 = X_2$. $\square$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Обозначим через A^{-1} обратную матрицу к матрице A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$.

1. *Пусть:* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. *Тогда* $A^{-1} = \alpha_*(A)$.
2. *Пусть:* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. *Тогда:* $AA^{-1} = I$, $A^{-1}A = I$, $\det(A^{-1}) = \big(\det(A)\big)^{-1}$,

$$(A^{-1})_i^j = \frac{(-1)^{i+j}\overline{\Delta}_j^i(A)}{\det(A)}, \quad i,\, j = \overline{1, N}.$$

3. *Пусть:* $A,\, B \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $AB = I$. *Тогда:* $\det(A) \neq 0$, $\big(\det(A)\big)^{-1} = \det(B)$, $A^{-1} = B$; $\det(B) \neq 0$, $\big(\det(B)\big)^{-1} = \det(A)$, $B^{-1} = A$.
4. *Пусть:* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. *Тогда:* $\det(A^{-1}) \neq 0$, $(A^{-1})^{-1} = A$.
5. *Пусть:* $A,\, B \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A)$, $\det(B) \neq 0$. *Тогда:* $\det(AB) \neq 0$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
6. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. *Тогда:* $\det(\lambda A) \neq 0$, $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.
7. *Пусть:* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. *Тогда:* $\det(A^T) \neq 0$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
8. *Пусть:* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. *Тогда:* $\det\Big(\overline{A^T}\Big) \neq 0$, $\Big(\overline{A^T}\Big)^{-1} = \overline{(A^{-1})^T}$.

Доказательство.

1. По условию: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Очевидно: $\alpha_*(A) \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $A\alpha_*(A) = I$. Тогда $\alpha_*(A)$ — обратная матрица к матрице A. Следовательно, $A^{-1} = \alpha_*(A)$.

2. По условию: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Так как A^{-1} — обратная матрица к матрице A, то: $A^{-1} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $AA^{-1} = I$. Тогда $\det(A^{-1}) = \big(\det(A)\big)^{-1}$. Очевидно: $A^{-1}A = \alpha_*(A)A = I$. Пусть i, $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(A^{-1})_i^j = \big(\alpha_*(A)\big)_i^j = \frac{(-1)^{i+j}\overline{\Delta}_j^i(A)}{\det(A)}.$$

3.

10.4. Прямоугольная СЛАУ

Теорема (Кронекера—Капелли)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $b \in \mathbb{K}^{N_2}$.

1. Пусть существует решение уравнения: $Ax = b$, $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. *Тогда* $\operatorname{rank}(A, b) = \operatorname{rank}(A)$.

2. Пусть $\operatorname{rank}(A, b) = \operatorname{rank}(A)$. *Тогда существует решение уравнения:* $Ax = b$, $x \in \mathbb{K}^{N_1}$.

Доказательство.

1. Выберем столбец x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathbb{K}^{N_1}$, $Ax = b$. Тогда: $x^1, \ldots, x^{N_1} \in \mathbb{K}$, $b = x^1A_1 + \cdots + x^{N_1}A_{N_1}$. Следовательно, $b \in L(A_1, \ldots, A_{N_1})$. Тогда $(-1)b \in L(A_1, \ldots, A_{N_1})$. Следовательно:

$$\operatorname{rank}(A, b) = \operatorname{rank}\big(A, b + (-1)b\big) = \operatorname{rank}(A, \tilde{\theta}_2) = \operatorname{rank}(A).$$

2. Обозначим, $r = \operatorname{rank}(A)$. Тогда: $r \in \mathbb{Z}_+$, $\operatorname{rank}(A, b) = r$.

Пусть $r = 0$. Так как: $\operatorname{rank}\big(\{A_1, \ldots, A_{N_1}, b\}\big) = \operatorname{rank}(A, b) = r$, то $b = \tilde{\theta}_2$. Тогда: $\tilde{\theta}_1 \in \mathbb{K}^{N_1}$, $A\tilde{\theta}_1 = b$.

Пусть $r \neq 0$. Тогда $r \in \mathbb{N}$. Так как: $\operatorname{rank}\big(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\big) = \operatorname{rank}(A) = r$, то существуют числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \cdots < i_r$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно независимые столбцы. Так как: $\operatorname{rank}\big(\{A_1, \ldots, A_{N_1}, b\}\big) = \operatorname{rank}(A, b) = r$, то $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}, b\}$. Тогда существуют числа $x^{i_1}, \ldots, x^{i_r}$, удовлетворяющие условиям: $x^{i_1}, \ldots, x^{i_r} \in \mathbb{K}$, $b = x^{i_1}A_{i_1} + \cdots + x^{i_r}A_{i_r}$. Обозначим: $x^i = 0$ при: $i = \overline{1, N_1}$, $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Тогда: $x^1, \ldots, x^{N_1} \in \mathbb{K}$, $b = x^1A_1 + \cdots + x^{N_1}A_{N_1}$. Следовательно: $x \in \mathbb{K}^{N_1}$, $Ax = b$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $b \in \mathbb{K}^{N_2}$. Рассмотрим уравнение (3). Обозначим через Q множество всех решений уравнения (3). Тогда $Q \subseteq \mathbb{K}^{N_1}$. Обозначим, $r = \operatorname{rank}(A)$. Тогда $r = \overline{0, \min\big(\{N_1, N_2\}\big)}$.

1. Пусть $\operatorname{rank}(A, b) \neq r$. Тогда $Q = \varnothing$.
2. Пусть: $\operatorname{rank}(A, b) = r$, $r = 0$. Тогда: $A = \Theta$, $b = \theta_2$. Следовательно, $Q = \mathbb{K}^{N_1}$.
3. Пусть: $\operatorname{rank}(A, b) = r$, $r \neq 0$, $N_1 = r$, $N_2 = r$. Можно использовать формулы Крамера.
4. Пусть: $\operatorname{rank}(A, b) = r$, $r \neq 0$, $N_1 = r$, $N_2 > r$. Пусть $\Delta_{1,\ldots,r}^{1,\ldots,r}(A) \neq 0$. Тогда $(A, b)^1, \ldots, (A, b)^r$ — базис множества $\big\{(A, b)^1, \ldots, (A, b)^{N_2}\big\}$. Следовательно, уравнение (3) эквивалентно системе:

$$\left\{\begin{array}{c} A_1^1x^1 + \cdots + A_r^1x^r = b^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1^rx^1 + \cdots + A_r^rx^r = b^r; \\ x^1, \ldots, x^r \in \mathbb{K}. \end{array}\right.$$

Можно использовать формулы Крамера.

5. Пусть: $\operatorname{rank}(A,b)=r$, $r\neq 0$, $N_1>r$, $N_2=r$. Пусть $\Delta^{1,\dots,r}_{1,\dots,r}(A)\neq 0$. Пусть x — решение уравнения (3). Тогда:

$$\begin{cases} A^1_1x^1+\dots+A^1_rx^r=b^1-A^1_{r+1}x^{r+1}-\dots-A^1_{N_1}x^{N_1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A^r_1x^1+\dots+A^r_rx^r=b^r-A^r_{r+1}x^{r+1}-\dots-A^r_{N_1}x^{N_1};\\ x^1,\dots,x^{N_1}\in\mathbb{K}.\end{cases}$$

Обозначим: $C^1=x^{r+1},\dots,C^{N_1-r}=x^{N_1}$. Тогда: $C^1,\dots,C^{N_1-r}\in\mathbb{K}$;

$$\begin{cases} A^1_1x^1+\dots+A^1_rx^r=b^1-A^1_{r+1}C^1-\dots-A^1_{N_1}C^{N_1-r},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A^r_1x^1+\dots+A^r_rx^r=b^r-A^r_{r+1}C^1-\dots-A^r_{N_1}C^{N_1-r},\\ x^{r+1}=C^1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x^{N_1}=C^{N_1-r};\\ x^1,\dots,x^{N_1}\in\mathbb{K}.\end{cases}\tag{6}$$

Можно использовать формулы Крамера.

Пусть: $C^1,\dots,C^{N_1-r}\in\mathbb{K}$, x — решение системы (6). Тогда x — решение уравнения (3).

6. Пусть: $\operatorname{rank}(A,b)=r$, $r\neq 0$, $N_1>r$, $N_2>r$. Пусть $\Delta^{1,\dots,r}_{1,\dots,r}(A)\neq 0$. Тогда $(A,b)^1,\dots,(A,b)^r$ — базис множества $\{(A,b)^1,\dots,(A,b)^{N_2}\}$. Следовательно, уравнение (3) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} A^1_1x^1+\dots+A^1_{N_1}x^{N_1}=b^1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A^r_1x^1+\dots+A^r_{N_1}x^{N_1}=b^r;\\ x^1,\dots,x^{N_1}\in\mathbb{K}.\end{cases}$$

Можно использовать метод из пункта 5.

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$, $N_1,\ N_2\in\mathbb{N}$, $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $b\in\mathbb{K}^{N_2}$, $j=\overline{1,N_2}$. Будем говорить, что $(A,b)^j$ — квазинулевая строка, если: $A^j_1,\dots,A^j_{N_1}=0$, $b^j\neq 0$.

Замечание (Метод Гаусса—Жордана для решения СЛАУ). Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; $N_1,\ N_2\in\mathbb{N}$, $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $b\in\mathbb{K}^{N_2}$. Обозначим, $Q=\{x\colon x\in\mathbb{K}^{N_1}\wedge Ax=b\}$.

Пусть матрица (A,b) содержит квазинулевую строку. Тогда $Q=\varnothing$. Пусть матрица (A,b) не содержит квазинулевых строк. Пусть матрица A не содержит ненулевых строк. Тогда $Q=\mathbb{K}^{N_1}$. Пусть матрица A содержит ненулевую строку. Обозначим: $B_0=A$, $z_0=b$. Тогда: $B_0\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $z_0\in\mathbb{K}^{N_2}$, $Q=\{x\colon x\in\mathbb{K}^{N_1}\wedge B_0x=z_0\}$, матрица (B_0,z_0) не содержит квазинулевых строк, матрица B_0 содержит ненулевую строку.

Выберем числа $i_1=\overline{1,N_1}$, $j_1=\overline{1,N_2}$, удовлетворяющие условию $(B_0)^{j_1}_{i_1}\neq 0$. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_0)^{j_1}_{i_1}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_0)^{j_1}_{i_1}$. Получим матрицу $B_1\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, получим столбец $z_1\in\mathbb{K}^{N_2}$, удовлетворяющий условиям: $(B_1)^{j_1}_{i_1}\neq 0$, $(B_1)^{j}_{i_1}=0$ при: $j=\overline{1,N_2}$, $j\neq j_1$; $Q=\{x\colon x\in\mathbb{K}^{N_1}\wedge B_1x=z_1\}$. Пусть матрица (B_1,z_1) содержит квазинулевую строку. Тогда $Q=\varnothing$. Остановим процесс. Пусть матрица (B_1, z_1) не содержит квазинулевых строк. Пусть матрица B_1 содержит ровно одну ненулевую строку. Остановим процесс. Пусть матрица B_1 содержит, по крайней мере, две ненулевые строки. Перейдём к следующему шагу.

Выберем числа $i_2 = \overline{1, N_1}$, $j_2 = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условиям: $j_2 \neq j_1$, $(B_1)_{i_2}^{j_2} \neq 0$. Очевидно, $i_2 \neq i_1$. Тогда: i_1, $i_2 = \overline{1, N_1}$, i_1, i_2 — различные числа, j_1, $j_2 = \overline{1, N_2}$, j_1, j_2 — различные числа. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_1)_{i_2}^{j_2}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_1)_{i_2}^{j_2}$. Получим матрицу $B_2 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, получим столбец $z_2 \in \mathbb{K}^{N_2}$, удовлетворяющий условиям: $(B_2)_{i_k}^{j_k} \neq 0$, $(B_2)_{i_k}^{j} = 0$ при: $k = 1, 2$, $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_k$; $Q = \{x \colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge B_1 x = z_1\}$. Пусть матрица (B_2, z_2) содержит квазинулевую строку. Тогда $Q = \varnothing$. Остановим процесс. Пусть матрица B_2 содержит ровно две ненулевые строки. Остановим процесс. Пусть матрица B_2 содержит, по крайней мере, три ненулевые строки. Перейдём к следующему шагу.

Первый вариант. Продолжая рассуждения, получим, что $Q = \varnothing$.

Второй вариант. Продолжая рассуждения, получим число $r = \overline{1, \min\{N_1, N_2\}}$, получим числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, получим матрицу $B_r \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, получим столбец $z_r \in \mathbb{K}^{N_2}$, удовлетворяющий условиям: $i_1, \ldots, i_r$ — различные числа, $j_1, \ldots, j_r$ — различные числа, $(B_r)_{i_k}^{j_k} \neq 0$, $(B_r)_{i_k}^{j} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_k$; $Q = \{x \colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge B_r x = z_r\}$, матрица (B_r, z_r) не содержит квазинулевых строк, матрица B_r содержит ровно r ненулевых строк. Далее можно выписывать ответ.

Лекция 11. Тензорная алгебра (2-й семестр)

11.1. Матрица перехода от одного базиса к другому

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L, e' — упорядоченная N-ка, $e'_1, \ldots, e'_N \in L$. Обозначим: $\alpha^i_{i'}(e, e') = [e'_{i'}]^i(e)$ при i, $i' = \overline{1, N}$. Очевидно: $\alpha(e, e') \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $e'_{i'} = \alpha^i_{i'}(e, e')e_i$ при $i' = \overline{1, N}$; $\alpha_{i'}(e, e') = [e'_{i'}](e)$ при $i' = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $\alpha(e, e')$ — матрица перехода от базиса e к набору векторов e'.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L, $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $e'_{i'} = A^i_{i'}e_i$ при $i' = \overline{1, N}$. Очевидно: e' — упорядоченная N-ка, $e'_1, \ldots, e'_N \in L$, $\alpha(e, e') = A$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*.*

1. Пусть e *— базис пространства* L*. Тогда* $\alpha(e, e) = \tilde{I}$ *(здесь* $\tilde{I}$ *— единичная матрица из множества* $\mathbb{K}^{N\times N}$*).*

2. Пусть: e*,* e' *— базисы пространства* L*,* e'' *— упорядоченная* N*-ка,* $e''_1, \ldots, e''_N \in L$*. Тогда* $\alpha(e, e')\alpha(e', e'') = \alpha(e, e'')$*.*

3. Пусть e*,* e' *— базисы пространства* L*. Тогда:* $\alpha(e, e')\alpha(e', e) = \tilde{I}$*;* $\det\bigl(\alpha(e, e')\bigr) \neq 0$*,* $\alpha(e, e')^{-1} = \alpha(e', e)$*.*

4. Пусть: e *— базис пространства* L*,* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $\det(A) \neq 0$*,* $e'_{i'} = A^i_{i'}e_i$ *при* $i' = \overline{1, N}$*. Тогда:* e' *— базис пространства* L*,* $\alpha(e, e') = A$*.*

5. Пусть: e*,* e' *— базисы пространства* L*,* $x \in L$*. Тогда:* $[x]^{j'}(e') = \alpha^{j'}_j(e', e)[x]^j(e)$ *при* $j' = \overline{1, N}$*;* $[x](e') = \alpha(e', e)[x](e)$*.*

Доказательство.

1. Пусть i, $j = \overline{1, N}$. Тогда: $\alpha^j_i(e, e) = [e_i]^j(e) = \delta^j_i = \tilde{I}^j_i$. Следовательно, $\alpha(e, e) = \tilde{I}$.

2. Пусть $i'' = \overline{1, N}$. Очевидно:

$$e''_{i''} = \alpha^{i'}_{i''}(e', e'')e'_{i'} = \alpha^{i'}_{i''}(e', e'')\bigl(\alpha^i_{i'}(e, e')e_i\bigr) = \bigl(\alpha^i_{i'}(e, e')\alpha^{i'}_{i''}(e', e'')\bigr)e_i.$$

С другой стороны, $e''_{i''} = \alpha^i_{i''}(e, e'')e_i$. Тогда: $\alpha^i_{i'}(e, e')\alpha^{i'}_{i''}(e', e'') = \alpha^i_{i''}(e, e'')$ при $i = \overline{1, N}$. Следовательно: $\bigl(\alpha(e, e')\alpha(e', e'')\bigr)^i_{i''} = \alpha^i_{i''}(e, e'')$ при $i = \overline{1, N}$. Тогда $\alpha(e, e')\alpha(e', e'') = \alpha(e, e'')$.

3. Очевидно: $\alpha(e, e')\alpha(e', e) = \alpha(e, e) = \tilde{I}$. Тогда: $\det\bigl(\alpha(e, e')\bigr) \neq 0$, $\alpha(e, e')^{-1} = \alpha(e', e)$.

4. Очевидно: e' — упорядоченная N-ка, $e'_1, \ldots, e'_N \in L$, $\alpha(e, e') = A$. Так как $\det(A) \neq 0$, то $A_1, \ldots, A_N$ — линейно независимые столбцы. Так как $\alpha(e, e') = A$, то $\alpha_1(e, e'), \ldots, \alpha_N(e, e')$ — линейно независимые столбцы. Тогда $[e'_1](e), \ldots, [e'_N](e)$ — линейно независимые столбцы. Следовательно, $e'_1, \ldots, e'_N$ — линейно независимые векторы. Так как: $e'_1, \ldots, e'_N \in L$, $\dim(L) = N$, то e' — базис пространства L.

5. Очевидно, $x = [x]^{j'}(e')e'_{j'}$. С другой стороны:

$$x = [x]^j(e)e_j = [x]^j(e)\bigl(\alpha^{j'}_j(e', e)e'_{j'}\bigr) = \bigl(\alpha^{j'}_j(e', e)[x]^j(e)\bigr)e'_{j'}.$$

Тогда: $[x]^{j'}(e') = \alpha^{j'}_j(e', e)[x]^j(e)$ при $j' = \overline{1, N}$. Следовательно: $[x]^{j'}(e') = \bigl(\alpha(e', e)[x](e)\bigr)^{j'}$ при $j' = \overline{1, N}$. Тогда $[x](e') = \alpha(e', e)[x](e)$. □

11.2. Числовые наборы

Замечание («прямоугольные» числовые наборы). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $r \in \mathbb{N}$, $N_1, \ldots, N_r \in \mathbb{N}$.

1. Обозначим через $\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$ множество всех функций A, удовлетворяющих условию:

$$A\colon \{1, \ldots, N_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, N_r\} \implies \mathbb{K}.$$

2. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Будем говорить, что A — числовой набор степени r. **Иными словами, числовой набор степени r — это числовая функция r дискретных переменных.**

3. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Далее часто будем писать «$A_{i_1,\ldots,i_r}$» вместо «$A(i_1, \ldots, i_r)$».

4. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Далее часто будем писать «$A^{i_1,\ldots,i_r}$» вместо «$A(i_1, \ldots, i_r)$».

5. Пусть: $p, q \in \mathbb{N}$, $r = q + p$, $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Далее часто будем писать «$A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}$» вместо «$A(j_1, \ldots, j_q, i_1, \ldots, i_p)$».

6. Пусть A, $B \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Тогда: $(A+B)_{i_1,\ldots,i_r} = A_{i_1,\ldots,i_r} + B_{i_1,\ldots,i_r}$ при: $i_1 = \overline{1, N_1}, \ldots, i_r = \overline{1, N_r}$.

7. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$. Тогда: $(\lambda A)_{i_1,\ldots,i_r} = \lambda A_{i_1,\ldots,i_r}$ при: $i_1 = \overline{1, N_1}, \ldots, i_r = \overline{1, N_r}$.

8. Очевидно, $\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Обозначим через N_* количество элементов множества $\{1, \ldots, N_1\} \times \cdots \times \{1, \ldots, N_r\}$. Тогда $\dim\bigl(\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}\bigr) = N_*$. Очевидно, $N_* = N_1 \cdots N_r$. Тогда $\dim\bigl(\mathbb{K}^{N_1 \times \cdots \times N_r}\bigr) = N_1 \cdots N_r$.

Замечание («квадратные» числовые наборы). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$.

1. Пусть $r = 0$. Обозначим, $\mathbb{K}^{(N,r)} = \mathbb{K}$. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим, $\mathbb{K}^{(N,r)} = \mathbb{K}^{N \times \cdots \times N}$ (здесь выражение $N \times \cdots \times N$ содержит r сомножителей).

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}_+$, $A \in \mathbb{K}^{(N,r)}$. Будем говорить, что A — числовой набор степени r.

3. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно: $\mathbb{K}^{(N,r)}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim\bigl(\mathbb{K}^{(N,r)}\bigr) = N^r$.

11.3. Геометрические объекты

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{Z}_+$.

1. Будем говорить, что A — геометрический объект степени r в пространстве L, если A — это отображение, которое каждому базису e пространства L ставит в соответствие числовой набор $A(e) \in \mathbb{K}^{(N,r)}$.

2. Обозначим через $(GL)_r$ множество всех геометрических объектов степени r в пространстве L.

3. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $A \in (GL)_r$. Далее часто будем писать «$A_{i_1,\ldots,i_r}(e)$» вместо «$\bigl(A(e)\bigr)_{i_1,\ldots,i_r}$».

4. Пусть A, $B \in (GL)_r$. Тогда: $(A + B)(e) = A(e) + B(e)$ при: e — базис пространства L. Следовательно:

$$(A + B)_{i_1,\ldots,i_r}(e) = \bigl((A + B)(e)\bigr)_{i_1,\ldots,i_r} = \bigl(A(e) + B(e)\bigr)_{i_1,\ldots,i_r} = A_{i_1,\ldots,i_r}(e) + B_{i_1,\ldots,i_r}(e)$$

при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$.

5. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (GL)_r$. Тогда: $(\lambda A)(e) = \lambda A(e)$ при: e — базис пространства L. Следовательно:

$$(\lambda A)_{i_1,\ldots,i_r}(e) = \bigl((\lambda A)(e)\bigr)_{i_1,\ldots,i_r} = \bigl(\lambda A(e)\bigr)_{i_1,\ldots,i_r} = \lambda A_{i_1,\ldots,i_r}(e)$$

при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$.

6. Очевидно, $(GL)_r$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

11.4. Тензоры

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; p, $q \in \mathbb{Z}_+$.

1. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{q}{p}$ в пространстве L, если A — это геометрический объект степени $q + p$ в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') = A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e')$$

при: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \dots, i'_p$, $j'_1, \dots, j'_q = \overline{1, N}$.

2. Обозначим через $(TL)^q_p$ множество всех тензоров порядка $\binom{q}{p}$ в пространстве L.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* p*,* $q \in \mathbb{Z}_+$*. Тогда* $(TL)^q_p$ *— подпространство пространства* $(GL)_{q+p}$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $(TL)^q_p \subseteq (GL)_{q+p}$.

2. Пусть Θ — нулевой элемент пространства $(GL)_{q+p}$. Докажем, что $\Theta \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \dots, i'_p$, $j'_1, \dots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\Theta^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = 0 = \Theta^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e').$$

3. Пусть A, $B \in (TL)^q_p$. Докажем, что $A + B \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \dots, i'_p$, $j'_1, \dots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}(A+B)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = \\ = \big(A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e) + B^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\big)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = \\ = A^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') + B^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') = (A+B)^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e').\end{gathered}$$

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (TL)^q_p$. Докажем, что $\lambda A \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \dots, i'_p$, $j'_1, \dots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}(\lambda A)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = \\ = \big(\lambda A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\big)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = \\ = \lambda A^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e') = (\lambda A)^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\dots,i'_p}(e'). \quad \square\end{gathered}$$

Замечание (примеры). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть $x \in L$. Очевидно, $[x] \in (TL)^1_0$.

2. Пусть: $\delta^j_i(e) = \delta^j_i$ при: e — базис пространства L, i, $j = \overline{1, N}$. Докажем, что $\delta \in (TL)^1_1$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, i', $j' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\delta^j_i(e)\alpha^{j'}_j(e',e)\alpha^i_{i'}(e,e') = \delta^j_i\alpha^{j'}_j(e',e)\alpha^i_{i'}(e,e') = \alpha^{j'}_i(e',e)\alpha^i_{i'}(e,e') = \delta^{j'}_{i'} = \delta^{j'}_{i'}(e').$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $p, q \in \mathbb{Z}_+$*,* e_0 *— базис пространства* L*.*

1. Пусть: $A, B \in (TL)^q_p$*,* $A(e_0) = B(e_0)$*. Тогда* $A = B$*.*

2. Пусть $A_0 \in \mathbb{K}^{(N,q+p)}$*. Обозначим:*

$$A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e) = (A_0)^{j^0_1,\dots,j^0_q}_{i^0_1,\dots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e)$$

при: e *— базис пространства* L*,* $i_1,\dots,i_p, j_1,\dots,j_q = \overline{1,N}$*. Тогда:* $A \in (TL)^q_p$*,* $A(e_0) = A_0$*.*

Доказательство.

1. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\dots,i_p$, $j_1,\dots,j_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e) = A^{j^0_1,\dots,j^0_q}_{i^0_1,\dots,i^0_p}(e_0)\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e) = \\ = B^{j^0_1,\dots,j^0_q}_{i^0_1,\dots,i^0_p}(e_0)\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e) = B^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e).\end{gathered}$$

2. Докажем, что $A \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p$, $j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = \\ = \left((A_0)^{j^0_1,\dots,j^0_q}_{i^0_1,\dots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e)\right) \\ \alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') = \\ = (A_0)^{j^0_1,\dots,j^0_q}_{i^0_1,\dots,i^0_p}\alpha^{j'_1}_{j^0_1}(e',e_0)\cdots\alpha^{j'_q}_{j^0_q}(e',e_0)\alpha^{i^0_1}_{i'_1}(e_0,e')\cdots\alpha^{i^0_p}_{i'_p}(e_0,e') = A^{j'_1,\dots,j'_q}_{i'_1,\cdots,i'_p}(e').\end{gathered}$$

Докажем, что $A(e_0) = A_0$. Пусть $i_1,\dots,i_p$, $j_1,\dots,j_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}(e_0) = (A_0)^{j^0_1,\dots,j^0_q}_{i^0_1,\dots,i^0_p}\alpha^{j_1}_{j^0_1}(e_0,e_0)\cdots\alpha^{j_q}_{j^0_q}(e_0,e_0)\alpha^{i^0_1}_{i_1}(e_0,e_0)\cdots\alpha^{i^0_p}_{i_p}(e_0,e_0) = \\ = (A_0)^{j^0_1,\dots,j^0_q}_{i^0_1,\dots,i^0_p}\delta^{j_1}_{j^0_1}\cdots\delta^{j_q}_{j^0_q}\delta^{i^0_1}_{i_1}\cdots\delta^{i^0_p}_{i_p} = (A_0)^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}. \quad \square\end{gathered}$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, $p_2, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{q_2}_{p_2}$. Обозначим:

$$(A \otimes B)^{j_1,\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\dots,i_{p_1+p_2}}(e) = A^{j_1,\dots,j_{q_1}}_{i_1,\dots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\dots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\dots,i_{p_1+p_2}}(e)$$

при: e — базис пространства L, $i_1,\dots,i_{p_1+p_2}$, $j_1,\dots,j_{q_1+q_2} = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $A \otimes B$ — прямое произведение тензоров A, B.

2. Пусть: $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1,p}$, $m = \overline{1,q}$. Обозначим:

$$\left(\langle A\rangle^m_k\right)^{j_1,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{p-1}}(e) = A^{j_1,\dots,j_{m-1},i,j_m,\dots,j_{q-1}}_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}(e)$$

при: e — базис пространства L, $i_1,\dots,i_{p-1}$, $j_1,\dots,j_{q-1} = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $\langle A\rangle^m_k$ — свёртка тензора A.

3. Пусть: $p,\ q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_p^q$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. Обозначим:

$$\big([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e) = A_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e)$$

при: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_p,\ j_1,\ldots,j_q = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}$ — результат транспонирования тензора A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{q_2}^{p_2}$. *Тогда* $A \otimes B \in (TL)_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}$.

2. Пусть: $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A_1,\ A_2 \in (TL)_{p_1}^{q_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{q_2}^{p_2}$. *Тогда* $(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$.

3. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{q_2}^{p_2}$. *Тогда* $(\lambda A) \otimes B = \lambda(A \otimes B)$.

4. Пусть: $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B_1,\ B_2 \in (TL)_{q_2}^{p_2}$. *Тогда* $A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2$.

5. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{q_2}^{p_2}$. *Тогда* $A \otimes (\lambda B) = \lambda(A \otimes B)$.

6. Пусть: $p_1,\ q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$, $p_2,\ q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{p_2}^{q_2}$, $p_3,\ q_3 \in \mathbb{Z}_+$, $C \in (TL)_{p_3}^{q_3}$. *Тогда* $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

7. Пусть: $p,\ q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)_p^q$, $k = \overline{1,p}$, $m = \overline{1,q}$. *Тогда* $\langle A\rangle_k^m \in (TL)_{p-1}^{q-1}$.

8. Пусть: $p,\ q \in \mathbb{N}$, $A,\ B \in (TL)_p^q$, $k = \overline{1,p}$, $m = \overline{1,q}$. *Тогда* $\langle A + B\rangle_k^m = \langle A\rangle_k^m + \langle B\rangle_k^m$.

9. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $p,\ q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)_p^q$, $k = \overline{1,p}$, $m = \overline{1,q}$. *Тогда* $\langle \lambda A\rangle_k^m = \lambda\langle A\rangle_k^m$.

10. Пусть: $p,\ q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_p^q$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} \in (TL)_p^q$.

11. Пусть: $p,\ q \in \mathbb{Z}_+$, $A,\ B \in (TL)_p^q$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[A + B]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = [A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} + [B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}$.

12. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $p,\ q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_p^q$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[\lambda A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} = \lambda[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}$.

Доказательство.

1. Пусть: $e,\ e'$ — базисы пространства L, $i'_1,\ldots,i'_{p_1+p_2},\ j'_1,\ldots,j'_{q_1+q_2} = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
(A \otimes B)_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q_1+q_2}}^{j'_{q_1+q_2}}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p_1+p_2}}^{i_{p_1+p_2}}(e,e') = \\
= \big(A_{i_1,\ldots,i_{p_1}}^{j_1,\ldots,j_{q_1}}(e)B_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}(e)\big)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q_1+q_2}}^{j'_{q_1+q_2}}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p_1+p_2}}^{i_{p_1+p_2}}(e,e') = \\
= A_{i'_1,\ldots,i'_{p_1}}^{j'_1,\ldots,j'_{q_1}}(e')B_{i'_{p_1+1},\ldots,i'_{p_1+p_2}}^{j'_{q_1+1},\ldots,j'_{q_1+q_2}}(e') = (A \otimes B)_{i'_1,\ldots,i'_{p_1+p_2}}^{j'_1,\ldots,j'_{q_1+q_2}}(e').
\end{gathered}$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2},\ j_1,\ldots,j_{q_1+q_2} = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
\big((A_1 + A_2) \otimes B\big)_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}(e) = \big((A_1)_{i_1,\ldots,i_{p_1}}^{j_1,\ldots,j_{q_1}}(e) + (A_2)_{i_1,\ldots,i_{p_1}}^{j_1,\ldots,j_{q_1}}(e)\big)B_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}(e) = \\
= (A_1)_{i_1,\ldots,i_{p_1}}^{j_1,\ldots,j_{q_1}}(e)B_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}(e) + (A_2)_{i_1,\ldots,i_{p_1}}^{j_1,\ldots,j_{q_1}}(e)B_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}(e) = \\
= (A_1 \otimes B + A_2 \otimes B)_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}(e).
\end{gathered}$$

3. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2},\ j_1,\ldots,j_{q_1+q_2} = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
\big((\lambda A) \otimes B\big)_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}(e) = \big(\lambda A_{i_1,\ldots,i_{p_1}}^{j_1,\ldots,j_{q_1}}(e)\big)B_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}(e) = \\
= \lambda\big(A_{i_1,\ldots,i_{p_1}}^{j_1,\ldots,j_{q_1}}(e)B_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}(e)\big) = \big(\lambda(A \otimes B)\big)_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}(e).
\end{gathered}$$

4. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(A \otimes (B_1 + B_2)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big((B_1)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) + (B_2)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) =$$
$$= A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)(B_1)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) + A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)(B_2)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) =$$
$$= (A \otimes B_1 + A \otimes B_2)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

5. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(A \otimes (\lambda B)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big(\lambda B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) =$$
$$= \lambda\big(A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) = \big(\lambda(A \otimes B)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

6. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2+p_3}, j_1, \ldots, j_{q_1+q_2+q_3} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((A \otimes B) \otimes C\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e) = \big(A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big)C^{j_{q_1+q_2+1},\ldots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_{p_1+p_2+1},\ldots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e) =$$
$$= A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big(B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)C^{j_{q_1+q_2+1},\ldots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_{p_1+p_2+1},\ldots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e)\big) = \big(A \otimes (B \otimes C)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e).$$

7. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_{p-1}, j'_1, \ldots, j'_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\langle A\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e') =$$
$$= A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e') =$$
$$= A^{j_1,\ldots,j_{m-1},j,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)\delta^i_j\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e') =$$
$$= A^{j_1,\ldots,j_{m-1},j,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)\alpha^i_{i'}(e,e')\alpha^{i'}_j(e',e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e') =$$
$$= A^{j'_1,\ldots,j'_{m-1},i',j'_m,\ldots,j'_{q-1}}_{i'_1,\ldots,i'_{k-1},i',i'_k,\ldots,i'_{p-1}}(e') = \big(\langle A\rangle^m_k\big)^{j'_1,\ldots,j'_{q-1}}_{i'_1,\ldots,i'_{p-1}}(e').$$

8. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p-1}, j_1, \ldots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\langle A+B\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e) + B^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e) =$$
$$= \big(\langle A\rangle^m_k + \langle B\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e).$$

9. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p-1}, j_1, \ldots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\langle\lambda A\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e) = \lambda A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e) = \big(\lambda\langle A\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e).$$

10. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p, j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') =$$
$$= A^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_q}_{j_q}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_p}_{i'_p}(e,e') =$$
$$= A^{j'_{\sigma_2(1)},\ldots,j'_{\sigma_2(q)}}_{i'_{\sigma_1(1)},\ldots,i'_{\sigma_1(p)}}(e') = \big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e').$$

11. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_p$, $j_1, \dots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl([A+B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e) = A_{i_{\sigma_1(1)},\dots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\dots,j_{\sigma_2(q)}}(e) + B_{i_{\sigma_1(1)},\dots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\dots,j_{\sigma_2(q)}}(e) = \bigl([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} + [B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e).$$

12. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \dots, i_p$, $j_1, \dots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl([\lambda A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e) = \lambda A_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\dots,j_{\sigma_2(q)}}(e) = \lambda\bigl([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e).$$

Замечание (Внимание! Только для особо интересующихся). Уточним доказательство пункта 7 предыдущего утверждения.

Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \dots, i'_p$, $j'_1, \dots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
A_{i'_1,\dots,i'_{k-1},i'_k,i'_{k+1},\dots,i'_p}^{j'_1,\dots,j'_{m-1},j'_m,j'_{m+1},\dots,j'_q}(e') = A_{i_1,\dots,i_{k-1},i_k,i_{k+1},\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_{m-1},j_m,j_{m+1},\dots,j_q}(e)\\
\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{m-1}}^{j'_{m-1}}(e',e)\alpha_{j_m}^{j'_m}(e',e)\alpha_{j_{m+1}}^{j'_{m+1}}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\\
\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{k-1}}^{i_{k-1}}(e,e')\alpha_{i'_k}^{i_k}(e,e')\alpha_{i'_{k+1}}^{i_{k+1}}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e').
\end{gathered}$$

Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \dots, i'_{p-1}$, $j'_1, \dots, j'_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
A_{i'_1,\dots,i'_{k-1},i',i'_k,\dots,i'_{p-1}}^{j'_1,\dots,j'_{m-1},i',j'_m,\dots,j'_{q-1}}(e') = A_{i_1,\dots,i_{k-1},i_k,i_{k+1},\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_{m-1},j_m,j_{m+1},\dots,j_q}(e)\\
\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{m-1}}^{j'_{m-1}}(e',e)\alpha_{j_m}^{i'}(e',e)\alpha_{j_{m+1}}^{j'_m}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_{q-1}}(e',e)\\
\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{k-1}}^{i_{k-1}}(e,e')\alpha_{i'}^{i_k}(e,e')\alpha_{i'_k}^{i_{k+1}}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_p}(e,e') =\\
= A_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1},j,j_m,\dots,j_{q-1}}(e)\\
\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{m-1}}^{j'_{m-1}}(e',e)\alpha_j^{i'}(e',e)\alpha_{j_m}^{j'_m}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q-1}}^{j'_{q-1}}(e',e)\\
\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{k-1}}^{i_{k-1}}(e,e')\alpha_{i'}^{i}(e,e')\alpha_{i'_k}^{i_k}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_{p-1}}(e,e') =\\
A_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1},j,j_m,\dots,j_{q-1}}(e)\alpha_{i'}^{i}(e,e')\alpha_j^{i'}(e',e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q-1}}^{j'_{q-1}}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_{p-1}}(e,e').
\end{gathered}$$

Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \dots, i'_{p-1}$, $j'_1, \dots, j'_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
\bigl(\langle A\rangle_k^m\bigr)_{i_1,\dots,i_{p-1}}^{j_1,\dots,j_{q-1}}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q-1}}^{j'_{q-1}}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_{p-1}}(e,e') =\\
= A_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1},i,j_m,\dots,j_{q-1}}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q-1}}^{j'_{q-1}}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_{p-1}}(e,e') =\\
= A_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1},j,j_m,\dots,j_{q-1}}(e)\delta_j^i\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q-1}}^{j'_{q-1}}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_{p-1}}(e,e') =\\
= A_{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}^{j_1,\dots,j_{m-1},j,j_m,\dots,j_{q-1}}(e)\alpha_{i'}^{i}(e,e')\alpha_j^{i'}(e',e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_{q-1}}^{j'_{q-1}}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_{p-1}}^{i_{p-1}}(e,e') =\\
= A_{i'_1,\dots,i'_{k-1},i',i'_k,\dots,i'_{p-1}}^{j'_1,\dots,j'_{m-1},i',j'_m,\dots,j'_{q-1}}(e') = \bigl(\langle A\rangle_k^m\bigr)_{i'_1,\dots,i'_{p-1}}^{j'_1,\dots,j'_{q-1}}(e').
\end{gathered}$$

Замечание (след и определитель тензора порядка $\binom{1}{1}$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in (TL)_1^1$.

Пусть e — базис пространства L. Тогда: $\operatorname{tr}\bigl(A(e)\bigr) = A_i^i(e) = \langle A\rangle_1^1(e)$.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Так как $\langle A\rangle_1^1 \in (TL)_0^0$, то: $\operatorname{tr}\bigl(A(e')\bigr) = \langle A\rangle_1^1(e') = \langle A\rangle_1^1(e) = \operatorname{tr}\bigl(A(e)\bigr)$.

Выберем некоторый базис e пространства L. Обозначим, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\big(A(e)\big)$.

Пусть: e, e' — базисы пространства L, i', $j' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$A^{j'}_{i'}(e') = A^j_i(e)\alpha^{j'}_j(e',e)\alpha^i_{i'}(e,e') = \alpha^{j'}_j(e',e)A^j_i(e)\alpha^i_{i'}(e,e') = \big(\alpha(e',e)A(e)\big)^{j'}_i\alpha^i_{i'}(e,e') = \\ = \big(\alpha(e',e)A(e)\alpha(e,e')\big)^{j'}_{i'}.$$

Следовательно, $A(e') = \alpha(e',e)A(e)\alpha(e,e')$.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Тогда:

$$\det\big(A(e')\big) = \det\big(\alpha(e',e)A(e)\alpha(e,e')\big) = \det\big(\alpha(e',e)\big)\det\big(A(e)\big)\det\big(\alpha(e,e')\big) = \\ = \det\big(A(e)\big)\det\big(\alpha(e,e')\alpha(e',e)\big) = \det\big(A(e)\big)\det(\tilde{I}) = \det\big(A(e)\big).$$

Выберем некоторый базис e пространства L. Обозначим, $\det(A) = \det\big(A(e)\big)$.

Замечание (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). Пусть p_1, $p_2 \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим: $\sigma(k) = p_2 + k$ при $k = \overline{1,p_1}$; $\sigma(k) = -p_1 + k$ при $k = \overline{p_1+1, p_1+p_2}$. Очевидно, $\sigma \in S_{p_1+p_2}$.

Утверждение (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*.*

1. Пусть: p_1*,* $q_1 \in \mathbb{Z}_+$*,* $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$*,* p_2*,* $q_2 \in \mathbb{Z}_+$*,* $B \in (TL)^{q_2}_{p_2}$*. Обозначим:* $\sigma_1(k) = p_2 + k$ *при* $k = \overline{1,p_1}$*;* $\sigma_1(k) = -p_1 + k$ *при* $k = \overline{p_1+1,p_1+p_2}$*;* $\sigma_2(k) = q_2 + k$ *при* $k = \overline{1,q_1}$*;* $\sigma_2(k) = -q_1 + k$ *при* $k = \overline{q_1+1,q_1+q_2}$*. Тогда* $B \otimes A = [A \otimes B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$*.*

2. Пусть: p*,* $q \in \mathbb{Z}_+$*,* $A \in (TL)^q_p$*,* σ_1*,* $\sigma_3 \in S_p$*,* σ_2*,* $\sigma_4 \in S_q$*. Тогда* $\big[[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big]^{\sigma_4}_{\sigma_3} = [A]^{\sigma_4\sigma_2}_{\sigma_3\sigma_1}$*.*

Доказательство.

1. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}$, $j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1,N}$. Тогда:

$$(B \otimes A)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = B^{j_1,\ldots,j_{q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_2}}(e)A^{j_{q_2+1},\ldots,j_{q_2+q_1}}_{i_{p_2+1},\ldots,i_{p_2+p_1}}(e) = A^{j_{q_2+1},\ldots,j_{q_2+q_1}}_{i_{p_2+1},\ldots,i_{p_2+p_1}}(e)B^{j_1,\ldots,j_{q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_2}}(e) = \\ = A^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q_1)}}_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p_1)}}(e)B^{j_{\sigma_2(q_1+1)},\ldots,j_{\sigma_2(q_1+q_2)}}_{i_{\sigma_1(p_1+1)},\ldots,i_{\sigma_1(p_1+p_2)}}(e) = \big([A \otimes B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p$, $j_1, \ldots, j_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\Big(\big[[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big]^{\sigma_4}_{\sigma_3}\Big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = \big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_{\sigma_4(1)},\ldots,j_{\sigma_4(q)}}_{i_{\sigma_3(1)},\ldots,i_{\sigma_3(p)}}(e) = A^{j_{\sigma_4(\sigma_2(1))},\ldots,j_{\sigma_4(\sigma_2(q))}}_{i_{\sigma_3(\sigma_1(1))},\ldots,i_{\sigma_3(\sigma_1(p))}}(e) = \\ = A^{j_{(\sigma_4\sigma_2)(1)},\ldots,j_{(\sigma_4\sigma_2)(q)}}_{i_{(\sigma_3\sigma_1)(1)},\ldots,i_{(\sigma_3\sigma_1)(p)}}(e) = \big([A]^{\sigma_4\sigma_2}_{\sigma_3\sigma_1}\big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e). \quad \square$$

Определение (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$, p_k, $q_k \in \mathbb{Z}_+$, $A_k \in (TL)^{q_k}_{p_k}$ при $k = \overline{1,r}$. Обозначим: $\tilde{p}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} p_m$, $\tilde{q}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} q_m$ при $k = \overline{1,r}$. Обозначим:

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = (A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e)(A_2)^{j_{\tilde{q}_1+1},\ldots,j_{\tilde{q}_2}}_{i_{\tilde{p}_1+1},\ldots,i_{\tilde{p}_2}}(e)\cdots(A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e)$$

при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}$, $j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r$ — прямое произведение тензоров $A_1, \ldots, A_r$.

Утверждение (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 3$*,* p_k*,* $q_k \in \mathbb{Z}_+$*,* $A_k \in (TL)^{q_k}_{p_k}$ *при* $k = \overline{1,r}$*. Тогда:* $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_{r-1}) \otimes A_r$*,* $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r = A_1 \otimes (A_2 \otimes \cdots \otimes A_r)$*.*

Доказательство. Обозначим: $\tilde{p}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} p_m$, $\tilde{q}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} q_m$ при $k = \overline{1, r}$.

1. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}$, $j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((A_1 \otimes \cdots \otimes A_{r-1}) \otimes A_r\big)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) =$$
$$= \big((A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e) \cdots (A_{r-1})^{j_{\tilde{q}_{r-2}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_{r-1}}}_{i_{\tilde{p}_{r-2}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_{r-1}}}(e)\big)(A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) =$$
$$= (A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e) \cdots (A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e).$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}$, $j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(A_1 \otimes (A_2 \otimes \cdots \otimes A_r)\big)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = (A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e)\big((A_2)^{j_{\tilde{q}_1+1},\ldots,j_{\tilde{q}_2}}_{i_{\tilde{p}_1+1},\ldots,i_{\tilde{p}_2}}(e) \cdots (A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e)\big) =$$
$$= (A_1)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}(e) \cdots (A_r)^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e) = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}(e). \quad \square$$

11.5. Возможные обобщения

1. Можно рассматривать не наборы чисел из поля $\mathbb{K}$, а наборы объектов более сложной природы. Например, базис e линейного пространства L можно интерпретировать как тензор порядка $\binom{0}{1}$.

2. Можно рассматривать геометрические объекты, определённые не для всех базисов линейного пространства.

3. Можно рассматривать геометрические объекты, у которых разные индексы относятся к разным пространствам. Например, матрицу линейного оператора $A\colon L_1 \implies L_2$ можно интерпретировать как тензор порядка $\binom{0}{1}$ в пространстве L_1 и тензор порядка $\binom{1}{0}$ в пространстве L_2.

4. Можно рассматривать тензоры, у которых по крайней мере часть индексов преобразуется с помощью матриц $\big\{\overline{\alpha^i_{i'}(e, e')}\big\}^{i=\overline{1,N}}_{i'=\overline{1,N}}$, $\big\{\overline{\alpha^{i'}_i(e', e)}\big\}^{i'=\overline{1,N}}_{i=\overline{1,N}}$ (здесь: $\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$ при $z \in \mathbb{C}$). Например, матрица полуторалинейной формы преобразуется по закону: $A_{i'j'}(e') = A_{ij}(e)\overline{\alpha^i_{i'}(e, e')}\alpha^j_{j'}(e, e')$ при i', $j' = \overline{1, N}$.

Лекция 12. Матрица линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2, $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный (полулинейный) оператор. Обозначим: $[A]_i^j(f,e) = [Ae_i]^j(f)$ при: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Очевидно: $[A](f,e) \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $Ae_i = [A]_i^j(f,e)f_j$ при $i = \overline{1, N_1}$; $[A]_i(f,e) = [Ae_i](f)$ при $i = \overline{1, N_1}$. Будем говорить, что $[A](f,e)$ — матрица линейного (полулинейного) оператора A в базисах f, e.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L, $A\colon L \implies L$, A — линейный (полулинейный) оператор. Обозначим: $[A]_i^j(e) = [Ae_i]^j(e)$ при i, $j = \overline{1, N}$. Очевидно: $[A](e) \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $Ae_i = [A]_i^j(e)e_j$ при $i = \overline{1, N}$; $[A]_i(e) = [Ae_i](e)$ при $i = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $[A](e)$ — матрица линейного (полулинейного) оператора A в базисе e.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L, $A\colon L \implies L$, A — линейный (полулинейный) оператор. Очевидно, $[A](e,e) = [A](e)$.

Замечание (примеры). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть: L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. Докажем, что $[\Theta](f,e) = \tilde{\Theta}$ (здесь $\tilde{\Theta}$ — нулевая матрица из множества $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$). Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда: $[\Theta]_i^j(f,e) = [\Theta e_i]^j(f) = [\theta_2]^j(f) = 0$.

2. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e, f — базисы пространства L. Докажем, что $[I](f,e) = \alpha(f,e)$. Пусть i, $j = \overline{1, N}$. Тогда: $[I]_i^j(f,e) = [Ie_i]^j(f) = [e_i]^j(f) = \alpha_i^j(f,e)$.

3. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L. Тогда: $[I](e) = [I](e,e) = \alpha(e,e) = \tilde{I}$ (здесь $\tilde{I}$ — единичная матрица из множества $\mathbb{K}^{N \times N}$).

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2.*

1. Пусть $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Тогда: $Ax = [A]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$.

2. Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $Ax = Q_i^j[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](f,e) = Q$.

3. Пусть: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — полулинейный оператор. Тогда: $Ax = [A]_i^j(f,e)\overline{[x]^i(e)}f_j$ при $x \in L_1$.

4. Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $Ax = Q_i^j\overline{[x]^i(e)}f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — полулинейный оператор, $[A](f,e) = Q$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = A\big([x]^i(e)e_i\big) = [x]^i(e)A(e_i) = [x]^i(e)\big([A]_i^j(f,e)f_j\big) = [A]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j.$$

2. Докажем, что $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $A\colon L_1 \implies L_2$.
Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$A(x+y) = Q_i^j[x+y]^i(e)f_j = Q_i^j\big([x]^i(e) + [y]^i(e)\big)f_j = Q_i^j[x]^i(e)f_j + Q_i^j[y]^i(e)f_j = Ax + Ay.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$A(\lambda x) = Q_i^j[\lambda x]^i(e)f_j = Q_i^j\big(\lambda[x]^i(e)\big)f_j = \lambda\big(Q_i^j[x]^i(e)f_j\big) = \lambda A(x).$$

Докажем, что $[A](f,e) = Q$. Пусть $i = \overline{1,N_1}$. Очевидно, $Ae_i = [A]_i^j(f,e)f_j$. С другой стороны:

$$Ae_i = Q_k^j[e_i]^k(e)f_j = Q_k^j\delta_i^k f_j = Q_i^j f_j.$$

Тогда: $[A]_i^j(f,e) = Q_i^j$ при $j = \overline{1,N_2}$. Следовательно, $[A](f,e) = Q$.

3. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = A\big([x]^i(e)e_i\big) = \overline{[x]^i(e)}A(e_i) = \overline{[x]^i(e)}\big([A]_i^j(f,e)f_j\big) = [A]_i^j(f,e)\overline{[x]^i(e)}f_j.$$

4. Докажем, что: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — полулинейный оператор. Очевидно, $A\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$A(x+y) = Q_i^j\overline{[x+y]^i(e)}f_j = Q_i^j\overline{\big([x]^i(e)+[y]^i(e)\big)}f_j = Q_i^j\overline{[x]^i(e)}f_j + Q_i^j\overline{[y]^i(e)}f_j = Ax + Ay.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$A(\lambda x) = Q_i^j\overline{[\lambda x]^i(e)}f_j = Q_i^j\overline{\big(\lambda[x]^i(e)\big)}f_j = \overline{\lambda}\big(Q_i^j\overline{[x]^i(e)}f_j\big) = \overline{\lambda}A(x).$$

Докажем, что $[A](f,e) = Q$. Пусть $i = \overline{1,N_1}$. Очевидно, $Ae_i = [A]_i^j(f,e)f_j$. С другой стороны:

$$Ae_i = Q_k^j\overline{[e_i]^k(e)}f_j = Q_k^j\overline{\delta_i^k}f_j = Q_k^j\delta_i^k f_j = Q_i^j f_j.$$

Тогда: $[A]_i^j(f,e) = Q_i^j$ при $j = \overline{1,N_2}$. Следовательно, $[A](f,e) = Q$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2.

Пусть: A**,** $B \in \mathrm{Lin}(L_1,L_2)$**,** $[A](f,e) = [B](f,e)$**. Докажем, что** $A = B$**.** Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = [A]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j = [B]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j = Bx.$$

Следовательно, $A = B$.

Пусть: Q_1**,** $Q_2 \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$**,** $(Q_1)_i^j[x]^i(e)f_j = (Q_2)_i^j[x]^i(e)f_j$ **при** $x \in L_1$**. Докажем, что** $Q_1 = Q_2$**.** Обозначим: $Ax = (Q_1)_i^j[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A \in \mathrm{Lin}(L_1,L_2)$, $[A](f,e) = Q_1$. Пусть $x \in L_1$. Тогда: $Ax = (Q_1)_i^j[x]^i(e)f_j = (Q_2)_i^j[x]^i(e)f_j$. Следовательно, $[A](f,e) = Q_2$. Итак, $Q_1 = Q_2$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2, $Q \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$Q_i^j[x]^i(e)f_j = \big(Q_i^j[x]^i(e)\big)f_j = \big(Q[x](e)\big)^j f_j = \big(Qh_e(x)\big)^j f_j = \big(\hat{Q}(h_e x)\big)^j f_j = h_f^{-1}\big(\hat{Q}(h_e x)\big) =$$
$$= (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x.$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*.*

1. Пусть $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда:* $[Ax](f) = [A](f,e)[x](e)$ *при* $x \in L_1$*.*

2. Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $A \colon L_1 \implies L_2$*,* $[Ax](f) = Q[x](e)$ *при* $x \in L_1$*. Тогда:* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* $[A](f,e) = Q$*.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда: $[A](f,e)[x](e) \in \mathbb{K}^{N_2}$,

$$Ax = [A]^j_i(f,e)[x]^i(e) f_j = \big([A]^j_i(f,e)[x]^i(e)\big) f_j = \big([A](f,e)[x](e)\big)^j f_j.$$

Следовательно, $[Ax](f) = [A](f,e)[x](e)$.

2. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = [Ax]^j(f) f_j = \big(Q[x](e)\big)^j f_j = \big(Q^j_i [x]^i(e)\big) f_j = Q^j_i [x]^i(e) f_j.$$

Следовательно: $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](f,e) = Q$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*.*

1. Пусть: $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* $Q = [A](f,e)$*. Тогда* $A = h_f^{-1} \hat{Q} h_e$*.*

2. Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*,* $A = h_f^{-1} \hat{Q} h_e$*. Тогда:* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* $[A](f,e) = Q$*.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = Q^j_i [x]^i(e) f_j = (h_f^{-1} \hat{Q} h_e) x.$$

Следовательно, $A = h_f^{-1} \hat{Q} h_e$.

2. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = (h_f^{-1} \hat{Q} h_e) x = Q^j_i [x]^i(e) f_j.$$

Следовательно: $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](f,e) = Q$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2, $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $Q = [A](f,e)$.

Докажем, что $\ker(A) = h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big]$**.** Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда:

$$x \in L_1,\ Ax = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ (h_f^{-1} \hat{Q} h_e) x = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ h_f^{-1}\big(\hat{Q}(h_e x)\big) = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ \hat{Q}(h_e x) = \tilde{\theta}_2$$

(здесь $\tilde{\theta}_2$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N_2}$). Обозначим, $\tilde{x} = h_e x$. Тогда:

$$x \in L_1,\ \tilde{x} = h_e x,\ \hat{Q}\tilde{x} = \tilde{\theta}_2;$$

$$\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1},\ x = h_e^{-1}\tilde{x},\ \hat{Q}\tilde{x} = \tilde{\theta}_2;$$
$$\tilde{x} \in \ker(\hat{Q}),\ x = h_e^{-1}\tilde{x};$$
$$x \in h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big].$$

Пусть $x \in h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big]$. Тогда существует столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{x} \in \ker(\hat{Q})$, $x = h_e^{-1}\tilde{x}$. Следовательно:

$$\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1},\ x = h_e^{-1}\tilde{x},\ \hat{Q}\tilde{x} = \tilde{\theta}_2;$$
$$x \in L_1,\ \tilde{x} = h_e x,\ \hat{Q}\tilde{x} = \tilde{\theta}_2;$$
$$x \in L_1,\ \hat{Q}(h_e x) = \tilde{\theta}_2;$$
$$x \in L_1,\ h_f^{-1}\big(\hat{Q}(h_e x)\big) = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ Ax = \theta_2;$$
$$x \in \ker(A).$$

Так как $\mathbb{K}^{N_1} \overset{h_e^{-1}}{\approx} L_1$**, то:**

$$\dim\big(\ker(A)\big) = \dim\Big(h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big]\Big) = \dim\big(\ker(\hat{Q})\big).$$

Пусть $N_1 = N_2$**. Докажем, что** $\ker(A) = \{\theta_1\} \iff \det(Q) \neq 0$**.** Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда: $\ker(\hat{Q}) = h_e\big[\ker(A)\big] = \{\tilde{\theta}_1\}$. Следовательно, $\det(Q) \neq 0$.

Пусть $\det(Q) \neq 0$. Тогда $\ker(\hat{Q}) = \{\tilde{\theta}_1\}$. Следовательно: $\ker(A) = h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big] = \{\theta_1\}$.

Очевидно:

$$\mathrm{R}(A) = A[L_1] = (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)[L_1] = h_f^{-1}\Big[\hat{Q}\big[h_e[L_1]\big]\Big] = h_f^{-1}\Big[\hat{Q}\big[\mathbb{K}^{N_1}\big]\Big] = h_f^{-1}\big[L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\big] =$$
$$= L(h_f^{-1}Q_1, \ldots, h_f^{-1}Q_{N_1}).$$

Так как $\mathbb{K}^{N_2} \overset{h_f^{-1}}{\approx} L_2$**, то:**

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\Big(h_f^{-1}\big[L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\big]\Big) = \dim\big(L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\big) = \mathrm{rank}(Q).$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*.*

1. *Пусть* $A, B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда* $[A + B](f, e) = [A](f, e) + [B](f, e)$*.*
2. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда* $[\lambda A](f, e) = \lambda[A](f, e)$*.*

Доказательство.

1. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $(A + B)e_i = [A + B]_i^j(f, e)f_j$. С другой стороны:

$$(A + B)e_i = Ae_i + Be_i = [A]_i^j(f, e)f_j + [B]_i^j(f, e)f_j = \big([A]_i^j(f, e) + [B]_i^j(f, e)\big)f_j.$$

Тогда: $[A + B]_i^j(f, e) = [A]_i^j(f, e) + [B]_i^j(f, e)$ при $j = \overline{1, N_2}$. Следовательно: $[A + B]_i^j(f, e) = \big([A](f, e) + [B](f, e)\big)_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$. Тогда $[A + B](f, e) = [A](f, e) + [B](f, e)$.

2. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $(\lambda A)e_i = [\lambda A]_i^j(f,e)f_j$. С другой стороны:

$$(\lambda A)e_i = \lambda A(e_i) = \lambda\big([A]_i^j(f,e)f_j\big) = \big(\lambda[A]_i^j(f,e)\big)f_j.$$

Тогда: $[\lambda A]_i^j(f,e) = \lambda[A]_i^j(f,e)$ при $j = \overline{1, N_2}$. Следовательно: $[\lambda A]_i^j(f,e) = \big(\lambda[A](f,e)\big)_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$. Тогда $[\lambda A](f,e) = \lambda[A](f,e)$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$.

Пусть: e_0 — базис пространства L_1, f_0 — базис пространства L_2. Обозначим: $\varphi(A) = [A](f_0, e_0)$ при $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, φ — изоморфизм пространства $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ на пространство $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Тогда: $\dim\big(\mathrm{Lin}(L_1, L_2)\big) = \dim(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}) = N_1 N_2$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; L_3 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_3 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_3) = N_3$; $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2, g — базис пространства L_3. Тогда $[BA](g,e) = [B](g,f)[A](f,e)$.*

Доказательство. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $(BA)e_i = [BA]_i^k(g,e)g_k$. С другой стороны:

$$(BA)e_i = B(Ae_i) = B\big([A]_i^j(f,e)f_j\big) = [A]_i^j(f,e)B(f_j) = [A]_i^j(f,e)\big([B]_j^k(g,f)g_k\big) = \\ = \big([B]_j^k(g,f)[A]_i^j(f,e)\big)g_k.$$

Тогда: $[BA]_i^k(g,e) = [B]_j^k(g,f)[A]_i^j(f,e)$ при $k = \overline{1, N_3}$. Следовательно: $[BA]_i^k(g,e) = \big([B](g,f)[A](f,e)\big)_i^k$ при $k = \overline{1, N_3}$. Тогда $[BA](g,e) = [B](g,f)[A](f,e)$. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e, e' — базисы пространства L_1, f, f' — базисы пространства L_2.*

1. Пусть $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Тогда: $[A]_{i'}^{j'}(f', e') = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f,e)\alpha_{i'}^i(e, e')$ при: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$; $[A](f', e') = \alpha(f', f)[A](f,e)\alpha(e, e')$.

2. Пусть: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — полулинейный оператор. Тогда: $[A]_{i'}^{j'}(f', e') = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f,e)\overline{\alpha_{i'}^i(e, e')}$ при: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$; $[A](f', e') = \alpha(f', f)[A](f,e)\overline{\alpha(e, e')}$.

Доказательство.

1. Пусть: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$[A]_{i'}^{j'}(f', e') = [Ae'_{i'}]^{j'}(f') = \Big[A\big(\alpha_{i'}^i(e, e')e_i\big)\Big]^{j'}(f') = \alpha_{i'}^i(e, e')[Ae_i]^{j'}(f') = \\ = \alpha_{i'}^i(e, e')\big(\alpha_j^{j'}(f', f)[Ae_i]^j(f)\big) = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f,e)\alpha_{i'}^i(e, e').$$

Следовательно:

$$[A]_{i'}^{j'}(f', e') = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f,e)\alpha_{i'}^i(e, e') = \big(\alpha(f', f)[A](f,e)\big)_i^{j'}\alpha_{i'}^i(e, e') = \\ = \big(\alpha(f', f)[A](f,e)\alpha(e, e')\big)_{i'}^{j'}.$$

Тогда $[A](f', e') = \alpha(f', f)[A](f,e)\alpha(e, e')$.

2. Пусть: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$[A]^{j'}_{i'}(f', e') = [Ae'_{i'}]^{j'}(f') = \Big[A\big(\alpha^{i}_{i'}(e, e')e_i\big)\Big]^{j'}(f') = \overline{\alpha^{i}_{i'}(e, e')}[Ae_i]^{j'}(f') =$$
$$= \overline{\alpha^{i}_{i'}(e, e')}\big(\alpha^{j'}_{j}(f', f)[Ae_i]^{j}(f)\big) = \alpha^{j'}_{j}(f', f)[A]^{j}_{i}(f, e)\overline{\alpha^{i}_{i'}(e, e')}.$$

Следовательно:

$$[A]^{j'}_{i'}(f', e') = \alpha^{j'}_{j}(f', f)[A]^{j}_{i}(f, e)\overline{\alpha^{i}_{i'}(e, e')} = \big(\alpha(f', f)[A](f, e)\big)^{j'}_{i}\overline{\alpha^{i}_{i'}(e, e')} =$$
$$= \big(\alpha(f', f)[A](f, e)\overline{\alpha(e, e')}\big)^{j'}_{i'}.$$

Тогда $[A](f', e') = \alpha(f', f)[A](f, e)\overline{\alpha(e, e')}$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$.

Пусть: e — базис пространства L_1, $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $\big\{[A]_i(f, e)\big\}_f \in (TL_2)^1_0$.

Пусть: f — базис пространства L_2, $j = \overline{1, N_2}$. Очевидно, $\big\{[A]^j(f, e)\big\}_e \in (TL_1)^0_1$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$.

Очевидно, $\big\{[A](e)\big\}_e \in (TL)^1_1$.

Так как $\big\{[A](e)\big\}_e \in (TL)^1_1$, то: $\operatorname{tr}\big([A](e')\big) = \operatorname{tr}\big([A](e)\big)$, $\det\big([A](e')\big) = \det\big([A](e)\big)$ при: e, e' — базисы пространства L.

Выберем некоторый базис e пространства L. Обозначим: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\big([A](e)\big)$, $\det(A) = \det\big([A](e)\big)$.

Очевидно: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\Big(\big\{[A](e)\big\}_e\Big)$, $\det(A) = \det\Big(\big\{[A](e)\big\}_e\Big)$.

Лекция 13. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

13.1. Инвариантные подпространства линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L, L)$. Будем говорить, что Q — инвариантное подпространство оператора A, если: Q — подпространство пространства L, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A[Q] \subseteq Q$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L, L)$, *Q — инвариантное подпространство оператора A. Тогда* $A|_Q \in \mathrm{Lin}(Q, Q)$.

Доказательство. Так как Q — инвариантное подпространство оператора A, то: Q — подпространство пространства L, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A[Q] \subseteq Q$.

Так как: $A \in \mathrm{lin}(L, L)$, Q — подпространство пространства L, то $A|_Q \in \mathrm{lin}(L, L)$. Так как $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, то: $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A) = Q$. Так как $A[Q] \subseteq Q$, то: $\mathrm{R}(A|_Q) = A[Q] \subseteq Q$. Итак, $A|_Q \in \mathrm{Lin}(Q, Q)$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L, L)$, $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ *— инвариантные подпространства оператора A. Тогда* $Q_1 + \cdots + Q_r$ *— инвариантное подпространство оператора A.*

Доказательство. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L, то $Q_1 + \cdots + Q_r$ — подпространство пространства L.

Пусть $u \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Тогда существуют векторы $x_1, \ldots, x_r$, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $u = x_1 + \cdots + x_r$. Следовательно: $x_1 \in Q_1 \subseteq \mathrm{D}(A), \ldots, x_r \in Q_r \subseteq \mathrm{D}(A)$, $u = x_1 + \cdots + x_r$. Тогда: $u \in \mathrm{D}(A)$, $Au = A(x_1 + \cdots + x_r) = Ax_1 + \cdots + Ax_r \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Итак, $Q_1 + \cdots + Q_r$ — инвариантное подпространство оператора A. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; A, $B \in \mathrm{Lin}(L, L)$, *A, B — коммутирующие операторы. Тогда:* $\ker(B)$ *— инвариантное подпространство оператора A;* $\mathrm{R}(B)$ *— инвариантное подпространство оператора A.*

Доказательство. Так как $B \in \mathrm{lin}(L, L)$, то $\ker(B)$ — подпространство пространства L.

Пусть $x \in \ker(B)$. Тогда: $x \in L$, $Bx = \theta$. Следовательно: $Ax \in L$, $B(Ax) = (BA)x = (AB)x = A(Bx) = A\theta = \theta$. Тогда $Ax \in \ker(B)$. Итак, $\ker(B)$ — инвариантное подпространство оператора A.

Так как $B \in \mathrm{lin}(L, L)$, то $\mathrm{R}(B)$ — подпространство пространства L.

Пусть $x \in \mathrm{R}(B)$. Тогда существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $x = Bu$. Следовательно: $Au \in L$, $Ax = A(Bu) = (AB)u = (BA)u = B(Au)$. Тогда $Ax \in \mathrm{R}(B)$. Итак, $\mathrm{R}(B)$ — инвариантное подпространство оператора A. □

Утверждение (вспомогательный результат). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; *e — базис пространства L.*

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$, $i_1 < \cdots < i_r$.

1. Пусть: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}$, $x = \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha^k e_{i_k}$. *Тогда:* $x \in L$, $[x]^{i_k}(e) = \alpha^k$ *при* $k = \overline{1, r}$; $[x]^j(e) = 0$ *при:* $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

2. Пусть: $x \in L$, $[x]^{i_k}(e) = \alpha^k$ *при* $k = \overline{1, r}$; $[x]^j(e) = 0$ *при:* $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. *Тогда:* $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}$, $x = \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha^k e_{i_k}$.

Доказательство.

1. Очевидно, $x \in L$. Обозначим: $\tilde{x}^{i_k} = \alpha^k$ при $k = \overline{1,r}$; $\tilde{x}^j = 0$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Тогда: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $x = \tilde{x}^j e_j$. Следовательно, $[x](e) = \tilde{x}$. Тогда: $[x]^{i_k}(e) = \tilde{x}^{i_k} = \alpha^k$ при $k = \overline{1,r}$; $[x]^j(e) = \tilde{x}^j = 0$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

2. Очевидно: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}$, $x = \sum\limits_{j=1}^{N} [x]^j(e) e_j = \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha^k e_{i_k}$.

Утверждение (вспомогательный результат)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e *— базис пространства* L*.*

Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $i_1, \ldots, i_r = \overline{1,N}$*,* $i_1 < \cdots < i_r$*,* $Q = L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$*.*

1. Пусть $x \in Q$*. Тогда:* $x \in L$*,* $[x]^j(e) = 0$ *при:* $j = \overline{1,N}$*,* $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$*.*

2. Пусть: $x \in L$*,* $[x]^j(e) = 0$ *при:* $j = \overline{1,N}$*,* $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$*. Тогда* $x \in Q$*.*

Доказательство.

1. Так как $x \in Q$, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}$, $x = \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha^k e_{i_k}$. Тогда: $x \in L$, $[x]^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

2. Очевидно:

$$x = \sum_{j=1}^{N} [x]^j(e) e_j = \sum_{k=1}^{r} [x]^{i_k}(e) e_{i_k} \in Q. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* e *— базис пространства* L*.*

Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $i_1, \ldots, i_r = \overline{1,N}$*,* $i_1 < \cdots < i_r$*,* $Q = L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$*.*

1. Пусть Q *— инвариантное подпространство оператора* A*. Тогда:* $[A]^j_{i_k}(e) = 0$ *при:* $k = \overline{1,r}$*,* $j = \overline{1,N}$*,* $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$*.*

2. Пусть: $[A]^j_{i_k}(e) = 0$ *при:* $k = \overline{1,r}$*,* $j = \overline{1,N}$*,* $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$*. Тогда* Q *— инвариантное подпространство оператора* A*.*

3. Пусть Q *— инвариантное подпространство оператора* A*. Тогда:* $[A|_Q]^m_k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = [A]^{i_m}_{i_k}(e)$ *при* k*,* $m = \overline{1,r}$*.*

Доказательство.

1. Пусть $k = \overline{1,r}$. Тогда $e_{i_k} \in Q$. Так как Q — инвариантное подпространство оператора A, то $Ae_{i_k} \in Q$. Тогда: $[Ae_{i_k}]^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Следовательно: $[A]^j_{i_k}(e) = [Ae_{i_k}]^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

2. Очевидно, Q — подпространство пространства L. Пусть $x \in Q$. Тогда: $[x]^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Следовательно:

$$Ax = \sum_{i,j=\overline{1,N}} [A]^j_i(e)[x]^i(e) e_j = \sum_{\substack{k=\overline{1,r},\\ j=\overline{1,N}}} [A]^j_{i_k}(e)[x]^{i_k}(e) e_j = \sum_{k,m=\overline{1,r}} [A]^{i_m}_{i_k}(e)[x]^{i_k}(e) e_{i_m} \in Q.$$

Итак, Q — инвариантное подпространство пространства L.

3. Пусть $k = \overline{1,r}$. Очевидно, $A|_Q\, e_{i_k} = \sum\limits_{m=1}^{r} [A|_Q]^m_k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) e_{i_m}$. Так как Q — инвариантное подпространство оператора A, то: $[A]^j_{i_k}(e) = 0$ при: $j = \overline{1,N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Тогда:

$$A|_Q\, e_{i_k} = Ae_{i_k} = \sum_{j=1}^{N} [A]^j_{i_k}(e) e_j = \sum_{m=1}^{r} [A]^{i_m}_{i_k}(e) e_{i_m}.$$

Следовательно: $[A|_Q]^m_k(e_{i_1},\dots,e_{i_r}) = [A]^{i_m}_{i_k}(e)$ при $m=\overline{1,r}$. Итак: $[A|_Q]^m_k(e_{i_1},\dots,e_{i_r}) = [A]^{i_m}_{i_k}(e)$ при k, $m=\overline{1,r}$. □

13.2. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Замечание (оператор $A-\lambda I$). Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A\in\operatorname{lin}(L,L)$, $\lambda\in\mathbb{K}$.

Очевидно:

$$\mathrm{D}(A-\lambda I)=\mathrm{D}(A)\cap\mathrm{D}(I)=\mathrm{D}(A)\cap L=\mathrm{D}(A).$$

Пусть $x\in\mathrm{D}(A-\lambda I)$. Тогда:

$$(A-\lambda I)x = Ax-\lambda I(x)=Ax-\lambda x.$$

Очевидно:

$$\ker(A-\lambda I)=\big\{x\colon x\in\mathrm{D}(A-\lambda I)\wedge(A-\lambda I)x=\theta\big\}=\big\{x\colon x\in\mathrm{D}(A)\wedge Ax-\lambda x=\theta\big\}= \\ =\big\{x\colon x\in\mathrm{D}(A)\wedge Ax=\lambda x\big\}.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A\in\operatorname{lin}(L,L)$, λ_1, $\lambda_2\in\mathbb{K}$.

Пусть $x\in\ker(A-\lambda_2 I)$. Тогда: $x\in\mathrm{D}(A)$, $Ax=\lambda_2x$. Следовательно:

$$x\in\mathrm{D}(A)=\mathrm{D}(A-\lambda_1 I),$$
$$(A-\lambda_1 I)x=Ax-\lambda_1x=\lambda_2x-\lambda_1x=(\lambda_2-\lambda_1)x.$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $A\in\operatorname{lin}(L,L)$*,* λ_1*,* $\lambda_2\in\mathbb{K}$*. Тогда* $\ker(A-\lambda_2 I)$ *— инвариантное подпространство оператора* $A-\lambda_1 I$*.*

Доказательство. Очевидно, $\ker(A-\lambda_2 I)$ — подпространство пространства L. Пусть $x\in\ker(A-\lambda_2 I)$. Тогда: $x\in\mathrm{D}(A-\lambda_1 I)$, $(A-\lambda_1 I)x=(\lambda_2-\lambda_1)x\in\ker(A-\lambda_2 I)$. Итак, $\ker(A-\lambda_2 I)$ — инвариантное подпространство оператора A. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A\in\operatorname{lin}(L,L)$.

1. Будем говорить, что λ — собственное значение оператора A (λ — точка дискретного спектра оператора A), если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}$.

Очевидно, λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда:

$$\lambda\in\mathbb{K},\ \exists x\big(x\in\ker(A-\lambda I)\wedge x\neq\theta\big);$$
$$\lambda\in\mathbb{K},\ \exists x\big(x\in\mathrm{D}(A-\lambda I)\wedge(A-\lambda I)x=\theta\wedge x\neq\theta\big);$$
$$\lambda\in\mathbb{K},\ \exists x\big(x\in\mathrm{D}(A)\wedge Ax-\lambda x=\theta\wedge x\neq\theta\big);$$
$$\lambda\in\mathbb{K},\ \exists x\big(x\in\mathrm{D}(A)\wedge Ax=\lambda x\wedge x\neq\theta\big).$$

Обозначим через $\mathrm{SD}(A)$ множество всех собственных значений оператора A.

2. Будем говорить, что λ — точка непрерывного спектра оператора A, если: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I)\neq L$.

Обозначим через $\mathrm{SC}(A)$ множество всех точек непрерывного спектра оператора A.

3. Будем говорить, что λ — точка спектра оператора A, если: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}\vee\mathrm{R}(A-\lambda I)\neq L$.

4. Будем говорить, что λ — регулярная точка оператора A, если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I)=L$.

5. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что x — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ, если: $x\in\ker(A-\lambda I)$, $x\neq\theta$.

Очевидно, x является собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ, тогда и только тогда, когда:

$$x\in\mathrm{D}(A-\lambda I),\ (A-\lambda I)x=\theta,\ x\neq L;$$
$$x\in\mathrm{D}(A),\ Ax-\lambda x=\theta,\ x\neq\theta;$$
$$x\in\mathrm{D}(A),\ Ax=\lambda x,\ x\neq\theta.$$

6. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что $\ker(A-\lambda I)$ — собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению λ.

Пусть $\lambda\in\mathbb{K}$. Обозначим, $H_A(\lambda)=\ker(A-\lambda I)$.

7. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что $\dim\big(\ker(A-\lambda I)\big)$ — геометрическая кратность собственного значения λ.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(L)\neq+\infty$*;* $A\in\mathrm{Lin}(L,L)$*. Тогда* $\mathrm{SC}(A)=\varnothing$*.*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{SC}(A)\neq\varnothing$. Тогда существует число λ, удовлетворяющее условию $\lambda\in\mathrm{SC}(A)$. Следовательно: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I)\neq L$. Согласно 1-й теореме Фредгольма, так как: $\dim(L)\neq+\infty$, $A-\lambda I\in\mathrm{Lin}(L,L)$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, то $\mathrm{R}(A-\lambda I)=L$. Итак, $\mathrm{SC}(A)=\varnothing$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $A\in\mathrm{lin}(L,L)$*,* $r\in\mathbb{N}$*,* $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ *— различные собственные значения оператора* A*,* $H_1,\dots,H_r$ *— соответствующие собственные подпространства. Тогда* $H_1,\dots,H_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство. Очевидно, утверждение справедливо при $r=1$.

Пусть: $r_0\in\mathbb{N}$, утверждение справедливо при $r=r_0$. Докажем, что утверждение справедливо при $r=r_0+1$. Пусть: $x_1\in H_1,\dots,x_{r_0+1}\in H_{r_0+1}$, $\sum\limits_{k=1}^{r_0+1}x_k=\theta$. Тогда:

$$(A-\lambda_{r_0+1}I)\sum_{k=1}^{r_0+1}x_k=(A-\lambda_{r_0+1}I)\theta,$$
$$\sum_{k=1}^{r_0+1}(A-\lambda_{r_0+1}I)x_k=(A-\lambda_{r_0+1}I)\theta,$$
$$\sum_{k=1}^{r_0}(\lambda_k-\lambda_{r_0+1})x_k=\theta.$$

Так как $H_1, \dots, H_{r_0}$ — линейно независимые подпространства, то: $(\lambda_k - \lambda_{r_0+1})x_k = \theta$ при $k = \overline{1, r_0}$. Так как: $\lambda_k \neq \lambda_{r_0+1}$ при $k = \overline{1, r_0}$, то: $x_k = \theta$ при $k = \overline{1, r_0}$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{r_0+1} x_k = \theta$, то $x_{r_0+1} = \theta$. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L, L)$.

Пусть: λ — собственное значение оператора A, x — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ. Тогда: λ — собственное значение оператора A, $x \in \ker(A - \lambda I)$, $x \neq \theta$. Следовательно: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \ker(A - \lambda I)$, $x \neq \theta$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \ker(A - \lambda I)$, $x \neq \theta$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(A - \lambda I) \neq \{\theta\}$; $x \in \ker(A - \lambda I)$, $x \neq \theta$. Следовательно: λ — собственное значение оператора A, $x \in \ker(A - \lambda I)$, $x \neq \theta$. Тогда: λ — собственное значение оператора A, x — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L, L)$.

Пусть x — собственный вектор оператора A. Тогда: $x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda)$, $x \neq \theta$.

Пусть: $x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda)$, $x \neq \theta$. Тогда x — собственный вектор оператора A.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L, $i = \overline{1, N}$, $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: λ — собственное значение оператора A, e_i — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $e_i \in \ker(A - \lambda I)$. Следовательно: $\lambda \in \mathbb{K}$, $Ae_i = \lambda e_i$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $[A]_i^j(e) = [Ae_i]^j(e) = [\lambda e_i]^j(e)$ при $j = \overline{1, N}$. Следовательно: $[A]_i^i(e) = \lambda$, $[A]_i^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1, N}$, $j \neq i$.

Пусть: $[A]_i^i(e) = \lambda$, $[A]_i^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1, N}$, $j \neq i$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $[A]_i^i(e) = \lambda$, $[A]_i^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1, N}$, $j \neq i$. Следовательно: $\lambda \in \mathbb{K}$, $Ae_i = [A]_i^j(e)e_j = \lambda e_i$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $e_i \in \ker(A - \lambda I)$. Так как $e_i \neq \theta$, то: λ — собственное значение оператора A, e_i — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ.

Утверждение (приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

1. Пусть: e *— базис пространства* L, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ *— собственные значения оператора* A, $e_1, \dots, e_N$ *— соответствующие собственные векторы. Тогда:* e *— базис пространства* L,

$$[A](e) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

2. Пусть: e *— базис пространства* L,

$$[A](e) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Тогда: e — базис пространства L, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — собственные значения оператора A, $e_1, \ldots, e_N$ — соответствующие собственные векторы.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*.*

Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *— различные собственные значения оператора* A*;* $N_k \in \mathbb{N}$*,* $f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k}$ *— линейно независимые собственные векторы оператора* A*, соответствующие собственному значению* λ_k *при* $k = \overline{1,r}$*;* $\sum\limits_{k=1}^{r} N_k = N$*.*

Тогда: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *— **все** различные собственные значения оператора* A*;* $(f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k})$ *— базис подпространства* $H_A(\lambda_k)$ *при* $k = \overline{1,r}$*.*

Доказательство. Пусть $k = \overline{1,r}$. Так как: $f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k} \in H_A(\lambda_k)$, $f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы, то $\dim\bigl(H_A(\lambda_k)\bigr) \geqslant N_k$.

Предположим, что существует число λ_{r+1}, удовлетворяющее условиям: λ_{r+1} — собственное значение оператора A, $\lambda_{r+1} \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Так как λ_{r+1} — собственное значение оператора A, то $\dim\bigl(H_A(\lambda_{k+1})\bigr) \geqslant 1$. Так как: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные числа, $\lambda_{r+1} \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, то $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r+1}$ — различные числа. Тогда $H_A(\lambda_1), \ldots, H_A(\lambda_{r+1})$ — линейно независимые подпространства. Следовательно:

$$\dim(L) \geqslant \dim\Bigl(\sum_{k=1}^{r+1} H_A(\lambda_k)\Bigr) = \sum_{k=1}^{r+1} \dim\bigl(H_A(\lambda_k)\bigr) \geqslant \Bigl(\sum_{k=1}^{r} N_k\Bigr) + 1 = N + 1$$

(что противоречит утверждению $\dim(L) = N$). Итак, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все различные собственные значения оператора A.

Предположим, что существует число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1,N}$, $\dim\bigl(H_A(\lambda_{k_0})\bigr) \neq N_{k_0}$. Тогда $\dim\bigl(H_A(\lambda_{k_0})\bigr) \geqslant N_{k_0} + 1$. Так как $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные числа, то $H_A(\lambda_1), \ldots, H_A(\lambda_r)$ — линейно независимые подпространства. Тогда:

$$\dim(L) \geqslant \dim\Bigl(\sum_{k=1}^{r} H_A(\lambda_k)\Bigr) = \sum_{k=1}^{r} \dim\bigl(H_A(\lambda_k)\bigr) \geqslant \Bigl(\sum_{k=1}^{r} N_k\Bigr) + 1 = N + 1$$

(что противоречит утверждению $\dim(L) = N$). Итак: $\dim\bigl(H_A(\lambda_k)\bigr) = N_k$ при $k = \overline{1,r}$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Так как: $f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k} \in H_A(\lambda_k)$, $f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы, $\dim\bigl(H_A(\lambda_k)\bigr) = N_k$, то $(f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k})$ — базис подпространства $H_A(\lambda_k)$. □

13.3. Общие сведения о полиномах

Определение. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $N \neq 0 \implies a_N \neq 0$, $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}$. Очевидно, $F\colon \mathbb{K} \implies \mathbb{K}$. Будем говорить, что: F — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}$. Тогда F — полином на множестве $\mathbb{K}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{Z}_+$*,* $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$*,* $b_0, \ldots, b_N \in \mathbb{K}$*,* $Q \subseteq \mathbb{K}$*,* Q *— бесконечное множество,* $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{N} b_k x^k$ *при* $x \in Q$*. Тогда:* $a_k = b_k$ *при* $k = \overline{0,N}$*.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N_1 \in \mathbb{Z}_+$*,* $a_0, \ldots, a_{N_1} \in \mathbb{K}$*,* $N_1 \neq 0 \implies a_{N_1} \neq 0$*,* $N_2 \in \mathbb{Z}_+$*,* $b_0, \ldots, b_{N_2} \in \mathbb{K}$*,* $N_2 \neq 0 \implies b_{N_2} \neq 0$*,* $Q \subseteq \mathbb{K}$*,* Q *— бесконечное множество,* $\sum\limits_{k=1}^{N_1} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{N_2} b_k x^k$ *при* $x \in Q$*. Тогда:* $N_1 = N_2$*,* $a_k = b_k$ *при* $k = \overline{1, N_1}$*.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; F — полином на множестве $\mathbb{K}$. Выберем число N, удовлетворяющее условию: N — степень полинома F. Обозначим, $\deg(F) = N$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* F *— полином на множестве* $\mathbb{K}$*,* $\deg(F) \neq 0$*,* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— различные корни полинома* F*,* $m_1, \ldots, m_r$ *— соответствующие кратности. Тогда* $m_1 + \cdots + m_r \leqslant \deg(F)$*.*

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; F — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\deg(F) \neq 0$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — различные корни полинома F. Тогда $r \leqslant \deg(F)$.

Справедливы утверждения: $\ker(F)$ — конечное множество, $\operatorname{card}\bigl(\ker(F)\bigr) \leqslant \deg(F)$.

Определение. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Будем говорить, что $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, если для любой функции F, удовлетворяющей условиям: F — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\deg(F) \neq 0$, справедливо утверждение: $\ker(F) \neq \varnothing$.

Замечание. Очевидно, $\mathbb{Q}$ не является алгебраически замкнутым полем. Очевидно, $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым полем.

Теорема (основная теорема алгебры; будет доказана в 3-ем семестре)**.** *Справедливо утверждение:* $\mathbb{C}$ *— алгебраически замкнутое поле.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{C}$ *— **алгебраически замкнутое поле**,* F *— полином на множестве* $\mathbb{C}$*,* $\deg(F) \neq 0$*,* $r \in \mathbb{N}$*,* $z_1, \ldots, z_r$ *— все различные корни полинома* F*,* $m_1, \ldots, m_r$ *— соответствующие кратности. Тогда* $m_1 + \cdots + m_r = \deg(F)$*.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$; F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$. Выберем число N, выберем числа $a_0, \ldots, a_N$, удовлетворяющие условиям: N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Будем говорить, что $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$, если: $\tilde{F}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}_2$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$.

Пусть: F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Пусть $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда: $\tilde{F}$ — полином на множестве $\mathbb{K}_2$, N — степень полинома $\tilde{F}$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\tilde{F}$.

Пусть: F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Пусть: $\tilde{F}$ — полином на множестве $\mathbb{K}_2$, N — степень полинома $\tilde{F}$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\tilde{F}$. Тогда $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$. Пусть $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда: $\tilde{F}$ — полином на множестве $\mathbb{K}_2$, $\tilde{F}(x) = F(x)$ при $x \in \mathbb{K}_1$.

Пусть F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$. Пусть: $\tilde{F}$ — полином на множестве $\mathbb{K}_2$, $\tilde{F}(x) = F(x)$ при $x \in \mathbb{K}_1$. Тогда $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}_1$, $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}_1$; $\tilde{F}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}_2$. Тогда $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathbb{K}_2$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда $\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2$ — продолжение полинома $F_1 + F_2$ на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}_1$, F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда $\lambda\tilde{F}$ — продолжение полинома λF на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathbb{K}_2$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда $\tilde{F}_1\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_1F_2 на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда:

$$\ker(F) = \bigl\{x\colon x \in \mathbb{K}_1 \wedge F(x) = 0\bigr\} = \bigl\{x\colon x \in \mathbb{K}_1 \wedge x \in \mathbb{K}_2 \wedge F(x) = 0\bigr\} = \\ = \bigl\{x\colon x \in \mathbb{K}_1 \wedge x \in \mathbb{K}_2 \wedge \tilde{F}(x) = 0\bigr\} = \bigl\{x\colon x \in \mathbb{K}_1 \wedge x \in \ker(\tilde{F})\bigr\} = \ker(\tilde{F}) \cap \mathbb{K}_1.$$

Очевидно: $\ker(F) = \ker(\tilde{F}) \cap \mathbb{K}_1 \subseteq \ker(\tilde{F})$. Пусть: $x_0 \in \ker(F)$, m — кратность числа x_0 как корня полинома F. Тогда: $x_0 \in \ker(\tilde{F})$, m — кратность числа x_0 как корня полинома $\tilde{F}$. Пусть $\ker(\tilde{F}) \subseteq \mathbb{K}_1$. Тогда: $\ker(F) = \ker(\tilde{F}) \cap \mathbb{K}_1 = \ker(\tilde{F})$. Пусть $\ker(F) = \ker(\tilde{F})$. Тогда: $\ker(\tilde{F}) = \ker(F) \subseteq \mathbb{K}_1$.

13.4. Характеристический полином линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$.

Пусть: $m = \overline{1, N}$, $j = 0$. Обозначим, $X_{m,j}(\tilde{A}) = \tilde{A}_m$.

Пусть: $m = \overline{1, N}$, $j = 1$. Обозначим, $X_{m,j}(\tilde{A}) = \tilde{I}_m$ (здесь $\tilde{I}$ — единичная матрица из множества $\mathbb{K}^{N\times N}$).

Обозначим через μ_N множество всех функций σ, удовлетворяющих условию: $\sigma\colon \{1, \dots, N\} \implies \{0, 1\}$.

Пусть $k = \overline{0, N}$. Обозначим через $\mu_{N,k}$ множество всех функций σ, удовлетворяющих условиям: $\sigma \in \mu_N$, $\sigma(1) + \dots + \sigma(N) = k$.

Пусть $k = \overline{0, N}$. Обозначим:

$$\alpha_k(\tilde{A}) = (-1)^k \sum_{\sigma\in\mu_{N,k}} \det\bigl(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \dots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\bigr).$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. *Тогда* $\det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})\lambda^k$.

Доказательство. Очевидно:

$$\det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = \det\bigl((\tilde{A} - \lambda\tilde{I})_1, \dots, (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})_N\bigr) = \det\bigl(\tilde{A}_1 + (-\lambda)\tilde{I}_1, \dots, \tilde{A}_N + (-\lambda)\tilde{I}_N\bigr) = \\ = \sum_{\sigma\in\mu_N} \det\bigl(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \dots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\bigr)(-\lambda)^{\sigma(1)+\dots+\sigma(N)} = \\ = \sum_{k=0}^{N} \sum_{\sigma\in\mu_{N,k}} \det\bigl(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \dots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\bigr)(-\lambda)^k = \\ = \sum_{k=0}^{N}\Biggl((-1)^k \sum_{\sigma\in\mu_{N,k}} \det\bigl(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \dots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\bigr)\Biggr)\lambda^k = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})\lambda^k. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Очевидно:

$$\alpha_0(\tilde{A}) = (-1)^0 \det(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_N) = \det(\tilde{A});$$

$$\alpha_{N-1}(\tilde{A}) = (-1)^{N-1} \sum_{m=1}^{N} \det(\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_{m-1}, \tilde{A}_m, \tilde{I}_{m+1}, \ldots, \tilde{I}_N) = (-1)^{N-1} \sum_{m=1}^{N} \tilde{A}^m_m = $$
$$= (-1)^{N-1} \operatorname{tr}(\tilde{A});$$

$$\alpha_N(\tilde{A}) = (-1)^N \det(\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_N) = (-1)^N \det(\tilde{I}) = (-1)^N.$$

Замечание (определение характеристического полинома). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$.

Обозначим: $F_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Пусть: e — базис пространства L, $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\big([A - \lambda I](e)\big) = \det\big([A](e) - \lambda \tilde{I}\big) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k\big([A](e)\big)\lambda^k.$$

Так как: $\alpha_N\big([A](e)\big) = (-1)^N \neq 0$, то: F_A — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F_A, $\alpha_0\big([A](e)\big), \ldots, \alpha_N\big([A](e)\big)$ — коэффициенты полинома F_A. Будем говорить, что F_A — характеристический полином оператора A.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Так как: N — степень полинома F_A, $\alpha_0\big([A](e')\big), \ldots, \alpha_N\big([A](e')\big)$ — коэффициенты полинома F_A; N — степень полинома F_A, $\alpha_0\big([A](e)\big), \ldots, \alpha_N\big([A](e)\big)$ — коэффициенты полинома F_A, то: $\alpha_k\big([A](e')\big) = \alpha_k\big([A](e)\big)$ при $k = \overline{0, N}$.

Выберем некоторый базис e пространства L. Обозначим: $\alpha_k(A) = \alpha_k\big([A](e)\big)$ при $k = \overline{0, N}$.

Пусть e — базис пространства L. Тогда: N — степень полинома F_A, $\alpha_0(A), \ldots, \alpha_N$ — коэффициенты полинома F_A;

$$\alpha_0(A) = \alpha_0\big([A](e)\big) = \det\big([A](e)\big) = \det(A);$$
$$\alpha_{N-1}(A) = \alpha_{N-1}\big([A](e)\big) = (-1)^{N-1} \operatorname{tr}\big([A](e)\big) = (-1)^{N-1} \operatorname{tr}(A);$$
$$\alpha_N(A) = \alpha_N\big([A](e)\big) = (-1)^N.$$

Обозначим через $\tilde{F}_A$ продолжение полинома F_A на множество $\mathbb{C}$. Пусть: e — базис пространства L, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда:

$$\tilde{F}_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k\big([A](e)\big)\lambda^k = \det\big([A](e) - \lambda \tilde{I}\big).$$

Утверждение (основное свойство характеристического полинома)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*. Тогда* $\operatorname{SD}(A) = \ker(F_A)$*.*

Доказательство. Выберем некоторый базис e пространства L. Тогда:

$$\operatorname{SD}(A) = \big\{\lambda \colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge \ker(A - \lambda I) \neq \{\theta\}\big\} = \Big\{\lambda \colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge \det\big([A - \lambda I](e)\big) = 0\Big\} =$$
$$= \big\{\lambda \colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge F_A(\lambda) = 0\big\} = \ker(F_A). \quad \square$$

Определение (алгебраическая кратность собственного значения). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tilde{F}_A(\lambda) \neq 0$. Обозначим, $m_A(\lambda) = 0$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tilde{F}_A(\lambda) = 0$. Обозначим через $m_A(\lambda)$ кратность числа λ как корня полинома $\tilde{F}_A$.

Пусть $\lambda \in \mathrm{SD}(A)$. Будем говорить, что $m_A(\lambda)$ — алгебраическая кратность собственного значения λ.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Так как: $\deg(F_A) = N$, $N \neq 0$, то: $\ker(F_A)$ — конечное множество, $\mathrm{card}\big(\ker(F_A)\big) \leqslant N$. Пусть $\ker(F_A) \neq \varnothing$. Тогда $\sum\limits_{\lambda \in \ker(F_A)} m_A(\lambda) \leqslant N$.

Так как: $\deg(\tilde{F}_A) = N$, $N \neq 0$, то: $\ker(\tilde{F}_A)$ — конечное множество, $\mathrm{card}\big(\ker(\tilde{F}_A)\big) \leqslant N$. Пусть $\ker(\tilde{F}_A) \neq \varnothing$. Тогда $\sum\limits_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) \leqslant N$.

Пусть $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле. Так как: $\deg(\tilde{F}_A) = N$, $N \neq 0$, то: $\ker(\tilde{F}_A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) = N$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* λ_0 *— собственное значение оператора* A*. Тогда* $g_A(\lambda_0) \leqslant m_A(\lambda_0)$*.*

Доказательство. Обозначим: $H = H_A(\lambda_0)$, $g = g_A(\lambda_0)$, $m = m_A(\lambda_0)$. Очевидно, $g = \overline{1, N}$. Так как: $g \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = g$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_g$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \ldots, e_g \in H$, $e_1, \ldots, e_g$ — линейно независимые векторы.

Пусть $g = N$. Так как: $e_1, \ldots, e_g \in L$, $e_1, \ldots, e_g$ — линейно независимые векторы, $\dim(L) = N = g$, то $(e_1, \ldots, e_g)$ — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Так как $e_1, \ldots, e_g \in H$, то: $\tilde{A}_i^j = \lambda_0 \delta_i^j$ при i, $j = \overline{1, g}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^g.$$

Следовательно, $m = g$.

Пусть $g \neq N$. Тогда $g < N$. Так как: $e_1, \ldots, e_g \in L$, $e_1, \ldots, e_g$ — линейно независимые векторы, $N \in \mathbb{N}$, $g < N = \dim(L)$, то существуют векторы $e_{g+1}, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условиям: $e_{g+1}, \ldots, e_N \in L$, $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы. Так как: $e_1, \ldots, e_N \in L$, $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы, $\dim(L) = N$, то $(e_1, \ldots, e_N)$ — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Так как $e_1, \ldots, e_g \in H$, то: $\tilde{A}_i^j = \lambda_0 \delta_i^j$ при: $i = \overline{1, g}$, $j = \overline{1, N}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^g \det\Big(\{\tilde{A}_{g+i}^{g+j} - \lambda \delta_{g+i}^{g+j}\}_{i=\overline{1, N-g}}^{j=\overline{1, N-g}}\Big).$$

Следовательно, $m \geqslant g$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* I *— конечное множество,* Q_α *— подпространство пространства* L *при* $\alpha \in I$*.*

1. Пусть существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$*, удовлетворяющие условиям:* e *— базис пространства* L*,* $e_1, \ldots, e_N \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$*. Тогда:* $I \neq \varnothing$*,* $\sum\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha = L$*.*

2. Пусть: $I \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha = L$. *Тогда существуют векторы* $e_1, \ldots, e_N$, *удовлетворяющие условиям:* e *— базис пространства* L, $e_1, \ldots, e_N \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$.

Доказательство.

1. Так как $e_1 \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$, то $I \neq \varnothing$. Так как: $e_1, \ldots, e_N \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$, $\bigcup\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha \subseteq \sum\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$, то $e_1, \ldots, e_N \in \sum\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$. Так как $\sum\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$ — подпространство пространства L, то $L(e_1, \ldots, e_N) \subseteq \sum\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$. Так как e — базис пространства L, то $L(e_1, \ldots, e_N) = L$. Тогда $L \subseteq \sum\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha$. Очевидно, $\sum\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha \subseteq L$. Тогда $\sum\limits_{\alpha\in I} Q_\alpha = L$.

2. Пусть $\alpha \in I$. Так как: Q_α — подпространство пространства L, $\dim(Q_\alpha) \neq +\infty$, то существует число $N_\alpha \in \mathbb{N}$, существуют векторы $x_{\alpha,1}, \ldots, x_{\alpha,N_\alpha} \in L$, удовлетворяющие условию $Q_\alpha = L(x_{\alpha,1}, \ldots, x_{\alpha,N_\alpha})$. Обозначим:

$$X = \{x_{\alpha,k}\}_{\alpha\in I,\, k=\overline{1,N_\alpha}}$$

(здесь X — **семейство** векторов). Тогда:

$$L = \sum_{\alpha\in I} Q_\alpha = \sum_{\alpha\in I} L(x_{\alpha,1}, \ldots, x_{\alpha,N_\alpha}) = L(X).$$

Обозначим:

$$X_* = \left\{x_{\alpha,k} \colon \alpha \in I \wedge k = \overline{1, N_\alpha}\right\}$$

(здесь X_* — **множество** векторов). Тогда:

$$\operatorname{rank}(X_*) = \dim\bigl(L(X)\bigr) = \dim(L) = N.$$

Так как $N \in \mathbb{N}$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условию: e — базис множества X_*. Тогда e — базис подпространства $L(X)$. Следовательно, e — базис пространства L. Очевидно:

$$e_1, \ldots, e_N \in X_* \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} L(x_{\alpha,1}, \ldots, x_{\alpha,N_\alpha}) = \bigcup_{\alpha\in I} Q_\alpha. \quad \square$$

Утверждение (приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$.

1. Пусть существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, *удовлетворяющие условиям:* e *— базис пространства* L, $e_1, \ldots, e_N$ *— собственные векторы оператора* A. *Тогда:* $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda\in \operatorname{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$.

2. Пусть: $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda\in \operatorname{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$. *Тогда существуют векторы* $e_1, \ldots, e_N$, *удовлетворяющие условиям:* e *— базис пространства* L, $e_1, \ldots, e_N$ *— собственные векторы оператора* A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; I *— конечное множество,* Q_α *— подпространство пространства* L *при* $\alpha \in I$; $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *— линейно независимые подпространства (если* $I \neq \varnothing$*).*

1. Пусть: $I \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha = L$. *Тогда:* $I \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\alpha \in I} \dim(Q_\alpha) = N$.

2. Пусть: $I \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\alpha \in I} \dim(Q_\alpha) = N$. *Тогда:* $I \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha = L$.

Доказательство.

1. Так как $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — линейно независимые подпространства, то:

$$\sum_{\alpha \in I} \dim(Q_\alpha) = \dim\Big(\sum_{\alpha \in I} Q_\alpha\Big) = \dim(L) = N.$$

2. Так как $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — линейно независимые подпространства, то:

$$\dim\Big(\sum_{\alpha \in I} Q_\alpha\Big) = \sum_{\alpha \in I} \dim(Q_\alpha) = N.$$

Так как: $\sum\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$ — подпространство пространства L, $\dim(L) = N$, $N \neq +\infty$, то $\sum\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha = L$. □

Утверждение (приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

1. Пусть: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$. *Тогда:* $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\alpha \in I} g_A(\lambda) = N$.

2. Пусть: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\alpha \in I} g_A(\lambda) = N$. *Тогда:* $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$. *Пусть:* $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$. *Тогда:* $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) = N$.

Доказательство. Так как $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, то: $\ker(\tilde{F}_A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) = N$. Так как $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$, то $\ker(F_A) = \ker(\tilde{F}_A)$. Тогда:

$$\mathrm{SD}(A) = \ker(F_A) = \ker(\tilde{F}_A) \neq \varnothing;$$
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) = \sum_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) = N. \quad \square$$

Утверждение (приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

1. Пусть: $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$, $\forall \lambda \in \mathrm{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$. *Тогда:* $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$.

2. Пусть: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$. *Тогда:* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$, $\forall \lambda \in \mathrm{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$.

Доказательство.

1. Так как: $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$, то: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) = N$. Так как $\forall \lambda \in \mathrm{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$, то: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$. Тогда: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$.

2. Так как: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$, то: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$.

Предположим, что существует число λ_0, удовлетворяющее условиям: $\lambda_0 \in \ker(\tilde{F}_A)$, $\lambda_0 \notin \mathbb{K}$. Тогда: $\lambda_0 \in \ker(\tilde{F}_A)$, $\lambda_0 \notin \mathrm{SD}(A)$. Следовательно:

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) < \sum_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) \leqslant N$$

(что противоречит утверждению $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$). Итак, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$.

Предположим, что существует число λ_0, удовлетворяющее условиям: $\lambda_0 \in \mathrm{SD}(A)$, $g_A(\lambda_0) \neq m_A(\lambda_0)$. Тогда: $\lambda_0 \in \mathrm{SD}(A)$, $g_A(\lambda_0) < m_A(\lambda_0)$. Следовательно:

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) < \sum_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) \leqslant N$$

(что противоречит утверждению $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$). Итак, $\forall \lambda \in \mathrm{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$.

$\square$

13.5. Факультативный материал. Теорема Гамильтона—Кэли

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $N \neq 0 \implies a_N \neq 0$, $F(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$ при $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Очевидно, $F\colon \mathrm{Lin}(L, L) \implies \mathrm{Lin}(L, L)$. Будем говорить, что: F — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $F(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$ при $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда F — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k (xI)^k = \Big(\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k\Big) I$.

Пусть: y_1, $y_2 \in \mathbb{K}$, $y_1 I = y_2 I$. Тогда $y_1 = y_2$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(L) \neq 0$*;* $N \in \mathbb{Z}_+$*,* $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$*,* $b_0, \ldots, b_N \in \mathbb{K}$*,* $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{N} b_k A^k$ *при* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*. Тогда:* $a_k = b_k$ *при* $k = \overline{0, N}$*.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(L) \neq 0$*;* $N_1 \in \mathbb{Z}_+$*,* $a_0, \ldots, a_{N_1} \in \mathbb{K}$*,* $N_1 \neq 0 \implies a_{N_1} \neq 0$*,* $N_2 \in \mathbb{Z}_+$*,* $b_0, \ldots, b_{N_2} \in \mathbb{K}$*,* $N_2 \neq 0 \implies b_{N_2} \neq 0$*,* $\sum\limits_{k=1}^{N_1} a_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{N_2} b_k A^k$ *при* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*. Тогда:* $N_1 = N_2$*,* $a_k = b_k$ *при* $k = \overline{0, N_1}$*.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$; F — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$. Выберем число N, удовлетворяющее условию: N — степень полинома F. Обозначим, $\deg(F) = N$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$; F — полином на множестве $\mathbb{K}$. Выберем число N, выберем числа $a_0, \ldots, a_N$, удовлетворяющие условиям: N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Будем говорить, что $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$, если: $\hat{F}(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$ при $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$.

Пусть: F — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Пусть $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда: $\hat{F}$ — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, N — степень полинома $\hat{F}$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\hat{F}$.

Пусть: F — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Пусть: $\hat{F}$ — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, N — степень полинома $\hat{F}$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\hat{F}$. Тогда $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть F — полином на множестве $\mathbb{K}$. Пусть $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда: $\hat{F}$ — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, $\hat{F}(xI) = F(x)I$ при $x \in \mathbb{K}$.

Пусть F — полином на множестве $\mathbb{K}$. Пусть: $\hat{F}$ — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, $\hat{F}(xI) = F(x)I$ при $x \in \mathbb{K}$. Тогда $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}$; $\hat{F}(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$ при $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\hat{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\hat{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда $\hat{F}_1 + \hat{F}_2$ — продолжение полинома $F_1 + F_2$ на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда $\lambda\hat{F}$ — продолжение полинома λF на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\hat{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\hat{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда $\hat{F}_1\hat{F}_2$ — продолжение полинома F_1F_2 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Обозначим через $\hat{F}_A$ продолжение полинома F_A на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Теорема (теорема Гамильтона—Кэли)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*. Тогда* $\hat{F}_A(A) = \Theta$*.*

Доказательство. Пусть e — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Пусть k, $i = \overline{1, N}$. Обозначим: $M_i^k(\lambda) = (-1)^{k+i}\overline{\Delta}_i^k(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда M_i^k — полином на множестве $\mathbb{K}$. Обозначим через $\hat{M}_i^k$ продолжение полинома M_i^k на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Пусть $i, j = \overline{1, N}$. Обозначим: $\varphi_i^j(\lambda) = \tilde{A}_i^j - \lambda\delta_i^j$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда: $\varphi_i^j(\lambda) = \tilde{A}_i^j\lambda^0 + (-\delta_i^j)\lambda^1$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Следовательно, φ_i^j — полином на множестве $\mathbb{K}$. Обозначим через $\hat{\varphi}_i^j$ продолжение полинома φ_i^j на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда: $\hat{\varphi}_i^j(B) = \tilde{A}_i^j B^0 + (-\delta_i^j)B^1$ при $B \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Следовательно: $\hat{\varphi}_i^j(B) = \tilde{A}_i^j I - \delta_i^j B$ при $B \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $k,\ j = \overline{1,N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Обозначим:

$$Q = \begin{pmatrix} (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^1 \\ \vdots \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^{k-1} \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^j \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^{k+1} \\ \vdots \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^N \end{pmatrix}.$$

Тогда: $\det(Q) = \delta^j_k \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})$, $\overline{\Delta}^k_i(Q) = \overline{\Delta}^k_i(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})$, $Q^k_i = (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^j_i$ при $i = \overline{1,N}$. Следовательно:

$$(\delta^j_k F_A)(\lambda) = \delta^j_k F_A(\lambda) = \delta^j_k \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = \det(Q) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{k+i} \overline{\Delta}^k_i(Q) Q^k_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} (-1)^{k+i} \overline{\Delta}^k_i(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^j_i = \sum_{i=1}^{N} M^k_i(\lambda)(\tilde{A}^j_i - \lambda\delta^j_i) = \sum_{i=1}^{N} M^k_i(\lambda)\varphi^j_i(\lambda) =$$
$$= \Big(\sum_{i=1}^{N} M^k_i \varphi^j_i\Big)(\lambda).$$

Тогда $\delta^j_k F_A = \sum\limits_{i=1}^{N} M^k_i \varphi^j_i$. Следовательно, $\delta^j_k \hat{F}_A = \sum\limits_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i \hat{\varphi}^j_i$.

Пусть: $k,\ j = \overline{1,N}$, $B \in \operatorname{Lin}(L,L)$. Тогда:

$$\delta^j_k \hat{F}_A(B) = (\delta^j_k \hat{F}_A)(B) = \Big(\sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i \hat{\varphi}^j_i\Big)(B) = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(B)\hat{\varphi}^j_i(B) = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(B)(\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i B).$$

Пусть $i = \overline{1,N}$. Тогда:

$$(\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i A)(e_j) = \tilde{A}^j_i I(e_j) - \delta^j_i A(e_j) = \tilde{A}^j_i e_j - A(e_i) = \theta.$$

Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\hat{F}_A(A)(e_k) = \big(\delta^j_k \hat{F}_A(A)\big)(e_j) = \Big(\sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(A)(\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i A)\Big)(e_j) = \sum_{i=1}^{N} \Big(\hat{M}^k_i(A)(\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i A)\Big)(e_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(A)\Big((\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i A)(e_j)\Big) = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(A)(\theta) = \theta.$$

Пусть $x \in L$. Тогда:

$$\hat{F}_A(A)(x) = \hat{F}_A(A)\big([x]^k(e)e_k\big) = [x]^k(e)\hat{F}_A(A)(e_k) = \theta.$$

Следовательно, $\hat{F}_A(A) = \Theta$. $\square$

Лекция 14. Линейные, билинейные и квадратичные формы

14.1. Линейные формы (полулинейные формы)

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что A — линейная форма в пространстве L, если $A \in \mathrm{Lin}(L, \mathbb{K})$.
2. Будем говорить, что A — полулинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \Longrightarrow \mathbb{K}$, A — полулинейный оператор.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L, A — линейная (полулинейная) форма в пространстве L. Пусть: $[A](e) \in \mathbb{K}^{1\times N}$, $[A]_k(e) = A(e_k)$ при $k = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $[A](e)$ — набор компонент линейной (полулинейной) формы A в базисе e.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть A — линейная форма в пространстве L. Тогда: $A(x) = [A]_k(e)[x]^k(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{1\times N}$, $A(x) = \tilde{A}_k[x]^k(e)$ при $x \in L$. Тогда: A — линейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

3. Пусть A — полулинейная форма в пространстве L. Тогда: $A(x) = [A]_k(e)\overline{[x]^k(e)}$ при $x \in L$.

4. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{1\times N}$, $A(x) = \tilde{A}_k\overline{[x]^k(e)}$ при $x \in L$. Тогда: A — полулинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = A\big([x]^k(e)e_k\big) = [x]^k(e)A(e_k) = [A]_k(e)[x]^k(e).$$

2. Докажем, что A — линейная форма в пространстве L. Очевидно, $A\colon L \Longrightarrow \mathbb{K}$. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x+y) = \tilde{A}_k[x+y]^k(e) = \tilde{A}_k\big([x]^k(e) + [y]^k(e)\big) = \tilde{A}_k[x]^k(e) + \tilde{A}_k[y]^k(e) = A(x) + A(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда:

$$A(\lambda x) = \tilde{A}_k[\lambda x]^k(e) = \tilde{A}_k\big(\lambda[x]^k(e)\big) = \lambda\big(\tilde{A}_k[x]^k(e)\big) = \lambda A(x).$$

Докажем, что $[A](e) = \tilde{A}$. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_k(e) = A(e_k) = \tilde{A}_m[e_k]^m(e) = \tilde{A}_m\delta_k^m = \tilde{A}_k.$$

Следовательно, $[A](e) = \tilde{A}$.

3. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = A\big([x]^k(e)e_k\big) = \overline{[x]^k(e)}A(e_k) = [A]_k(e)\overline{[x]^k(e)}.$$

4. Докажем, что A — полулинейная форма в пространстве L. Очевидно, $A\colon L \implies \mathbb{K}$. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x+y) = \tilde{A}_k\overline{[x+y]^k(e)} = \tilde{A}_k\overline{\big([x]^k(e) + [y]^k(e)\big)} = \tilde{A}_k\overline{[x]^k(e)} + \tilde{A}_k\overline{[y]^k(e)} = A(x) + A(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда:

$$A(\lambda x) = \tilde{A}_k\overline{[\lambda x]^k(e)} = \tilde{A}_k\overline{\big(\lambda[x]^k(e)\big)} = \overline{\lambda}\big(\tilde{A}_k\overline{[x]^k(e)}\big) = \overline{\lambda}A(x).$$

Докажем, что $[A](e) = \tilde{A}$. Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_k(e) = A(e_k) = \tilde{A}_m\overline{[e_k]^m(e)} = \tilde{A}_m\overline{\delta_k^m} = \tilde{A}_m\delta_k^m = \tilde{A}_k. \quad \square$$

Следовательно, $[A](e) = \tilde{A}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e*,* e' *— базисы пространства* L*.*

1. Пусть A *— линейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k'}(e') = [A]_k(e)\alpha^k_{k'}(e,e')$ *при* $k' = \overline{1,N}$*;* $[A](e') = [A](e)\alpha(e,e')$*.*

2. Пусть A *— полулинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k'}(e') = [A]_k(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}$ *при* $k' = \overline{1,N}$*;* $[A](e') = [A](e)\overline{\alpha(e,e')}$*.*

Доказательство.

1. Пусть $k' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_{k'}(e') = A(e'_{k'}) = A\big(\alpha^k_{k'}(e,e')e_k\big) = \alpha^k_{k'}(e,e')A(e_k) = [A]_k(e)\alpha^k_{k'}(e,e') = \big([A](e)\alpha(e,e')\big)_{k'}.$$

Следовательно, $[A](e') = [A](e)\alpha(e,e')$.

2. Пусть $k' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[A]_{k'}(e') = A(e'_{k'}) = A\big(\alpha^k_{k'}(e,e')e_k\big) = \overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}A(e_k) = [A]_k(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')} = \big([A](e)\overline{\alpha(e,e')}\big)_{k'}.$$

Следовательно, $[A](e') = [A](e)\overline{\alpha(e,e')}$. $\square$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$. Обозначим через L^* множество всех линейных форм в пространстве L. Очевидно, L^* — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что L^* — сопряжённое пространство к пространству L.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Пусть: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1,N}$. Тогда: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1,N}$.

Пусть: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1,N}$. Тогда: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1,N}$.

Очевидно, существует единственный набор функций $\omega^1, \ldots, \omega^N$, удовлетворяющий условиям: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1,N}$. Тогда существует единственный набор функций $\omega^1, \ldots, \omega^N$, удовлетворяющий условиям: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1,N}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Обозначим: $\varphi(A) = [A](e)$ при $A \in L^*$. Очевидно, φ — изоморфизм пространства L^* на пространство $\mathbb{K}^{1\times N}$. Тогда: $\dim(L^*) = \dim(\mathbb{K}^{1\times N}) = N$.

Пусть: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1, N}$. Тогда: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1, N}$. Следовательно: $\omega^m \in L^*$, $[\omega^m](e) = \tilde{I}^m$ при $m = \overline{1, N}$. Тогда: $\omega^m \in L^*$, $\varphi(\omega^m) = \tilde{I}^m$ при $m = \overline{1, N}$. Следовательно: $\tilde{I}^m \in \mathbb{K}^{1\times N}$, $\omega^m = \varphi^{-1}(\tilde{I}^m)$ при $m = \overline{1, N}$. Так как: $(\tilde{I}^1, \ldots, \tilde{I}^N)$ — базис пространства $\mathbb{K}^{1\times N}$, $\mathbb{K}^{1\times N} \overset{\varphi^{-1}}{\approx} L^*$, то $(\omega^1, \ldots, \omega^N)$ — базис пространства L^*. Будем говорить, что $(\omega^1, \ldots, \omega^N)$ — сопряжённый базис к базису e пространства L.

Пусть: $x \in L$, $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\omega^m(x) = [\omega^m]_k(e)[x]^k(e) = \delta^m_k [x]^k(e) = [x]^m(e).$$

Пусть $A \in L^*$. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = [A]_k(e)[x^k](e) = [A]_k(e)\omega^k(x) = \big([A]_k(e)\omega^k\big)(x).$$

Следовательно, $A = [A]_k(e)\omega^k$. Тогда $[A]_1(e), \ldots, [A]_N(e)$ — координаты элемента A в базисе $(\omega^1, \ldots, \omega^N)$.

14.2. Билинейные и квадратичные формы (полуторалинейные и обобщённые квадратичные формы)

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что A — билинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L^2 \implies \mathbb{K}$, $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ при x_1, x_2, $y \in L$; $A(\lambda x, y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$; $A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$; $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$.

2. Пусть A — билинейная форма в пространстве L. Будем говорить, что A — симметричная (антисимметричная) билинейная форма, если: $A(y, x) = A(x, y)$ $(A(y, x) = -A(x, y))$ при x, $y \in L$.

3. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, A — билинейная форма в пространстве L. Будем писать $A > 0$ $(A \geqslant 0,\ A < 0,\ A \leqslant 0,\ A = 0)$, если: $A(x, x) > 0$ $(A(x, x) \geqslant 0,\ A(x, x) < 0,\ A(x, x) \leqslant 0,\ A(x, x) = 0)$ при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что A — знакопеременная билинейная форма, если: $\exists x \in L\big(A(x, x) > 0\big)$, $\exists x \in L\big(A(x, x) < 0\big)$.

4. Будем говорить, что A — полуторалинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L^2 \implies \mathbb{K}$, $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ при x_1, x_2, $y \in L$; $A(\lambda x, y) = \overline{\lambda} A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$; $A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$; $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$.

5. Пусть A — полуторалинейная форма в пространстве L. Будем говорить, что A — эрмитова (антиэрмитова) полуторалинейная форма, если: $\overline{A(y, x)} = A(x, y)$ $(\overline{A(y, x)} = -A(x, y))$ при x, $y \in L$.

Пусть A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Тогда: $\overline{A(x, x)} = A(x, x)$ при $x \in L$. Следовательно: $A(x, x) \in \mathbb{R}$ при $x \in L$.

6. Пусть: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $A(x, x) \in \mathbb{R}$ при $x \in L$. Будем писать $A > 0$ $(A \geqslant 0,\ A < 0,\ A \leqslant 0,\ A = 0)$, если: $A(x, x) > 0$ $(A(x, x) \geqslant 0,\ A(x, x) < 0,\ A(x, x) \leqslant 0,\ A(x, x) = 0)$ при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что A — знакопеременная полуторалинейная форма, если: $\exists x \in L\big(A(x, x) > 0\big)$, $\exists x \in L\big(A(x, x) < 0\big)$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что Q — квадратичная форма в пространстве L, если: Q — функция, $\mathrm{D}(Q) = L$, существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.

   Пусть Q — квадратичная форма в пространстве L. Очевидно, $Q\colon L \implies \mathbb{K}$.

2. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, Q — квадратичная форма в пространстве L. Будем писать $Q > 0$ ($Q \geqslant 0$, $Q < 0$, $Q \leqslant 0$, $Q = 0$), если: $Q(x) > 0$ ($Q(x) \geqslant 0$, $Q(x) < 0$, $Q(x) \leqslant 0$, $Q(x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что Q — знакопеременная квадратичная форма, если: $\exists x \in L\bigl(Q(x) < 0\bigr)$, $\exists x \in L\bigl(Q(x) > 0\bigr)$.

3. Будем говорить, что Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, если: Q — функция, $\mathrm{D}(Q) = L$, существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.

   Пусть Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Очевидно, $Q\colon L \implies \mathbb{K}$.

4. Будем говорить, что Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L, если: Q — функция, $\mathrm{D}(Q) = L$, существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.

   Пусть Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Очевидно: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $\mathrm{R}(Q) \subseteq \mathbb{R}$.

5. Пусть: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $\mathrm{R}(Q) \subseteq \mathbb{R}$. Будем писать $Q > 0$ ($Q \geqslant 0$, $Q < 0$, $Q \leqslant 0$, $Q = 0$), если: $Q(x) > 0$ ($Q(x) \geqslant 0$, $Q(x) < 0$, $Q(x) \leqslant 0$, $Q(x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что Q — знакопеременная обобщённая квадратичная форма, если: $\exists x \in L\bigl(Q(x) < 0\bigr)$, $\exists x \in L\bigl(Q(x) > 0\bigr)$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — квадратичная форма в пространстве L. Тогда существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$.*

Доказательство. По определению квадратичной формы, существует функция A_0, удовлетворяющая условиям: A_0 — билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A_0(x, x)$ при $x \in L$. Обозначим: $A(x, y) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(x, y) + A_0(y, x)\bigr)$ при x, $y \in L$. Очевидно, A — билинейная форма в пространстве L. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(y, x) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(y, x) + A_0(x, y)\bigr) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(x, y) + A_0(y, x)\bigr) = A(x, y).$$

Следовательно, A — симметричная билинейная форма. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x, x) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(x, x) + A_0(x, x)\bigr) = A_0(x, x) = Q(x). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Тогда: $A(x, y) = \frac{1}{2}\bigl(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\bigr)$ при x, $y \in L$.*

Доказательство. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$Q(x + y) = A(x + y, x + y) = A(x, x) + A(x, y) + A(y, x) + A(y, y) = Q(x) + 2A(x, y) + Q(y);$$

$$A(x, y) = \frac{1}{2}\bigl(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\bigr). \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: A_1, A_2 — симметричные билинейные формы в пространстве L, $A_1(x,x) = A_2(x,x)$ при $x \in L$. **Докажем, что** $A_1 = A_2$**.** Обозначим: $Q(x) = A_1(x,x)$ при $x \in L$. Так как A_1 — симметричная билинейная форма в пространстве L, то: $A_1(x,y) = \frac{1}{2}\bigl(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\bigr)$ при x, $y \in L$. Пусть $x \in L$. Тогда: $Q(x) = A_1(x,x) = A_2(x,x)$. Так как A_2 — симметричная билинейная форма в пространстве L, то: $A_2(x,y) = \frac{1}{2}\bigl(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\bigr)$ при x, $y \in L$. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A_1(x,y) = \frac{1}{2}\bigl(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\bigr) = A_2(x,y).$$

Следовательно, $A_1 = A_2$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $\mathrm{R}(Q) \subseteq \mathbb{R}$. Тогда существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$.*

Доказательство. По определению обобщённой квадратичной формы, существует функция A_0, удовлетворяющая условиям: A_0 — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A_0(x,x)$ при $x \in L$. Обозначим: $A(x,y) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(x,y) + \overline{A_0(y,x)}\bigr)$ при x, $y \in L$. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$\overline{A(y,x)} = \overline{\frac{1}{2}\bigl(A_0(y,x) + \overline{A_0(x,y)}\bigr)} = \frac{1}{2}\bigl(\overline{A_0(y,x)} + A_0(x,y)\bigr) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(x,y) + \overline{A_0(y,x)}\bigr) = \\ = A(x,y).$$

Следовательно, A — эрмитова полуторалинейная форма. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x,x) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(x,x) + \overline{A_0(x,x)}\bigr) = \frac{1}{2}\bigl(Q(x) + \overline{Q(x)}\bigr) = \frac{1}{2}\bigl(Q(x) + Q(x)\bigr) = Q(x). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$; A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда:*

$$A(x,y) = \frac{1}{2}\Bigl(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) - i\bigl(Q(x+iy) - Q(x) - Q(y)\bigr)\Bigr), \quad x,\, y \in L.$$

Доказательство. Пусть: x, $y \in L$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда:

$$Q(x+\lambda y) = A(x+\lambda y, x+\lambda y) = A(x,x) + A(x,\lambda y) + A(\lambda y, x) + A(\lambda y, \lambda y) = \\ = A(x,x) + \lambda A(x,y) + \overline{\lambda} A(y,x) + \overline{\lambda}\lambda A(y,y) = Q(x) + \lambda A(x,y) + \overline{\lambda} A(y,x) + |\lambda|^2\, Q(y);$$
$$\lambda A(x,y) + \overline{\lambda} A(y,x) = Q(x+\lambda y) - Q(x) - |\lambda|^2\, Q(y);$$
$$A(x,y) + A(y,x) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y),$$
$$iA(x,y) - iA(y,x) = Q(x+iy) - Q(x) - Q(y);$$
$$A(x,y) = \frac{1}{2}\Bigl(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) - i\bigl(Q(x+iy) - Q(x) - Q(y)\bigr)\Bigr). \quad \square$$

Замечание. Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Пусть: A_1, A_2 — полуторалинейные формы в пространстве L, $A_1(x,x) = A_2(x,x)$ при $x \in L$. **Докажем, что** $A_1 = A_2$**.** Обозначим: $Q(x) = A_1(x,x)$ при $x \in L$. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, A_1 — полуторалинейная форма в пространстве L, то:

$$A_1(x,y) = \frac{1}{2}\Big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) - i\big(Q(x+iy) - Q(x) - Q(y)\big)\Big), \quad x,\, y \in L.$$

Пусть $x \in L$. Тогда: $Q(x) = A_1(x,x) = A_2(x,x)$. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, A_2 — полуторалинейная форма в пространстве L, то:

$$A_2(x,y) = \frac{1}{2}\Big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) - i\big(Q(x+iy) - Q(x) - Q(y)\big)\Big), \quad x,\, y \in L.$$

Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A_1(x,y) = \frac{1}{2}\Big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) - i\big(Q(x+iy) - Q(x) - Q(y)\big)\Big) = A_2(x,y).$$

Следовательно, $A_1 = A_2$.

Пусть: Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L, A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. **Докажем, что** A **— эрмитова полуторалинейная форма.** Так как Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L, то существует функция A_0, удовлетворяющая условиям: A_0 — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A_0(x,x)$ при $x \in L$. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$; A_0 — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A_0(x,x)$ при $x \in L$, то $A = A_0$. Так как A_0 — эрмитова полуторалинейная форма, то A — эрмитова полуторалинейная форма.

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$; A — полуторалинейная форма в пространстве L, $A(x,x) \in \mathbb{R}$ при $x \in L$. Тогда A — эрмитова полуторалинейная форма.*

Доказательство. Обозначим: $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $\mathrm{R}(Q) \subseteq \mathbb{R}$. Следовательно, Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$, то A — эрмитова полуторалинейная форма. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L, A — билинейная (полуторалинейная) форма в пространстве L. Обозначим: $[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1,N}$. Очевидно, $[A](e) \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Будем говорить, что $[A](e)$ — матрица билинейной (полуторалинейной) формы A в базисе e.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть A — билинейная форма в пространстве L. Тогда: $A(x,y) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$.

2. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $A(x,y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Тогда: A — билинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

3. Пусть A — полуторалинейная форма в пространстве L. Тогда: $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ *при* $x,\ y \in L$.

4. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ *при* $x,\ y \in L$. *Тогда:* A *— полуторалинейная форма в пространстве* L, $[A](e) = \tilde{A}$.

Доказательство.

1. Пусть $x,\ y \in L$. Тогда:

$$A(x, y) = A\big([x]^k(e)e_k, [y]^m(e)e_m\big) = [x]^k(e)[y]^m(e)A(e_k, e_m) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e).$$

2. Очевидно, A — билинейная форма в пространстве L. Пусть $k,\ m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{i,j}[e_k]^i(e)[e_m]^j(e) = \tilde{A}_{i,j}\delta^i_k\delta^j_m = \tilde{A}_{k,m}.$$

Следовательно, $[A](e) = \tilde{A}$.

3. Пусть $x,\ y \in L$. Тогда:

$$A(x, y) = A\big([x]^k(e)e_k, [y]^m(e)e_m\big) = \overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)A(e_k, e_m) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e).$$

4. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть $k,\ m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{i,j}\overline{[e_k]^i(e)}[e_m]^j(e) = \tilde{A}_{i,j}\overline{\delta^i_k}\delta^j_m = \tilde{A}_{i,j}\delta^i_k\delta^j_m = \tilde{A}_{k,m}.$$

Следовательно, $[A](e) = \tilde{A}$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$.

Обозначим, $\Delta_0(\tilde{A}) = 1$. Обозначим: $\Delta_k(\tilde{A}) = \det\big(\{\tilde{A}_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,k}}\big)$ при $k = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $\Delta_1(\tilde{A}), \ldots, \Delta_N(\tilde{A})$ — угловые миноры матрицы $\tilde{A}$.

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — симметричная (антисимметричная) матрица, если $\tilde{A}^T = \tilde{A}$ ($\tilde{A}^T = -\tilde{A}$).

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — эрмитова (антиэрмитова) матрица, если $\overline{\tilde{A}^T} = \tilde{A}$ ($\overline{\tilde{A}^T} = -\tilde{A}$).

Пусть $\tilde{A}$ — эрмитова матрица. Очевидно:

$$\tilde{A}_{k,k} = \left(\overline{\tilde{A}^T}\right)_{k,k} = \overline{(\tilde{A}^T)_{k,k}} = \overline{\tilde{A}_{k,k}},$$
$$\Delta_k(\tilde{A}) = \Delta_k\left(\overline{\tilde{A}^T}\right) = \overline{\Delta(\tilde{A}^T)} = \overline{\Delta_k(\tilde{A})}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Тогда: $\tilde{A}_{k,k}$, $\Delta_k(\tilde{A}) \in \mathbb{R}$ при $k = \overline{1, N}$.

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — ортогональная матрица, если $\tilde{A}\tilde{A}^T = \tilde{I}$.

Пусть $\tilde{A}$ — ортогональная матрица. Тогда: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^T$.

Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^T$. Тогда $\tilde{A}$ — ортогональная матрица.

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — унитарная матрица, если $\tilde{A}\overline{\tilde{A}^T} = \tilde{I}$.

Пусть $\tilde{A}$ — унитарная матрица. Тогда: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \overline{\tilde{A}^T}$.

Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \overline{\tilde{A}^T}$. Тогда $\tilde{A}$ — унитарная матрица.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Пусть A — симметричная билинейная форма в пространстве L. Очевидно: $[A](e)$ — симметричная матрица, $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e)$ при $x,\ y \in L$.

Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — симметричная матрица, $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Очевидно: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

Пусть A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Очевидно: $[A](e)$ — эрмитова матрица, $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$.

Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — эрмитова матрица, $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Очевидно: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$*;* e, e' *— базисы пространства* L*.*

1. Пусть A *— билинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e')$ *при* k', $m' = \overline{1, N}$*;* $[A](e') = \alpha(e, e')^T[A](e)\alpha(e, e')$*.*

2. Пусть A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ *при* $k', m' = \overline{1, N}$*;* $[A](e') = \overline{\alpha(e, e')^T}[A](e)\alpha(e, e')$*.*

Доказательство.

1. Пусть k', $m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k',m'}(e') = A(e'_{k'}, e'_{m'}) = A\big(\alpha^k_{k'}(e, e')e_k, \alpha^m_{m'}(e, e')e_m\big) = \alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e')A(e_k, e_m) = \\ = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e') = \big(\alpha(e, e')^T[A](e)\alpha(e, e')\big)_{k',m'}.$$

Следовательно, $[A](e') = \alpha(e, e')^T[A](e)\alpha(e, e')$.

2. Пусть k', $m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k',m'}(e') = A(e'_{k'}, e'_{m'}) = A\big(\alpha^k_{k'}(e, e')e_k, \alpha^m_{m'}(e, e')e_m\big) = \overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')A(e_k, e_m) = \\ = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e') = \big(\overline{\alpha(e, e')^T}[A](e)\alpha(e, e')\big)_{k',m'}.$$

Следовательно, $[A](e') = \overline{\alpha(e, e')^T}[A](e)\alpha(e, e')$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L, Q — квадратичная форма в пространстве L.

Так как Q — квадратичная форма в пространстве L, то существует единственная функция A, удовлетворяющая условиям: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Обозначим, $[Q](e) = [A](e)$. Будем говорить, что $[Q](e)$ — матрица квадратичной формы Q в базисе e.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$*;* e *— базис пространства* L*.*

1. Пусть Q *— квадратичная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[Q](e)$ *— симметричная матрица,* $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)[x]^k(e)[x]^m(e)$ *при* $x \in L$*.*

2. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $\tilde{Q}$ *— симметричная матрица,* $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ *при* $x \in L$*. Тогда:* Q *— квадратичная форма в пространстве* L*,* $[Q](e) = \tilde{Q}$*.*

3. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$*,* $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ *при* $x \in L$*. Тогда:* Q *— квадратичная форма в пространстве* L*,* $[Q](e) = \frac{1}{2}(\tilde{Q} + \tilde{Q}^T)$*.*

Доказательство.

1. Так как Q — квадратичная форма в пространстве L, то существует единственная функция A, удовлетворяющая условиям: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Так как: Q — квадратичная форма в пространстве L, A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$, то $[Q](e) = [A](e)$.

Так как A — симметричная билинейная форма, то $[A](e)$ — симметричная матрица. Так как $[Q](e)=[A](e)$, то $[Q](e)$ — симметричная матрица.

Пусть $x\in L$. Тогда:

$$Q(x)=A(x,x)=[A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[x]^m(e)=[Q]_{k,m}(e)[x]^k(e)[x]^m(e).$$

2. Обозначим: $A(x,y)=\tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y\in L$. Так как $\tilde{Q}$ — симметричная матрица, то: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $[A](e)=\tilde{Q}$. Пусть $x\in L$. Тогда:

$$A(x,x)=\tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)=Q(x).$$

Так как: A — билинейная форма в пространстве L, $Q(x)=A(x,x)$ при $x\in L$, то Q — квадратичная форма в пространстве L.

Так как: Q — квадратичная форма в пространстве L, A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x)=A(x,x)$ при $x\in L$, то $[Q](e)=[A](e)$. Так как $[A](e)=\tilde{Q}$, то $[Q](e)=\tilde{Q}$.

3. Обозначим, $\tilde{\tilde{Q}}=\frac{1}{2}(\tilde{Q}+\tilde{Q}^T)$. Тогда: $\tilde{\tilde{Q}}\in\mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{Q}}$ — симметричная матрица. Пусть $x\in L$. Тогда:

$$\tilde{\tilde{Q}}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)=\frac{1}{2}(\tilde{Q}_{k,m}+\tilde{Q}_{m,k})[x]^k(e)[x]^m(e)=$$
$$=\frac{1}{2}\tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)+\frac{1}{2}\tilde{Q}_{m,k}[x]^k(e)[x]^m(e)=\frac{1}{2}\tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)+\frac{1}{2}\tilde{Q}_{m,k}[x]^m(e)[x]^k(e)=$$
$$=\frac{1}{2}\tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)+\frac{1}{2}\tilde{Q}_{j,i}[x]^j(e)[x]^i(e)=\frac{1}{2}\tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)+\frac{1}{2}\tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)=$$
$$=\tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)=Q(x).$$

Следовательно: Q — квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e)=\tilde{\tilde{Q}}$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N\in\mathbb{N}$*,* $\dim(L)=N$*;* e*,* e' *— базисы пространства* L*,* Q *— квадратичная форма в пространстве* L*. Тогда:* $[Q]_{k',m'}(e')=[Q]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e')$ *при* k'*,* $m'=\overline{1,N}$*;* $[Q](e')=\alpha(e,e')^T[Q](e)\alpha(e,e')$*.*

Доказательство. Так как Q — квадратичная форма в пространстве L, то существует единственная функция A, удовлетворяющая условиям: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x)=A(x,x)$ при $x\in L$. Так как: Q — квадратичная форма в пространстве L, A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x)=A(x,x)$ при $x\in L$, то: $[Q](e)=[A](e)$, $[Q](e')=[A](e')$.

Пусть k', $m'=\overline{1,N}$. Тогда:

$$[Q]_{k',m'}(e')=[A]_{k',m'}(e')=[A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e')=[Q]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e')=$$
$$=\big(\alpha(e,e')^T[Q](e)\alpha(e,e')\big)_{k',m'}.$$

Следовательно, $[Q](e')=\alpha(e,e')^T[Q](e)\alpha(e,e')$. □

Определение. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N\in\mathbb{N}$, $\dim(L)=N$; e — базис пространства L, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L.

Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, то существует единственная функция A, удовлетворяющая условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Обозначим, $[Q](e) = [A](e)$. Будем говорить, что $[Q](e)$ — матрица обобщённой квадратичной формы Q в базисе e.

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Тогда: $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$. Тогда: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e) = \tilde{Q}$.

Доказательство.

1. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, то существует единственная функция A, удовлетворяющая условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$, то $[Q](e) = [A](e)$.

Пусть $x \in L$. Тогда:

$$Q(x) = A(x,x) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e).$$

2. Обозначим: $A(x,y) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Тогда: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{Q}$. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x,x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e) = Q(x).$$

Так как: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$, то Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L.

Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$, то $[Q](e) = [A](e)$. Так как $[A](e) = \tilde{Q}$, то $[Q](e) = \tilde{Q}$. □

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Тогда: $[Q](e)$ — эрмитова матрица, $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — эрмитова матрица, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$. Тогда: Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e) = \tilde{Q}$.

Доказательство.

1. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, то существует единственная функция A, удовлетворяющая условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$, то $[Q](e) = [A](e)$.

Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L, A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$, то A — эрмитова полуторалинейная форма. Тогда $[A](e)$ — эрмитова матрица. Так как $[Q](e) = [A](e)$, то $[Q](e)$ — эрмитова матрица.

Пусть $x \in L$. Тогда:

$$Q(x) = A(x, x) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e).$$

2. Обозначим: $A(x, y) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Так как $\tilde{Q}$ — эрмитова матрица, то: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{Q}$. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x, x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e) = Q(x).$$

Так как: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$, то Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L.

Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$, то $[Q](e) = [A](e)$. Так как $[A](e) = \tilde{Q}$, то $[Q](e) = \tilde{Q}$. □

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e, e' — базисы пространства L, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [Q]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ при k', $m' = \overline{1, N}$; $[Q](e') = \overline{\alpha(e, e')^T}[Q](e)\alpha(e, e')$.*

Доказательство. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, то существует единственная функция A, удовлетворяющая условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$, то: $[Q](e) = [A](e)$, $[Q](e') = [A](e')$.

Пусть k', $m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{aligned}[Q]_{k',m'}(e') = [A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e') = [Q]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e') = \\ = \left(\overline{\alpha(e, e')^T}[Q](e)\alpha(e, e')\right)_{k',m'}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{\alpha(e, e')^T}[Q](e)\alpha(e, e')$. □

Лекция 15. Метод Лагранжа, закон инерции, критерий Сильвестра

15.1. Метод Лагранжа

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$.

Обозначим:

$$\mu_*(\tilde{A}) = \big\{k_0\colon k_0 = \overline{1, N} \wedge \forall k = \overline{1, N}(k \neq k_0 \implies \tilde{A}_{k_0,k} = 0 \wedge \tilde{A}_{k,k_0} = 0)\big\}.$$

Очевидно, $\mu_*(\tilde{A}) \subseteq \{1, \dots, N\}$.

Пусть $\tilde{A}$ — диагональная матрица. Тогда $\mu_*(\tilde{A}) = \{1, \dots, N\}$.

Пусть $\mu_*(\tilde{A}) = \{1, \dots, N\}$. Тогда $\tilde{A}$ — диагональная матрица.

Пусть $\tilde{A}$ — эрмитова (симметричная) матрица. Тогда:

$$\mu_*(\tilde{A}) = \big\{k_0\colon k_0 = \overline{1, N} \wedge \forall k = \overline{1, N}(k \neq k_0 \implies \tilde{A}_{k_0,k} = 0)\big\},$$
$$\mu_*(\tilde{A}) = \big\{k_0\colon k_0 = \overline{1, N} \wedge \forall k = \overline{1, N}(k \neq k_0 \implies \tilde{A}_{k,k_0} = 0)\big\}.$$

Утверждение (один шаг метода Лагранжа для эрмитовой полуторалинейной формы)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*; L — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L.*

1. Пусть: e — базис пространства L, $k_0 = \overline{1, N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

2. Пусть: e — базис пространства L, k_0, $m_0 = \overline{1, N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e)$, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$.

3. Пусть: e — базис пространства L, k_0, $m_0 = \overline{1, N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e)$, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

4. Пусть: e — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \neq \{1, \dots, N\}$. Тогда существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$.

Доказательство.

1. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Пусть: $x \in L$, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x, x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{k_0}\right) + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\overline{\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)}\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) - \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}\tilde{A}_{k_0,k_0}}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m\right) +$$

$$+\sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\Bigg(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\Bigg)}\Bigg(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\Bigg) + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \Bigg(\tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\Bigg)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = \tilde{A}_{k_0,k_0},$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,m} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \neq k_0;$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,k_0} = 0, \quad k = \overline{1,N},\, k \neq k_0;$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}, \quad k,\, m = \overline{1,N},\, k,\, m \neq k_0.$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, $\mu_*(\tilde{A}) \subseteq \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$, $k_0 \in \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$. Обозначим:

$$\tilde{\tilde{x}}^{k_0} = \tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m,$$
$$\tilde{\tilde{x}}^j = \tilde{x}^j, \quad j = \overline{1,N},\, j \neq k_0.$$

Тогда $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N$. Очевидно:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\tilde{\tilde{x}}^m.$$

Обозначим:

$$\beta^{k_0}_{k_0} = 1,$$
$$\beta^{k_0}_m = \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}, \quad m = \overline{1,N},\, m \neq k_0;$$
$$\beta^j_m = \delta^j_m, \quad j = \overline{1,N},\, j \neq k_0,\, m = \overline{1,N}.$$

Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 1$, $\tilde{\tilde{x}} = \beta\tilde{x}$. Так как $\det(\beta) \neq 0$, то существует единственный объект e', удовлетворяющий условиям: e' — базис пространства L, $\alpha(e',e) = \beta$. Тогда: $[x](e') = \alpha(e',e)[x](e) = \beta\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Следовательно:

$$A(x,x) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{[x]^k(e')}[x]^m(e').$$

В силу произвольности выбора вектора $x \in L$ получаем, что:

$$A(x,x) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{[x]^k(e')}[x]^m(e'), \quad x \in L.$$

Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, то $[A](e') = \tilde{\tilde{A}}$. Тогда: $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

2. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Так как: $\tilde{A}_{k_0,k_0} = 0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$, то $k_0 \neq m_0$. Так как $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$, то k_0, $m_0 \notin \mu_*(\tilde{A})$. Пусть: $x \in L$, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{m_0} + \tilde{A}_{m_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{k_0} +$$
$$+ \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{m_0,m}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m_0}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{m_0} +$$
$$+ \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.$$

Обозначим:

$$I_1(x) = \tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{m_0} + \tilde{A}_{m_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{k_0},$$
$$I_2(x) = \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{m_0,m}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^m,$$
$$I_3(x) = \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m_0}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{m_0},$$
$$I_4(x) = \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.$$

Обозначим, $\lambda = \frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}$. Тогда: $\tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\lambda} = \left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|$, $\tilde{A}_{m_0,k_0}\lambda = \left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|$. Так как $\lambda \neq 0$, то существует единственный столбец $\tilde{\tilde{x}}$, удовлетворяющий условиям:

$$\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N,$$
$$\tilde{x}^{k_0} = \lambda\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right),$$
$$\tilde{x}^{m_0} = \tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0},$$
$$\tilde{x}^j = \tilde{\tilde{x}}^j, \quad j = \overline{1,N},\, j \notin \{k_0, m_0\}.$$

Очевидно:

$$I_1(x) = \left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right| \left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} - \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right) + \left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right| \left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} + \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right) =$$
$$= 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}}\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\tilde{\tilde{x}}^{m_0};$$
$$I_2(x) = \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \overline{\lambda}\tilde{A}_{k_0,m}\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} - \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\tilde{\tilde{x}}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{m_0,m}\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} + \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\tilde{\tilde{x}}^m =$$
$$= \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \left(\tilde{A}_{m_0,m} + \overline{\lambda}\tilde{A}_{k_0,m}\right)\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}}\tilde{\tilde{x}}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \left(\tilde{A}_{m_0,m} - \overline{\lambda}\tilde{A}_{k_0,m}\right)\overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\tilde{\tilde{x}}^m;$$
$$I_3(x) = \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \lambda\tilde{A}_{k,k_0}\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right) + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m_0}\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \left(\tilde{A}_{k,m_0} + \lambda \tilde{A}_{k,k_0}\right) \overline{\tilde{\tilde{x}}^k} \tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \left(\tilde{A}_{k,m_0} - \lambda \tilde{A}_{k,k_0}\right) \overline{\tilde{\tilde{x}}^k} \tilde{\tilde{x}}^{m_0};$$

$$I_4(x) = \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m} \overline{\tilde{\tilde{x}}^k} \tilde{\tilde{x}}^m.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,m_0} = 0,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{m_0,k_0} = 0,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{m_0,m_0} = -2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,m} = \tilde{A}_{m_0,m} + \overline{\lambda}\tilde{A}_{k_0,m}, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{m_0,m} = \tilde{A}_{m_0,m} - \overline{\lambda}\tilde{A}_{k_0,m}, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,k_0} = \tilde{A}_{k,m_0} + \lambda\tilde{A}_{k,k_0}, \quad k = \overline{1,N},\, k \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,m_0} = \tilde{A}_{k,m_0} - \lambda\tilde{A}_{k,k_0}, \quad k = \overline{1,N},\, k \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m}, \quad k,\, m = \overline{1,N},\, k,\, m \notin \{k_0, m_0\}.$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, $\mu_*(\tilde{A}) \subseteq \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$, $\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right| \neq 0$. Очевидно:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m} \overline{\tilde{\tilde{x}}^k} \tilde{\tilde{x}}^m.$$

Обозначим:

$$\beta^{k_0}_{k_0} = \lambda,$$
$$\beta^{k_0}_{m_0} = -\lambda,$$
$$\beta^{k_0}_{m} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\beta^{m_0}_{k_0} = 1,$$
$$\beta^{m_0}_{m_0} = 1,$$
$$\beta^{m_0}_{m} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\beta^{j}_{m} = \delta^{j}_{m}, \quad j = \overline{1,N},\, j \notin \{k_0, m_0\},\, m = \overline{1,N}.$$

Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 2\lambda\,\mathrm{sgn}(m_0 - k_0) \neq 0$, $\tilde{x} = \beta\tilde{\tilde{x}}$. Следовательно, $\tilde{\tilde{x}} = \beta^{-1}\tilde{x}$. Так как $\det(\beta^{-1}) \neq 0$, то существует единственный объект e', удовлетворяющий условиям: e' — базис пространства L, $\alpha(e', e) = \beta^{-1}$. Тогда: $[x](e') = \alpha(e', e)[x](e) = \beta^{-1}\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Следовательно:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m} \overline{[x]^k(e')} [x]^m(e').$$

В силу произвольности выбора вектора $x \in L$ получаем, что:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m} \overline{[x]^k(e')}[x]^m(e'), \quad x \in L.$$

Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, то $[A](e') = \tilde{\tilde{A}}$. Тогда: $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$.

3. Очевидно, существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$. Так как $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$, то существуют векторы $e''_1, \ldots, e''_N$, удовлетворяющие условиям: e'' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e')\big) \subseteq \mu_*\big([A](e'')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e'')\big)$. Так как $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, то: e'' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e'')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e'')\big)$.

4. Так как $\mu_*\big([A](e)\big) \neq \{1, \ldots, N\}$, то:

$$\exists k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)\Big).$$

Пусть:

$$\exists k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big) \wedge [A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0\Big).$$

Выберем число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1,N}$, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$. Так как $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$. Так как $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$.

Пусть:

$$\forall k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big) \implies [A]_{k_0,k_0}(e) = 0\Big).$$

Выберем число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1,N}$, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$. Тогда $[A]_{k_0,k_0}(e) = 0$. Так как: $[A](e)$ — эрмитова матрица, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то существует число m_0, удовлетворяющее условиям: $m_0 = \overline{1,N}$, $m_0 \neq k_0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда $m_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$. Следовательно, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$. Так как: $[A]_{k_0,k_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$. Так как $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$. □

Теорема (метод Лагранжа для эрмитовой полуторалинейной формы)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*. Тогда существуют векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, удовлетворяющие условиям:* e *— базис пространства* L*,* $[A](e)$ *— диагональная матрица.*

Утверждение (один шаг метода Лагранжа для симметричной билинейной формы)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— симметричная билинейная форма в пространстве* L*.*

1. Пусть: e *— базис пространства* L*,* $k_0 = \overline{1,N}$*,* $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$*. Тогда существуют векторы* $e'_1, \ldots, e'_N$*, удовлетворяющие условиям:* e' *— базис пространства* L*,* $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$*,* $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$*.*

2. Пусть: e — базис пространства L, k_0, $m_0 = \overline{1,N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e)$, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$.

3. Пусть: e — базис пространства L, k_0, $m_0 = \overline{1,N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e)$, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

4. Пусть: e — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \neq \{1, \ldots, N\}$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$.

Доказательство.

1. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Пусть: $x \in L$, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\tilde{x}^k\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\tilde{x}^{k_0}\right) + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\Bigg(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\Bigg)\Bigg(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\Bigg) - \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\tilde{x}^m\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\Bigg(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\Bigg)\Bigg(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\Bigg) + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \left(\tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\right)\tilde{x}^k\tilde{x}^m.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = \tilde{A}_{k_0,k_0},$$

$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,m} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \neq k_0;$$

$$\tilde{\tilde{A}}_{k,k_0} = 0, \quad k = \overline{1,N},\, k \neq k_0;$$

$$\tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}, \quad k,\, m = \overline{1,N},\, k,\, m \neq k_0.$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, $\mu_*(\tilde{A}) \subseteq \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$, $k_0 \in \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$. Обозначим:

$$\tilde{\tilde{x}}^{k_0} = \tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m,$$

$$\tilde{\tilde{x}}^j = \tilde{x}^j, \quad j = \overline{1,N},\, j \neq k_0.$$

Тогда $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N$. Очевидно:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\tilde{\tilde{x}}^k\tilde{\tilde{x}}^m.$$

Обозначим:

$$\beta^{k_0}_{k_0} = 1,$$
$$\beta^{k_0}_m = \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}, \quad m = \overline{1,N},\, m \neq k_0;$$
$$\beta^j_m = \delta^j_m, \quad j = \overline{1,N},\, j \neq k_0,\, m = \overline{1,N}.$$

Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 1$, $\tilde{\tilde{x}} = \beta\tilde{x}$. Так как $\det(\beta) \neq 0$, то существует единственный объект e', удовлетворяющий условиям: e' — базис пространства L, $\alpha(e',e) = \beta$. Тогда: $[x](e') = \alpha(e',e)[x](e) = \beta\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Следовательно:

$$A(x,x) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}[x]^k(e')[x]^m(e').$$

В силу произвольности выбора вектора $x \in L$ получаем, что:

$$A(x,x) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}[x]^k(e')[x]^m(e'), \quad x \in L.$$

Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, то $[A](e') = \tilde{\tilde{A}}$. Тогда: $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

2. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Так как: $\tilde{A}_{k_0,k_0} = 0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$, то $k_0 \neq m_0$. Так как $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$, то k_0, $m_0 \notin \mu_*(\tilde{A})$. Пусть: $x \in L$, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m = \tilde{A}_{k_0,m_0}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^{m_0} + \tilde{A}_{m_0,k_0}\tilde{x}^{m_0}\tilde{x}^{k_0} +$$
$$+ \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{m_0,m}\tilde{x}^{m_0}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\tilde{x}^k\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m_0}\tilde{x}^k\tilde{x}^{m_0} +$$
$$+ \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m.$$

Обозначим:

$$I_1(x) = \tilde{A}_{k_0,m_0}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^{m_0} + \tilde{A}_{m_0,k_0}\tilde{x}^{m_0}\tilde{x}^{k_0},$$
$$I_2(x) = \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{m_0,m}\tilde{x}^{m_0}\tilde{x}^m,$$
$$I_3(x) = \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\tilde{x}^k\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m_0}\tilde{x}^k\tilde{x}^{m_0},$$
$$I_4(x) = \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m.$$

Очевидно, существует единственный столбец $\tilde{\tilde{x}}$, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{gathered}\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N,\\ \tilde{x}^{k_0} = \tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0},\\ \tilde{x}^{m_0} = \tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0},\\ \tilde{x}^j = \tilde{\tilde{x}}^j, \quad j = \overline{1,N},\, j \notin \{k_0, m_0\}.\end{gathered}$$

Очевидно:

$$\begin{gathered}I_1(x) = \tilde{A}_{k_0,m_0}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big)\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big) + \tilde{A}_{k_0,m_0}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big)\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big) =\\ = 2\tilde{A}_{k_0,m_0}\tilde{\tilde{x}}^{k_0}\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - 2\tilde{A}_{k_0,m_0}\tilde{\tilde{x}}^{m_0}\tilde{\tilde{x}}^{m_0};\\ I_2(x) = \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big)\tilde{\tilde{x}}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{m_0,m}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big)\tilde{\tilde{x}}^m =\\ = \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \Big(\tilde{A}_{m_0,m} + \tilde{A}_{k_0,m}\Big)\tilde{\tilde{x}}^{k_0}\tilde{\tilde{x}}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \Big(\tilde{A}_{m_0,m} - \tilde{A}_{k_0,m}\Big)\tilde{\tilde{x}}^{m_0}\tilde{\tilde{x}}^m;\\ I_3(x) = \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\tilde{\tilde{x}}^k\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big) + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m_0}\tilde{\tilde{x}}^k\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big) =\\ = \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \Big(\tilde{A}_{k,m_0} + \tilde{A}_{k,k_0}\Big)\tilde{\tilde{x}}^k\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \Big(\tilde{A}_{k,m_0} - \tilde{A}_{k,k_0}\Big)\tilde{\tilde{x}}^k\tilde{\tilde{x}}^{m_0};\\ I_4(x) = \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{\tilde{x}}^k\tilde{\tilde{x}}^m.\end{gathered}$$

Обозначим:

$$\begin{gathered}\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|,\\ \tilde{\tilde{A}}_{k_0,m_0} = 0,\\ \tilde{\tilde{A}}_{m_0,k_0} = 0,\\ \tilde{\tilde{A}}_{m_0,m_0} = -2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|,\\ \tilde{\tilde{A}}_{k_0,m} = \tilde{A}_{m_0,m} + \tilde{A}_{k_0,m}, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};\\ \tilde{\tilde{A}}_{m_0,m} = \tilde{A}_{m_0,m} - \tilde{A}_{k_0,m}, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};\\ \tilde{\tilde{A}}_{k,k_0} = \tilde{A}_{k,m_0} + \tilde{A}_{k,k_0}, \quad k = \overline{1,N},\, k \notin \{k_0, m_0\};\\ \tilde{\tilde{A}}_{k,m_0} = \tilde{A}_{k,m_0} - \tilde{A}_{k,k_0}, \quad k = \overline{1,N},\, k \notin \{k_0, m_0\};\\ \tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m}, \quad k,\, m = \overline{1,N},\, k,\, m \notin \{k_0, m_0\}.\end{gathered}$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, $\mu_*(\tilde{A}) \subseteq \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$, $\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right| \neq 0$. Очевидно:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\tilde{\tilde{x}}^m.$$

Обозначим:

$$\beta_{k_0}^{k_0} = 1,$$
$$\beta_{m_0}^{k_0} = -1,$$
$$\beta_m^{k_0} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\beta_{k_0}^{m_0} = 1,$$
$$\beta_{m_0}^{m_0} = 1,$$
$$\beta_m^{m_0} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\beta_m^j = \delta_m^j, \quad j = \overline{1,N},\, j \notin \{k_0, m_0\},\, m = \overline{1,N}.$$

Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 2\operatorname{sgn}(m_0 - k_0) \neq 0$, $\tilde{x} = \beta\tilde{\tilde{x}}$. Следовательно, $\tilde{\tilde{x}} = \beta^{-1}\tilde{x}$. Так как $\det(\beta^{-1}) \neq 0$, то существует единственный объект e', удовлетворяющий условиям: e' — базис пространства L, $\alpha(e', e) = \beta^{-1}$. Тогда: $[x](e') = \alpha(e', e)[x](e) = \beta^{-1}\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Следовательно:

$$A(x, x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}[x]^k(e')[x]^m(e').$$

В силу произвольности выбора вектора $x \in L$ получаем, что:

$$A(x, x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}[x]^k(e')[x]^m(e'), \quad x \in L.$$

Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, то $[A](e') = \tilde{\tilde{A}}$. Тогда: $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$.

3. Очевидно, существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$. Так как $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$, то существуют векторы $e''_1, \ldots, e''_N$, удовлетворяющие условиям: e'' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e')\big) \subseteq \mu_*\big([A](e'')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e'')\big)$. Так как $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, то: e'' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e'')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e'')\big)$.

4. Так как $\mu_*\big([A](e)\big) \neq \{1, \ldots, N\}$, то:

$$\exists k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)\Big).$$

Пусть:

$$\exists k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big) \wedge [A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0\Big).$$

Выберем число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1,N}$, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$. Так как $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$. Так как $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$.

Пусть:

$$\forall k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big) \implies [A]_{k_0,k_0}(e) = 0\Big).$$

Выберем число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1,N}$, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$. Тогда $[A]_{k_0,k_0}(e) = 0$. Так как: $[A](e)$ — симметричная матрица, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то существует число m_0, удовлетворяющее условиям: $m_0 = \overline{1,N}$, $m_0 \neq k_0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда $m_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$. Следовательно, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$. Так как: $[A]_{k_0,k_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$. Так как $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$. $\square$

Теорема (метод Лагранжа для симметричной билинейной формы)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— симметричная билинейная форма в пространстве* L*. Тогда существуют векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, удовлетворяющие условиям:* e *— базис пространства* L*,* $[A](e)$ *— диагональная матрица.*

15.2. Закон инерции

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; A — полуторалинейная форма в пространстве L, Q — подпространство пространства L, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N_1$, e — базис подпространства Q. Пусть: $x \in L$, $\forall k = \overline{1,N_1}\big(A(e_k, x) = 0\big)$. Докажем, что $\forall u \in Q\big(A(u,x) = 0\big)$.

Пусть $u \in Q$. Обозначим, $\tilde{u} = [u](e)$. Тогда:

$$A(u,x) = A(\tilde{u}^k e_k, x) = \overline{\tilde{u}^k} A(e_k, x) = 0.$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*,* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*,* $\dim(Q_1) < \dim(Q_2)$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$*. Тогда существует вектор* x*, удовлетворяющий условиям:* $x \in Q_2$*,* $x \neq \theta$*,* $\forall u \in Q_1\big(A(u,x) = 0\big)$*.*

Доказательство. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Тогда: N_1, $N_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $N_1 < N_2$, $N_2 \neq +\infty$. Следовательно: $N_1 \in \mathbb{Z}_+$, $N_2 \in \mathbb{N}$. Так как $N_2 \in \mathbb{N}$, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_{N_2}$, удовлетворяющие условию: e' — базис подпространства Q_2.

Пусть $N_1 = 0$. Тогда $Q_1 = \{\theta\}$. Очевидно: $e'_1 \in Q_2$, $e'_1 \neq \theta$, $A(u, e'_1) = A(\theta, e'_1) = 0$ при $u \in Q_1$.

Пусть $N_1 \neq 0$. Тогда $N_1 \in \mathbb{N}$. Следовательно, существуют векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, удовлетворяющие условию: e — базис подпространства Q_1. Так как $N_1 < N_2$, то существует столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}_2$, $\forall k = \overline{1,N_1}\big(A(e_k, e'_{k'})\tilde{x}^{k'} = 0\big)$. Обозначим, $x = \tilde{x}^{k'} e'_{k'}$. Так как: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}_2$, то: $x \in Q_2$, $x \neq \theta$. Так как $\forall k = \overline{1,N_1}\big(A(e_k, e'_{k'})\tilde{x}^{k'} = 0\big)$, то:

$$A(e_k, \tilde{x}^{k'} e'_{k'}) = 0, \quad k = \overline{1,N_1};$$
$$A(e_k, x) = 0, \quad k = \overline{1,N_1};$$
$$A(u,x) = 0, \quad u \in Q_1. \quad \square$$

Теорема (закон инерции для эрмитовых полуторалинейных форм)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*.*

Пусть: e *— базис пространства* L*,* $[A](e)$ *— диагональная матрица,* p_1 *— количество положительных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e)$*,* n_1 *— количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e)$*.*

Пусть: e' — базис пространства L, $[A](e')$ — диагональная матрица, p_2 — количество положительных элементов на главной диагонали матрицы $[A](e')$, n_2 — количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы $[A](e')$. Тогда: $p_1 = p_2$, $n_1 = n_2$.

Доказательство. Очевидно, p_1, n_1, p_2, $n_2 = \overline{0, N}$. Без ограничения общности можно считать, что: $[A]_{k,k}(e) > 0$ при $k = \overline{1, p_1}$; $[A]_{k,k}(e) < 0$ при $k = \overline{p_1 + 1, p_1 + n_1}$; $[A]_{k',k'}(e') > 0$ при $k' = \overline{1, p_2}$; $[A]_{k',k'}(e') < 0$ при $k' = \overline{p_2 + 1, p_2 + n_2}$. Тогда: $[A]_{k,k}(e) = 0$ при $k = \overline{p_1 + n_1 + 1, N}$; $[A]_{k',k'}(e') = 0$ при $k' = \overline{p_2 + n_2 + 1, N}$. Обозначим: $\tilde{A} = [A](e)$, $\tilde{\tilde{A}} = [A](e')$. Предположим, что $p_1 < p_2$. Тогда: $p_1 = \overline{0, N - 1}$, $p_2 = \overline{1, N}$.

Предположим, что $p_1 = 0$. Обозначим, $\tilde{x} = [e'_1](e)$. Тогда:

$$A(e'_1, e'_1) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m} \overline{\tilde{x}^k} \tilde{x}^m = \sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,k} \left|\tilde{x}^k\right|^2 \leqslant 0.$$

Очевидно: $A(e'_1, e'_1) = \tilde{\tilde{A}}_{1,1} > 0$ (что противоречит утверждению: $A(e'_1, e'_1) \leqslant 0$). Итак, $p_1 \neq 0$. Тогда $p_1 = \overline{1, N - 1}$.

Очевидно: $\dim\big(L(e_1, \ldots, e_{p_1})\big) = p_1$, $\dim\big(L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})\big) = p_2$. Так как $p_1 < p_2$, то существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})$, $x \neq \theta$, $\forall u \in L(e_1, \ldots, e_{p_1})\big(A(u, x) = 0\big)$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x, x) = A\Big(\sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{x}^k e_k, x\Big) = \sum_{k=\overline{1,N}} A(e_k, x)\overline{\tilde{x}^k} = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} A(e_k, x)\overline{\tilde{x}^k} =$$

$$= \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} A\Big(e_k, \sum_{m=\overline{1,N}} \tilde{x}^m e_m\Big)\overline{\tilde{x}^k} = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} \sum_{m=\overline{1,N}} A(e_k, e_m)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} \sum_{m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m =$$

$$= \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} \tilde{A}_{k,k} \left|\tilde{x}^k\right|^2 \leqslant 0.$$

Обозначим, $\tilde{\tilde{x}} = [x](e'_1, \ldots, e'_{p_2})$. Так как: $x \in L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})$, $x \neq \theta$, то: $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^{p_2}$, $\tilde{\tilde{x}} \neq \tilde{\theta}_2$. Тогда:

$$A(x, x) = A\Big(\sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}, \sum_{m'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{m'} e'_{m'}\Big) = \sum_{k',m'=\overline{1,p_2}} A(e'_{k'}, e'_{m'})\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k'}}\tilde{\tilde{x}}^{m'} = \sum_{k',m'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{A}}_{k',m'}\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k'}}\tilde{\tilde{x}}^{m'} =$$

$$= \sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{A}}_{k',k'} \left|\tilde{\tilde{x}}^{k'}\right|^2 > 0$$

(что противоречит утверждению: $A(x, x) \leqslant 0$). Итак, $p_2 \leqslant p_1$.

Аналогично получаем, что $p_1 \leqslant p_2$. Тогда $p_1 = p_2$. Аналогично получаем, что $n_1 = n_2$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть: e — базис пространства L, $[A](e)$ — диагональная матрица, p — количество положительных элементов на главной диагонали матрицы $[A](e)$, n — количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы $[A](e)$. Будем говорить, что (p, n) — сигнатура формы A.

15.3. Критерий Сильвестра

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L.

Пусть: $A > 0$, e — базис пространства L. Пусть $k = \overline{1, N}$. Так как $e_k \neq \theta$, то: $[A]_{k,k}(e) = A(e_k, e_k) > 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Тогда:

$$\det\bigl([A](e')\bigr) = \det\bigl(\overline{\alpha(e,e')^T}[A](e)\alpha(e,e')\bigr) = \Bigl|\det\bigl(\alpha(e,e')\bigr)\Bigr|^2 \det\bigl([A](e)\bigr).$$

Следовательно, $\operatorname{sgn}\Bigl(\det\bigl([A](e')\bigr)\Bigr) = \operatorname{sgn}\Bigl(\det\bigl([A](e)\bigr)\Bigr)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$, $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L, e *— базис пространства* L, $A(x, x) > 0$ *при:* $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$, $x \neq \theta$*. Тогда существуют векторы* $e'_1, \ldots, e'_N$*, удовлетворяющие условиям:* e' *— базис пространства* L, $e'_k = e_k$ *при* $k = \overline{1, N-1}$*;* $N \in \mu_*\bigl([A](e')\bigr)$*.*

Доказательство. Очевидно: $\dim\bigl(L(e_1, \ldots, e_{N-1})\bigr) = N - 1$, $\dim(L) = N$. Так как $N - 1 < N$, то существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in L$, $x \neq \theta$, $\forall u \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})\bigl(A(u, x) = 0\bigr)$. Предположим, что $e_1, \ldots, e_{N-1}$, x — линейно зависимые векторы. Так как $e_1, \ldots, e_{N-1}$ — линейно независимые векторы, то $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$. Тогда $A(x, x) = 0$. Так как: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N-1})$, $x \neq \theta$, то $A(x, x) > 0$ (что противоречит утверждению: $A(x, x) = 0$). Итак, $e_1, \ldots, e_{N-1}$, x — линейно независимые векторы.

Обозначим: $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N-1}$; $e'_N = x$. Тогда: $e'_1, \ldots, e'_N$ — линейно независимые векторы пространства L, $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N-1}$; $A(e'_k, e'_N) = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$. Так как: $e'_1, \ldots, e'_N$ — линейно независимые векторы пространства L, $\dim(L) = N$, то e' — базис пространства L. Пусть $k = \overline{1, N-1}$. Тогда: $[A]_{k,N}(e') = A(e'_k, e'_N) = 0$. Так как $[A](e')$ — эрмитова матрица, то $N \in \mu_*\bigl([A](e')\bigr)$. □

Теорема (критерий Сильвестра)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L, e *— базис пространства* L, $\tilde{A} = [A](e)$*.*

1. Справедливо утверждение: $A > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\forall k = \overline{1, N}\bigl(\Delta_k(\tilde{A}) > 0\bigr)$*.*

2. Справедливо утверждение: $A < 0$ *тогда и только тогда, когда* $\forall k = \overline{1, N}\Bigl(\operatorname{sgn}\bigl(\Delta_k(\tilde{A})\bigr) = (-1)^k\Bigr)$*.*

3. Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\neg(A > 0)$, $\neg(A < 0)$*. Тогда* A *— знакопеременная форма.*

Доказательство.

1. **Пусть $A > 0$. Докажем, что: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N}$.**

Пусть $N = 1$. Так как: $A > 0$, $e_1 \neq \theta$, то: $\tilde{A}_{1,1} = A(e_1, e_1) > 0$. Тогда:

$$\Delta_1(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}) = \tilde{A}_{1,1} > 0.$$

Пусть: $N_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $N = N_0$. Пусть $N = N_0 + 1$. Так как $A > 0$, то: $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N_0})$, $x \neq \theta$. Так как утверждение справедливо при $N = N_0$, то: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N_0}$. Так как A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_{N_0+1}$, удовлетворяющие условиям: e' —

базис пространства L, $[A](e')$ — диагональная матрица. Обозначим, $\tilde{\tilde{A}} = [A](e')$. Пусть $k = \overline{1, N_0+1}$. Так как: $A > 0$, $e'_k \neq \theta$, то: $\tilde{\tilde{A}}_{k,k} = A(e'_k, e'_k) > 0$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, то: $\det(\tilde{\tilde{A}}) = \tilde{\tilde{A}}_{1,1} \cdots \tilde{\tilde{A}}_{N_0+1,N_0+1} > 0$. Тогда $\det(\tilde{A}) > 0$. Следовательно: $\Delta_{N_0+1}(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}) > 0$.

Пусть: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ **при** $k = \overline{1, N}$**. Докажем, что** $A > 0$**.**

Пусть $N = 1$. Пусть: $x \in L$, $x \neq \theta$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^1$, $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}$. Так как $\Delta_1(\tilde{A}) > 0$, то:

$$A(x,x) = \tilde{A}_{1,1} \left|\tilde{x}^1\right|^2 = \det(\tilde{A}) \left|\tilde{x}^1\right|^2 = \Delta_1(\tilde{A}) \left|\tilde{x}^1\right|^2 > 0.$$

Пусть: $N_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $N = N_0$. Пусть $N = N_0 + 1$. Так как: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N_0}$; утверждение справедливо при $N = N_0$, то: $A(x,x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N_0})$, $x \neq \theta$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_{N_0+1}$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N_0}$; $N_0+1 \in \mu_*\big([A](e')\big)$. Обозначим, $\tilde{\tilde{A}} = [A](e')$. Так как: $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N_0}$, то: $\tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m}$ при k, $m = \overline{1, N_0}$. Так как $\Delta_{N_0}(\tilde{A}) > 0$, то: $\Delta_{N_0}(\tilde{\tilde{A}}) = \Delta_{N_0}(\tilde{A}) > 0$. Так как $\Delta_{N_0+1}(\tilde{A}) > 0$, то: $\det(\tilde{A}) = \Delta_{N_0+1}(\tilde{A}) > 0$. Тогда $\det(\tilde{\tilde{A}}) > 0$. Так как: $\tilde{\tilde{A}}_{k,N_0+1} = 0$ при $k = \overline{1, N_0}$, то $\det(\tilde{\tilde{A}}) = \tilde{\tilde{A}}_{N_0+1,N_0+1} \Delta_{N_0}(\tilde{\tilde{A}})$. Тогда:

$$\tilde{\tilde{A}}_{N_0+1,N_0+1} = \frac{\det(\tilde{\tilde{A}})}{\Delta_{N_0}(\tilde{\tilde{A}})} > 0.$$

Пусть: $x \in L$, $x \neq \theta$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e')$. Тогда: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_0+1}$, $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}$. Следовательно:

$$\begin{gathered} A(x,x) = A\Big(\sum_{k=\overline{1,N_0+1}} \tilde{x}^k e'_k, \sum_{m=\overline{1,N_0+1}} \tilde{x}^m e'_m\Big) = \\ = A\Big(\sum_{k=\overline{1,N_0}} \tilde{x}^k e'_k + \tilde{x}^{N_0+1} e'_{N_0+1}, \sum_{m=\overline{1,N_0}} \tilde{x}^m e'_m + \tilde{x}^{N_0+1} e'_{N_0+1}\Big) = \\ = A\Big(\sum_{k=\overline{1,N_0}} \tilde{x}^k e'_k, \sum_{m=\overline{1,N_0}} \tilde{x}^m e'_m\Big) + \tilde{\tilde{A}}_{N_0+1,N_0+1} \left|\tilde{x}^{N_0+1}\right|^2 > 0. \end{gathered}$$

2. Обозначим: $B(x,y) = -A(x,y)$ при x, $y \in L$. Тогда B — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Обозначим, $\tilde{B} = [B](e)$. Тогда $\tilde{B} = -\tilde{A}$.

Пусть $A < 0$. Тогда $B > 0$. Следовательно $\forall k = \overline{1, N}\big(\Delta_k(\tilde{B}) > 0\big)$. Тогда: $\operatorname{sgn}\big(\Delta_k(\tilde{A})\big) = \operatorname{sgn}\big(\Delta_k(-\tilde{B})\big) = \operatorname{sgn}\big((-1)^k \Delta_k(\tilde{B})\big) = (-1)^k$ при $k = \overline{1, N}$.

Пусть $\forall k = \overline{1, N}\Big(\operatorname{sgn}\big(\Delta_k(\tilde{A})\big) = (-1)^k\Big)$. Тогда: $\Delta_k(\tilde{B}) = \Delta_k(-\tilde{A}) = (-1)^k \Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N}$. Следовательно, $B > 0$. Тогда $A < 0$.

3. Так как A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $[A](e')$ — диагональная матрица. Обозначим, $\tilde{\tilde{A}} = [A](e')$. Так как $\det(\tilde{A}) \neq 0$, то $\det(\tilde{\tilde{A}}) \neq 0$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, то: $\tilde{\tilde{A}}_{1,1} \cdots \tilde{\tilde{A}}_{N,N} = \det(\tilde{\tilde{A}}) \neq 0$. Тогда $\forall k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \neq 0)$.

Предположим, что $\forall k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} > 0)$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, то $A > 0$ (что противоречит утверждению: $\neg(A > 0)$). Итак, $\exists k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \leqslant 0)$. Так как $\forall k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \neq 0)$, то $\exists k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} < 0)$.

Предположим, что $\forall k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} < 0)$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, то $A < 0$ (что противоречит утверждению: $\neg(A < 0)$). Итак, $\exists k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \geqslant 0)$. Так как $\forall k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \neq 0)$, то $\exists k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} > 0)$. Так как: $\exists k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} < 0)$, $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, то A — знакопеременная форма. □

Лекция 16. Линейные евклидовы и линейные псевдоевклидовы пространства

16.1. Линейные евклидовы пространства

Определение (линейное евклидово пространство). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $F\colon L \times L \implies \mathbb{K}$. Далее обычно будем писать «(x, y)» вместо «$F(x, y)$».

Пусть:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ при x, $y \in L$;
2. $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$;
3. $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$;
4. $(x, x) > 0$ при: $x \in L$, $x \neq \theta$.

Будем говорить, что: (L, F) — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; F — скалярное произведение пространства (L, F).

Замечание. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$.

Пусть (L, F) — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$. Тогда: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L.

Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Тогда (L, F) — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Утверждение (неравенство Коши–Буняковского). *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.*

1. Пусть: x, $y \in H$, x, y — линейно зависимые векторы. Тогда:

$$\bigl|(x, y)\bigr| = \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

2. Пусть: x, $y \in H$, x, y — линейно независимые векторы. Тогда:

$$\bigl|(x, y)\bigr| < \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

Доказательство.

1. Пусть $x = \theta$. Тогда: $(x, y) = 0$, $(x, x) = 0$. Следовательно: $\bigl|(x, y)\bigr| = 0$, $\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} = 0$. Тогда $\bigl|(x, y)\bigr| = \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$.

Пусть $x \neq \theta$. Тогда x — линейно независимый вектор. Так как x, y — линейно зависимые векторы, то существует число λ, удовлетворяющее условиям: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y = \lambda x$. Тогда:

$$\bigl|(x, y)\bigr| = \bigl|(x, \lambda x)\bigr| = \bigl|\lambda(x, x)\bigr| = |\lambda|\,(x, x);$$

$$\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} = \sqrt{(x, x)}\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{(x, x)}\sqrt{\overline{\lambda}\lambda(x, x)} = \sqrt{(x, x)}\sqrt{|\lambda|^2\,(x, x)} =$$
$$= \sqrt{(x, x)}\sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{(x, x)} = |\lambda|\,(x, x).$$

Следовательно, $\bigl|(x, y)\bigr| = \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$.

2. Так как x, y — линейно независимые векторы, то $x, y \neq \theta$. Тогда (x,x), $(y,y) > 0$.

Пусть $(x,y) = 0$. Тогда: $\big|(x,y)\big| = 0$, $\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} > 0$. Следовательно, $\big|(x,y)\big| < \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.

Пусть $(x,y) \neq 0$. Пусть $t \in \mathbb{R}$. Обозначим, $\lambda = \frac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|}t$. Так как: x, y — линейно независимые векторы, $1 \neq 0$, то: $x + \lambda y = 1x + \lambda y \neq \theta$. Тогда:

$$\begin{gathered}
(x+\lambda y, x+\lambda y) > 0,\\
(x,x) + (x,\lambda y) + (\lambda y, x) + (\lambda y, \lambda y) > 0,\\
(x,x) + \lambda(x,y) + \overline{\lambda}(y,x) + \overline{\lambda}\lambda(y,y) > 0,\\
(x,x) + \lambda(x,y) + \overline{\lambda}\cdot\overline{(x,y)} + \overline{\lambda}\lambda(y,y) > 0,\\
(x,x) + 2\big|(x,y)\big|t + (y,y)t^2 > 0.
\end{gathered}$$

Следовательно:

$$\forall t \in \mathbb{R}\Big((x,x) + 2\big|(x,y)\big|t + (y,y)t^2 > 0\Big).$$

Так как $(y,y) > 0$, то:

$$\begin{gathered}
\Big(2\big|(x,y)\big|\Big)^2 - 4(y,y)(x,x) < 0,\\
\big|(x,y)\big| < \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}. \quad \square
\end{gathered}$$

Замечание (норма вектора). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $x \in H$. Обозначим, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Тогда $\|x\| \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\|x\|$ — норма вектора x.

Пусть $x \in H$. Очевидно: $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geqslant 0$, $\|x\|^2 = \Big(\sqrt{(x,x)}\Big)^2 = (x,x)$.

Докажем утверждения.

1. Пусть $x, y \in H$. Тогда $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).
2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$. Тогда $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
3. Пусть: $x \in H$, $x \neq \theta$. Тогда $\|x\| > 0$.

1. Очевидно:

$$\begin{gathered}
\|x+y\| = \sqrt{(x+y,x+y)} = \sqrt{(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)} =\\
= \sqrt{(x,x)+(x,y)+\overline{(x,y)}+(y,y)} = \sqrt{(x,x)+2\operatorname{Re}\big((x,y)\big)+(y,y)} \leqslant\\
\leqslant \sqrt{(x,x)+2\big|(x,y)\big|+(y,y)} \leqslant \sqrt{(x,x)+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+(y,y)} =\\
= \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2} = \sqrt{\big(\|x\|+\|y\|\big)^2} = \|x\| + \|y\|.
\end{gathered}$$

2. Очевидно:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\overline{\lambda}\lambda(x,x)} = \sqrt{|\lambda|^2(x,x)} = \sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{(x,x)} = |\lambda|\cdot\|x\|.$$

3. Очевидно:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} > 0.$$

Пусть x, $y \in H$. Обозначим, $\rho(x,y) = \|x-y\|$. Тогда $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что ρ — метрика пространства H.

Справедливы утверждения.

1. Пусть x, $y \in H$. Тогда $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.
2. Пусть x, y, $z \in H$. Тогда $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника).
3. Пусть x, $y \in H$. Тогда $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$.

Пусть: $x_0 \in H$, $\delta \in (0,+\infty)$. Обозначим, $B_\delta(x_0) = \big\{x\colon x \in H \wedge \rho(x,x_0) < \delta\big\}$.

Будем говорить, что A — открытое множество в пространстве H, если: $A \subseteq H$, $\forall x_0 \in A \exists \delta \in (0,+\infty)\big(B_\delta(x_0) \subseteq A\big)$.

Обозначим через τ_H множество всех открытых множеств в пространстве H. Тогда $\tau_H \subseteq P(H)$. Будем говорить, что τ_H — топология пространства H.

Справедливы утверждения.

1. Справедливы утверждения: $\varnothing \in \tau_H$, $H \in \tau_H$ ($\varnothing$ — открытое множество, H — открытое множество).

2. Пусть A, $B \in \tau_H$. Тогда $A \cap B \in \tau_H$ (пересечение двух открытых множеств есть открытое множество).

3. Пусть $\mu \subseteq \tau_H$. Тогда $\cup\mu \in \tau_H$ (объединение любого количества открытых множеств есть открытое множество).

Замечание (угол между векторами). Пусть H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$.

Пусть: x, $y \in H$, $x = \theta \vee y = \theta$. Обозначим, $\varphi(x,y) = 0$. Тогда $\varphi(x,y) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\varphi(x,y)$ — угол между векторами x, y.

Пусть: x, $y \in H$, $x \neq \theta \wedge y \neq \theta$. Обозначим, $\varphi(x,y) = \arccos\Big(\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}\Big)$. Тогда $\varphi(x,y) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\varphi(x,y)$ — угол между векторами x, y.

Пусть x, $y \in H$. Очевидно, $\varphi(x,y) \in [0,\pi]$.

Пусть x, $y \in H$. Очевидно, $(x,y) = \|x\|\cdot\|y\|\cos\big(\varphi(x,y)\big)$.

Замечание (ортогональность). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть x, $y \in H$. Будем писать $x \perp y$, если $(x,y) = 0$.
   Пусть: x, $y \in H$; $x \perp y$. Тогда $y \perp x$.
   Пусть: x, y_1, $y_2 \in H$; $x \perp y_1$, $x \perp y_2$. Тогда $x \perp y_1 + y_2$.
   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in H$; $x \perp y$. Тогда $x \perp \lambda y$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1,\dots,x_r$ — ортогональная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1,\dots,x_r$ — нормированная последовательность векторов, если: $\|x_k\| = 1$ при $k = \overline{1,r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1,\dots,x_r$ — ортонормированная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$; $\|x_k\| = 1$ при $k = \overline{1,r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_r \in H$, $x_1,\dots,x_r$ — ортогональные векторы, $x_1,\dots,x_r \neq \theta$. **Докажем, что $x_1,\dots,x_r$ — линейно независимые векторы.**

Пусть: $C^1,\dots,C^r \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} C^m x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Так как $x_k \neq \theta$, то $(x_k,x_k) \neq 0$.

Тогда:

$$\Big(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} C^m x_m\Big) = (x_k,\theta),$$

$$\sum_{m=\overline{1,r}} C^m(x_k, x_m) = 0,$$
$$C^k(x_k, x_k) = 0,$$
$$C^k = 0.$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

3. Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $x \perp Q$, если $\forall u \in Q(x \perp u)$.

4. Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq H$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$, если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2(x_1 \perp x_2)$.

Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$; $Q_1 \perp Q_2$. Тогда $Q_2 \perp Q_1$.

5. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq H$. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональная последовательность множеств, если: $Q_k \perp Q_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства H, $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональные подпространства. **Докажем, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.**

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Тогда:

$$\Big(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} x_m\Big) = (x_k, \theta),$$
$$\sum_{m=\overline{1,r}} (x_k, x_m) = 0,$$
$$(x_k, x_k) = 0,$$
$$x_k = \theta.$$

Следовательно, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Определение (ортогональное дополнение). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq H$. Обозначим, $Q^\perp = \{x \colon x \in H \wedge x \perp Q\}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*; H — линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$.

1. *Пусть $Q \subseteq H$. Тогда $Q^\perp$ — подпространство пространства H.*
2. *Пусть: $Q \subseteq H$; $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$. Тогда $Q_0 \subseteq Q^\perp$.*
3. *Пусть: $Q \subseteq H$; $Q_0 \subseteq Q^\perp$. Тогда: $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$.*
4. *Пусть $Q \subseteq H$. Тогда $Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$.*
5. *Пусть: $Q \subseteq H$; $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$, $Q_0 + Q = H$. Тогда $Q_0 = Q^\perp$.*
6. *Пусть: $Q \subseteq H$, $Q + Q^\perp = H$. Тогда $Q = (Q^\perp)^\perp$.*

Доказательство.

1. Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $\theta \in Q^\perp$.

Пусть: $x_1 \in Q^\perp$, $x_2 \in Q^\perp$. Тогда: $x_1 \in H$, $x_1 \perp Q$; $x_2 \in H$, $x_2 \perp Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда: $x_1 \in H$, $x_1 \perp u$; $x_2 \in H$, $x_2 \perp u$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in H$, $x_1 + x_2 \perp u$. Тогда: $x_1 + x_2 \in H$, $x_1 + x_2 \perp Q$. Следовательно, $x_1 + x_2 \in Q^\perp$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q^\perp$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $x \perp Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $x \perp u$. Следовательно: $\lambda x \in H$, $\lambda x \perp u$. Тогда: $\lambda x \in H$, $\lambda x \perp Q$. Следовательно, $\lambda x \in Q^\perp$. Итак, $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

2. Пусть $x \in Q_0$. Так как: $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$, то: $\forall x \in Q_0(x \in H)$, $\forall x \in Q_0 \forall u \in Q(x \perp u)$. Тогда: $x \in H$, $\forall u \in Q(x \perp u)$. Следовательно: $x \in H$, $x \perp Q$. Тогда $x \in Q^\perp$. Следовательно, $\forall x \in Q_0(x \in Q^\perp)$. Тогда $Q_0 \subseteq Q^\perp$.

3. Пусть $x \in Q_0$. Так как $Q_0 \subseteq Q^\perp$, то $\forall x \in Q_0 (x \in Q^\perp)$. Тогда $x \in Q^\perp$. Следовательно: $x \in H$, $x \perp Q$. Тогда: $x \in H$, $\forall u \in Q (x \perp u)$. Следовательно: $\forall x \in Q_0 (x \in H)$, $\forall x \in Q_0 \forall u \in Q (x \perp u)$. Тогда: $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$.

4. Очевидно: $Q \subseteq H$; $Q^\perp \subseteq Q^\perp$. Тогда: $Q \subseteq H$; $Q^\perp \subseteq H$, $Q^\perp \perp Q$. Следовательно: $Q^\perp \subseteq H$; $Q \subseteq H$, $Q \perp Q^\perp$. Тогда $Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$.

5. Так как: $Q \subseteq H$; $Q_0 \subseteq H$, $Q_0 \perp Q$, то $Q_0 \subseteq Q^\perp$.

Пусть $x \in Q^\perp$. Тогда: $x \in H$, $x \perp Q$. Так как: $Q_0 + Q = H$, $x \in H$, то существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_0$, $x_2 \in Q$, $x_1 + x_2 = x$. Так как: $Q_0 \perp Q$, $x_1 \in Q_0$, $x_2 \in Q$, то $x_1 \perp x_2$. Так как: $x \perp Q$, $x_2 \in Q$, то $x \perp x_2$. Тогда:

$$\begin{gathered}(x_1 + x_2, x_2) = (x, x_2),\\ (x_1, x_2) + (x_2, x_2) = (x, x_2),\\ (x_2, x_2) = 0,\\ x_2 = \theta.\end{gathered}$$

Следовательно: $x = x_1 + x_2 = x_1 \in Q_0$. Тогда $Q^\perp \subseteq Q_0$. Итак, $Q_0 = Q^\perp$.

6. Очевидно: $Q \subseteq H$; $Q^\perp \subseteq Q^\perp$, $Q + Q^\perp = H$. Тогда: $Q \subseteq H$; $Q^\perp \subseteq H$, $Q^\perp \perp Q$, $Q + Q^\perp = H$. Следовательно: $Q^\perp \subseteq H$; $Q \subseteq H$, $Q \perp Q^\perp$, $Q + Q^\perp = H$. Тогда $Q = (Q^\perp)^\perp$. $\square$

Определение (ортогональная проекция). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$. Будем говорить, что x' — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q, если: $x' \in Q$, $x - x' \perp Q$.

2. Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$. Будем говорить, что x'' — перпендикуляр вектора x к подпространству Q, если: $x'' \in H$, $x'' \perp Q$, $x - x'' \in Q$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть: Q *— подпространство пространства* H*,* $x \in H$*,* x' *— ортогональная проекция вектора* x *на подпространство* Q*,* x'' *— ортогональная проекция вектора* x *на подпространство* Q*. Тогда* $x' = x''$*.*

2. Пусть: Q *— подпространство пространства* H*,* $x_1 \in H$*,* x_1' *— ортогональная проекция вектора* x_1 *на подпространство* Q*,* $x_2 \in H$*,* x_2' *— ортогональная проекция вектора* x_2 *на подпространство* Q*. Тогда* $x_1' + x_2'$ *— ортогональная проекция вектора* $x_1 + x_2$ *на подпространство* Q*.*

3. Пусть: Q *— подпространство пространства* H*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $x \in H$*,* x' *— ортогональная проекция вектора* x *на подпространство* Q*. Тогда* $\lambda x'$ *— ортогональная проекция вектора* λx *на подпространство* Q*.*

4. Пусть: Q *— подпространство пространства* H*,* $x \in Q$*. Тогда* x *— ортогональная проекция вектора* x *на подпространство* Q*.*

5. Пусть: Q *— подпространство пространства* H*,* $x \in H$*,* $x \perp Q$*. Тогда* θ *— ортогональная проекция вектора* x *на подпространство* Q*.*

6. Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— ортогональные подпространства пространства* H*,* $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$*,* $x = x_1 + \cdots + x_r$*. Тогда:*

$$\forall k = \overline{1, r} (x_k \text{ — ортогональная проекция вектора } x \text{ на подпространство } Q_k).$$

7. Пусть: Q *— подпространство пространства* H*,* $x \in H$*,* x' *— ортогональная проекция вектора* x *на подпространство* Q*. Тогда* $x - x'$ *— ортогональная проекция вектора* x *на подпространство* $Q^\perp$*.*

Замечание (ортогональная проекция). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$. Будем говорить, что x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q, если: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \perp Q$.

Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$. Пусть x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Будем говорить, что $x - x_1$ — перпендикуляр вектора x к подпространству Q.

Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$, x_1', x_1'' — ортогональные проекции вектора x на подпространство Q. Тогда: $x_1', x_1'' \in Q$, $x - x_1'$, $x - x_1'' \in Q^\perp$. Следовательно:

$$(x_1' - x_1'', x_1' - x_1'') = \big(x_1' - x_1'', (x - x_1'') - (x - x_1')\big) = 0.$$

Тогда $x_1' - x_1'' = \theta$. Следовательно, $x_1' = x_1''$.

Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q, $y \in H$, y_1 — ортогональная проекция вектора y на подпространство Q. Тогда: x_1, $y_1 \in Q$, $x - x_1$, $y - y_1 \in Q^\perp$. Следовательно: $x_1 + y_1 \in Q$, $(x + y) - (x_1 + y_1) = (x - x_1) + (y - y_1) \in Q^\perp$. Тогда $x_1 + y_1$ — ортогональная проекция вектора $x + y$ на подпространство Q.

Пусть: Q — подпространство пространства H, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_1 \in Q$, $x - x_1 \in Q^\perp$. Следовательно: $\lambda x \in Q$, $\lambda x - \lambda x_1 = \lambda(x - x_1) \in Q^\perp$. Тогда λx_1 — ортогональная проекция вектора λx на подпространство Q.

Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in Q$. Тогда: $x \in Q$, $x - x = \theta \perp Q$. Следовательно, x — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q.

Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$, $x \perp Q$. Тогда: $\theta \in Q$, $x - \theta = x \perp Q$. Следовательно, θ — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q.

Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$, θ — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $x = x - \theta \perp Q$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональные подпространства пространства H; $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \cdots + x_r$. **Докажем, что x_k — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q_k при $k = \overline{1, r}$.**

Пусть $k = \overline{1, r}$. Пусть $r = 1$. Тогда $k = 1$. Очевидно: $x_1 \in Q_1$, $x = x_1$. Тогда x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q_1.

Пусть $r \neq 1$. Тогда $r \geqslant 2$. Очевидно: $x_k \in Q_k$, $x - x_k = \sum\limits_{m = \overline{1, r},\, m \neq k} x_m \in Q_k^\perp$. Тогда x_k — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q_k. □

Пусть: Q — подпространство пространства H, $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \in Q^\perp$. Следовательно: $x - x_1 \in Q^\perp$, $x - (x - x_1) = x_1 \in Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$. Тогда $x - x_1$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство $Q^\perp$.

2. Пусть Q — подпространство пространства H. Будем говорить, что подпространство Q допускает ортогональное проектирование, если для любого вектора $x \in H$ существует вектор x_1, удовлетворяющий условию: x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q.

Пусть: Q — подпространство пространства H, Q допускает ортогональное проектирование. Пусть $x \in H$. Пусть x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Обозначим, $P_Q(x) = x_1$. Очевидно, $P_Q \colon H \implies Q$. Будем говорить, что P_Q — оператор ортогонального проектирования на подпространство Q.

Очевидно: $P_Q \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $\mathrm{R}(P_Q) \subseteq Q$, $\ker(P_Q) = Q^\perp$, $P_Q x = x$ при $x \in Q$.

Пусть $x \in H$. Тогда: $(P_Q P_Q)x = P_Q\big(P_Q x\big) = P_Q x$. Следовательно, $P_Q P_Q = P_Q$. Пусть $x \in Q$. Тогда: $x \in H$, $x = P_Q x$. Следовательно, $x \in \mathrm{R}(P_Q)$. Тогда $Q \subseteq \mathrm{R}(P_Q)$. Так как $\mathrm{R}(P_Q) \subseteq Q$, то $\mathrm{R}(P_Q) = Q$. Итак: $P_Q \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $\mathrm{R}(P_Q) = Q$, $\ker(P_Q) = Q^\perp$, $P_Q P_Q = P_Q$, $P_Q x = x$ при $x \in Q$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональные подпространства пространства H.*

1. Пусть $Q_1 + \cdots + Q_r = H$. Тогда: $Q_1, \ldots, Q_r$ допускают ортогональное проектирование, $P_{Q_1} + \cdots + P_{Q_r} = I$.

2. Пусть: $Q_1, \ldots, Q_r$ допускают ортогональное проектирование, $P_{Q_1} + \cdots + P_{Q_r} = I$. Тогда $Q_1 + \cdots + Q_r = H$.

Доказательство.

1. Пусть $k = \overline{1, r}$. Пусть $x \in H$. Так как $Q_1 + \cdots + Q_r = H$, то существуют векторы $x_1, \ldots, x_r$, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \cdots + x_r$. Тогда x_k — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q_k. В силу произвольности выбора вектора $x \in H$ получаем, что подпространство Q_k допускает ортогональное проектирование.

Пусть $x \in H$. Так как $Q_1 + \cdots + Q_r = H$, то существуют векторы $x_1, \ldots, x_r$, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \cdots + x_r$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда x_k — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q_k. Следовательно, $P_{Q_k}(x) = x_k$. Тогда:

$$\Big(\sum_{k=1}^{r} P_{Q_k}\Big)(x) = \sum_{k=1}^{r} P_{Q_k}(x) = \sum_{k=1}^{r} x_k = x = I(x).$$

Следовательно, $P_{Q_1} + \cdots + P_{Q_r} = I$.

2. Пусть $x \in H$. Тогда:

$$x = I(x) = \Big(\sum_{k=1}^{r} P_{Q_k}\Big)(x) = \sum_{k=1}^{r} P_{Q_k}(x) \in \sum_{k=1}^{r} Q_k.$$

Следовательно, $H \subseteq Q_1 + \cdots + Q_r$. Очевидно, $Q_1 + \cdots + Q_r \subseteq H$. Тогда $Q_1 + \cdots + Q_r = H$. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, Q допускает ортогональное проектирование. Тогда: $Q^\perp$ допускает ортогональное проектирование, $P_Q + P_{Q^\perp} = I$, $Q + Q^\perp = H$, $Q = (Q^\perp)^\perp$.*

Доказательство. Пусть $x \in H$. Тогда $P_Q(x)$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Следовательно, $x - P_Q(x)$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство $Q^\perp$. В силу произвольности выбора вектора $x \in H$ получаем, что подпространство $Q^\perp$ допускает ортогональное проектирование.

Пусть $x \in H$. Тогда $P_Q(x)$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Следовательно, $x - P_Q(x)$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство $Q^\perp$. Тогда $P_{Q^\perp}(x) = x - P_Q(x)$. Следовательно, $P_Q(x) + P_{Q^\perp}(x) = x$. Тогда $P_Q(x) + P_{Q^\perp}(x) = I(x)$. Следовательно, $P_Q + P_{Q^\perp} = I$. Тогда $Q + Q^\perp = H$. Следовательно, $Q = (Q^\perp)^\perp$. □

Замечание (метрические тензоры линейного унитарного пространства). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Пусть: (L, F) — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim\big((L, F)\big) = N$.

Тогда: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$, F — скалярное произведение в пространстве L. Следовательно: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$, F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Так как F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, то F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве (L, F).

1. Пусть e — базис пространства (L, F). Обозначим: $g_{k,m}(e) = (e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1, N}$. Тогда: $g_{k,m}(e) = F(e_k, e_m) = [F]_{k,m}(e)$ при k, $m = \overline{1, N}$. Следовательно, $g(e) = [F](e)$. Так как F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве (L, F), то: $g(e) \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $g(e)$ — эрмитова матрица, $(x, y) = g_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$; $\Delta_k\big(g(e)\big) \in (0, +\infty)$ при $k = \overline{1, N}$. Пусть $k = \overline{1, N}$. Так как $e_k \neq \theta$, то:

$$g_{k,k}(e) = (e_k, e_k) \in (0, +\infty);$$
$$g_{k,k}(e) = (e_k, e_k) = \|e_k\|^2 .$$

Пусть e, e' — базисы пространства (L, F). Так как F — полуторалинейная форма в пространстве (L, F), то: $g_{k',m'}(e') = g_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ при k', $m' = \overline{1, N}$; $g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e')$. Будем говорить, что g — ковариантный метрический тензор пространства (L, F).

Пусть e — базис пространства (L, F). Пусть e — ортогональный базис. Тогда $g(e)$ — диагональная матрица. Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис. Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e) = \tilde{I}$. Пусть $g(e) = \tilde{I}$. Тогда e — ортонормированный базис.

Пусть e, e' — ортонормированные базисы пространства (L, F). Тогда:

$$g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e'),$$
$$\tilde{I} = \overline{\alpha(e, e')^T}\tilde{I}\alpha(e, e'),$$
$$\tilde{I} = \overline{\alpha(e, e')^T}\alpha(e, e').$$

Следовательно: $\det\big(\alpha(e, e')\big) \neq 0$, $\alpha(e, e')^{-1} = \overline{\alpha(e, e')^T}$. Тогда $\alpha(e, e')\overline{\alpha(e, e')^T} = \tilde{I}$. Следовательно, $\alpha(e, e')$ — унитарная матрица.

Пусть: e — ортонормированный базис пространства (L, F), $e'_1, \ldots, e'_N \in L$, $\alpha(e, e')$ — унитарная матрица. Тогда: e — ортонормированный базис пространства (L, F), $e'_1, \ldots, e'_N \in L$, $\alpha(e, e')\overline{\alpha(e, e')^T} = \tilde{I}$. Следовательно: e — ортонормированный базис пространства (L, F), $e'_1, \ldots, e'_N \in L$, $\det\big(\alpha(e, e')\big) \neq 0$, $\alpha(e, e')^{-1} = \overline{\alpha(e, e')^T}$. Тогда: e' — базис пространства (L, F),

$$g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e') = \overline{\alpha(e, e')^T}\tilde{I}\alpha(e, e') = \overline{\alpha(e, e')^T}\alpha(e, e') = \tilde{I}.$$

Следовательно, e' — ортонормированный базис пространства (L, F).

Так как F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве (L, F), то, согласно теореме Лагранжа, существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условиям: e — базис пространства (L, F), $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис пространства (L, F). Обозначим: $e'_k = \frac{1}{\|e_k\|} e_k$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда e' — ортонормированный базис пространства (L, F).

Пусть: e — базис пространства (L, F), x, $y \in L$. Пусть e — ортогональный базис. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} g_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e) = \sum_{k=\overline{1,N}} g_{k,k}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^k(e) = \sum_{k=\overline{1,N}} (e_k, e_k)\overline{[x]^k(e)}[y]^k(e) =$$

$$= \sum_{k=\overline{1,N}} \|e_k\|^2\, \overline{[x]^k(e)}[y]^k(e).$$

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда:

$$(x,y) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} g_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \delta^k_m \overline{[x]^k(e)}[y]^m(e) = \sum_{k=\overline{1,N}} \overline{[x]^k(e)}[y]^k(e).$$

2. Пусть e — базис пространства (L,F). Обозначим: $g^{k,m}(e) = \big(g(e)^{-1}\big)^{k,m}$ при k, $m = \overline{1,N}$. Так как: $g(e) \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $g(e)$ — эрмитова матрица, $\det\big(g(e)\big) \in (0,+\infty)$, то: $g(e)^{-1} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $g(e)^{-1}$ — эрмитова матрица, $\det\big(g(e)^{-1}\big) \in (0,+\infty)$.

Пусть e, e' — базисы пространства (L,F). Тогда:

$$g(e')^{-1} = \Big(\overline{\alpha(e,e')^T} g(e)\alpha(e,e')\Big)^{-1} = \alpha(e,e')^{-1} g(e)^{-1}\Big(\overline{\alpha(e,e')^T}\Big)^{-1} =$$
$$= \alpha(e,e')^{-1} g(e)^{-1}\overline{\big(\alpha(e,e')^{-1}\big)^T} = \alpha(e',e) g(e)^{-1}\overline{\alpha(e',e)^T}.$$

Следовательно: $g^{k',m'}(e') = g^{k,m}(e)\alpha^{k'}_k(e',e)\overline{\alpha^{m'}_m(e',e)}$ при k', $m' = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $\big\{g(e)^{-1}\big\}_e$ — контравариантный метрический тензор пространства (L,F).

Пусть e — базис пространства (L,F). Пусть e — ортогональный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \frac{1}{g_{k,k}(e)} = \frac{1}{(e_k,e_k)} = \frac{1}{\|e_k\|^2}$ при $k = \overline{1,N}$. Пусть $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис. Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e)^{-1} = \tilde{I}$. Пусть: $g(e)^{-1} = \tilde{I}$. Тогда e — ортонормированный базис.

Пусть: e — базис пространства (L,F), $x \in L$. Пусть: k, $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$(e_m,x) = \big(e_m,[x]^n(e)e_n\big) = [x]^n(e)(e_m,e_n) = g_{m,n}(e)[x]^n(e);$$
$$g^{k,m}(e)g_{m,n}(e)[x]^n(e) = g^{k,m}(e)(e_m,x),$$
$$\delta^k_n[x]^n(e) = g^{k,m}(e)(e_m,x),$$
$$[x]^k(e) = g^{k,m}(e)(e_m,x);$$
$$x = [x]^k(e)e_k = g^{k,m}(e)(e_m,x)e_k.$$

Итак:

$$[x]^k(e) = g^{k,m}(e)(e_m,x), \quad k = \overline{1,N};$$
$$x = g^{k,m}(e)(e_m,x)e_k.$$

Пусть e — ортогональный базис. Тогда:

$$[x]^k(e) = \sum_{m=\overline{1,N}} g^{k,m}(e)(e_m,x) = \frac{(e_k,x)}{g_{k,k}(e)} = \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)} = \frac{(e_k,x)}{\|e_k\|^2}, \quad k = \overline{1,N};$$

$$x = \sum_{k,m=\overline{1,N}} g^{k,m}(e)(e_m,x)e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k,x)}{g_{k,k}(e)}e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)}e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k,x)}{\|e_k\|^2}e_k.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда:

$$[x]^k(e) = \sum_{m=\overline{1,N}} g^{k,m}(e)(e_m,x) = \sum_{m=\overline{1,N}} \delta^k_m(e_m,x) = (e_k,x), \quad k = \overline{1,N};$$

$$x = \sum_{k,m=\overline{1,N}} g^{k,m}(e)(e_m,x)e_k = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \delta^k_m(e_m,x)e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} (e_k,x)e_k.$$

Замечание (оператор ортогонального проектирования на простейшие подпространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Очевидно: $\{\theta\}$ — допускает ортогональное проектирование, $P_{\{\theta\}} = \Theta$.

Очевидно: H — допускает ортогональное проектирование, $P_H = I$.

Утверждение (оператор ортогонального проектирования на подпространство натуральной размерности)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q *— подпространство пространства* H*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(Q) = N_1$*,* G *— ковариантный метрический тензор подпространства* Q*,* e *— базис подпространства* Q*. Тогда:* Q *допускает ортогональное проектирование,* $P_Q x = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$ *при* $x \in H$*.*

Доказательство. Пусть $x \in H$. Обозначим, $x_1 = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$. Тогда $x_1 \in Q$. Пусть $\gamma = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$(e_\gamma, x - x_1) = (e_\gamma, x) - (e_\gamma, x_1) = (e_\gamma, x) - \big(e_\gamma, G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha\big) = (e_\gamma, x) - G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)(e_\gamma, e_\alpha) =$$
$$= (e_\gamma, x) - G_{\gamma,\alpha}G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x) = (e_\gamma, x) - \delta_\gamma^\beta(e_\beta, x) = (e_\gamma, x) - (e_\gamma, x) = 0.$$

Следовательно: $x - x_1 \perp L(e_1, \ldots, e_{N_1}) = Q$. Итак, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q.

Пусть $x \in H$. Тогда $G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. В силу произвольности выбора вектора $x \in H$ получаем, что подпространство Q допускает ортогональное проектирование.

Пусть $x \in H$. Тогда $G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Следовательно, $P_Q x = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N_1$, G — ковариантный метрический тензор подпространства Q.

Пусть: e — базис подпространства Q, $x \in H$. Пусть e — ортогональный базис. Тогда:

$$P_Q x = \sum_{\alpha,\beta=\overline{1,N_1}} G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha = \sum_{\alpha=\overline{1,N_1}} \frac{(e_\alpha, x)}{G_{\alpha,\alpha}(e)}e_\alpha = \sum_{\alpha=\overline{1,N_1}} \frac{(e_\alpha, x)}{(e_\alpha, e_\alpha)}e_\alpha = \sum_{\alpha=\overline{1,N_1}} \frac{(e_\alpha, x)}{\|e_\alpha\|^2}e_\alpha.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда:

$$P_Q x = \sum_{\alpha,\beta=\overline{1,N_1}} G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha = \sum_{\alpha,\beta=\overline{1,N_1}} \delta_\beta^\alpha(e_\beta, x)e_\alpha = \sum_{\alpha=\overline{1,N_1}} (e_\alpha, x)e_\alpha.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $\dim(Q) \neq +\infty$. Тогда: подпространство Q допускает ортогональное проектирование, подпространство $Q^\perp$ допускает ортогональное проектирование, $P_Q + P_{Q^\perp} = I$, $Q + Q^\perp = H$, $Q = (Q^\perp)^\perp$.

Теорема (процесс ортогонализации Грама–Шмидта)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in H$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$*.*

Существуют векторы $y_1, \ldots, y_r$*, удовлетворяющие условиям:* $(y_1, \ldots, y_k)$ *— ортогональный базис подпространства* $L(x_1, \ldots, x_k)$ *при* $k = \overline{1, r}$*;* $y_1 = \lambda_1 x_1$*,* $y_k = \lambda_k\Big(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m, x_k)}{(y_m, y_m)}y_m\Big)$ *при* $k = \overline{2, r}$*.*

Доказательство. Пусть $r = 1$. Обозначим, $y_1 = \lambda_1 x_1$. Очевидно, y_1 — искомая последовательность векторов.

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $r = r_0$. Пусть $r = r_0 + 1$. Так как утверждение справедливо при $r = r_0$, то существуют векторы $y_1, \ldots, y_{r_0}$, удовлетворяющие условиям: $(y_1, \ldots, y_k)$ — ортогональный базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_k)$ при $k = \overline{1, r_0}$; $y_1 = \lambda_1 x_1$, $y_k = \lambda_k\Bigl(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m, x_k)}{(y_m, y_m)} y_m\Bigr)$ при $k = \overline{2, r_0}$. Обозначим, $y_{r_0+1} = \lambda_{r_0+1}\Bigl(x_{r_0+1} - \sum\limits_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m\Bigr)$. **Докажем, что** $(y_1, \ldots, y_{r_0+1})$ **— ортогональный базис подпространства** $L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})$**.** Так как $(y_1, \ldots, y_{r_0})$ — ортогональный базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_{r_0})$, то: $y_1, \ldots, y_{r_0} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0})$, $y_1, \ldots, y_{r_0}$ — ортогональные векторы, $y_1, \ldots, y_{r_0} \neq \theta$.

Очевидно: $y_1, \ldots, y_{r_0} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0}) \subseteq L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})$. Так как $x_{r_0+1} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})$, то $y_{r_0+1} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})$.

Пусть $k = \overline{1, r_0}$. Так как $y_1, \ldots, y_{r_0}$ — ортогональные векторы, то:

$$(y_k, y_{r_0+1}) = \biggl(y_k, \lambda_{r_0+1}\Bigl(x_{r_0+1} - \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m\Bigr)\biggr) =$$

$$= \lambda_{r_0+1}\Bigl((y_k, x_{r_0+1}) - \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} (y_k, y_m)\Bigr) = \lambda_{r_0+1}\bigl((y_k, x_{r_0+1}) - (y_k, x_{r_0+1})\bigr) = 0.$$

Тогда $y_k \perp y_{r_0+1}$. Так как $y_1, \ldots, y_{r_0}$ — ортогональные векторы, то $y_1, \ldots, y_{r_0+1}$ — ортогональные векторы.

Предположим, что $y_{r_0+1} = \theta$. Так как: $\lambda_{r_0+1} \neq 0$, $y_1, \ldots, y_{r_0} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0})$, то:

$$\lambda_{r_0+1}\Bigl(x_{r_0+1} - \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m\Bigr) = \theta,$$

$$x_{r_0+1} - \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m = \theta,$$

$$x_{r_0+1} = \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m,$$

$$x_{r_0+1} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0}).$$

Тогда $x_1, \ldots, x_{r_0+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит условию). Итак, $y_{r_0+1} \neq \theta$.

Очевидно: $y_1, \ldots, y_{r_0+1} \in L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})$, $y_1, \ldots, y_{r_0+1}$ — ортогональные векторы, $y_1, \ldots, y_{r_0+1} \neq \theta$. Так как $x_1, \ldots, x_{r_0+1}$ — линейно независимые векторы, то: $\dim\bigl(L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{x_1, \ldots, x_{r_0+1}\}\bigr) = r_0 + 1$. Тогда $(y_1, \ldots, y_{r_0+1})$ — ортогональный базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_{r_0+1})$. Очевидно, $y_1, \ldots, y_{r_0+1}$ — искомая последовательность векторов. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in H$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$*,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$*.*

Пусть: $y_1, \ldots, y_r \in H$*,* $y_1, \ldots, y_r \neq \theta$*,* $y_1 = \lambda_1 x_1$*,* $y_k = \lambda_k\Bigl(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m, x_k)}{(y_m, y_m)} y_m\Bigr)$ *при* $k = \overline{2, r}$*.*

Пусть: $z_1, \ldots, z_r \in H$, $z_1, \ldots, z_r \neq \theta$, $z_1 = \lambda_1 x_1$, $z_k = \lambda_k\Big(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(z_m, x_k)}{(z_m, z_m)} z_m\Big)$ *при* $k = \overline{2,r}$. *Тогда:* $y_1 = z_1, \ldots, y_r = z_r$.

16.2. Линейные псевдоевклидовы пространства (линейные псевдоунитарные пространства)

Определение (линейное псевдоунитарное пространство). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$. Пусть F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\det\big([F](e)\big) \neq 0$ при: e — базис пространства L.

Будем говорить, что F — псевдоскалярное произведение в пространстве L. Будем говорить, что: (L, F) — линейное псевдоунитарное пространство над полем $\mathbb{K}$; F — псевдоскалярное произведение пространства (L, F). Далее обычно будем писать «(x, y)» вместо «$F(x, y)$».

Определение (линейное псевдоевклидово пространство). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$. Пусть F — симметричная билинейная форма в пространстве L, $\det\big([F](e)\big) \neq 0$ при: e — базис пространства L.

Будем говорить, что F — псевдоскалярное произведение в пространстве L. Будем говорить, что: (L, F) — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; F — псевдоскалярное произведение пространства (L, F). Далее обычно будем писать «(x, y)» вместо «$F(x, y)$».

Замечание (псевдоортогональность). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное псевдоунитарное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть $x \in H$. Будем говорить, что x — изотропный вектор, если $(x, x) = 0$. Будем говорить, что x — неизотропный вектор, если $(x, x) \neq 0$.

2. Пусть $Q \subseteq H$. Будем говорить, что Q — изотропное множество, если $\forall x\big(x \in Q \land x \neq \theta \implies (x, x) = 0\big)$. Будем говорить, что Q — неизотропное множество, если $\forall x\big(x \in Q \land x \neq \theta \implies (x, x) \neq 0\big)$.

3. Пусть $x, y \in H$. Будем писать $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.

Пусть: $x, y \in H$, $x \perp y$. Тогда $(x, y) = 0$. Следовательно: $(y, x) = \overline{(x, y)} = \overline{0} = 0$. Тогда $y \perp x$.

Пусть: $x, y_1, y_2 \in H$, $x \perp y_1$, $x \perp y_2$. Тогда: $(x, y_1) = 0$, $(x, y_2) = 0$. Следовательно: $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) = 0$. Тогда $x \perp (y_1 + y_2)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in H$, $x \perp y$. Тогда $(x, y) = 0$. Следовательно: $(x, \lambda y) = \lambda(x, y) = 0$. Тогда $x \perp \lambda y$.

Пусть: $x_1, x_2, y \in H$, $x_1, x_2 \perp y$. Очевидно, $(x_1 + x_2) \perp y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in H$, $x \perp y$. Очевидно, $\lambda x \perp y$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортогональная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: $k, m = \overline{1,r}$, $k \neq m$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — нормированная последовательность векторов, если: $(x_k, x_k) = \pm 1$ при $k = \overline{1,r}$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортонормированная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: $k, m = \overline{1,r}$, $k \neq m$; $(x_k, x_k) = \pm 1$ при $k = \overline{1,r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортогональные векторы пространства H, $x_1, \ldots, x_r$ — неизотропные векторы. **Докажем, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.**

Пусть: $C^1, \ldots, C^r \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} C^m x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Тогда:

$$\Big(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} C^m x_m\Big) = (x_k, \theta),$$

$$\sum_{m=\overline{1,r}} C^m (x_k, x_m) = 0,$$

$$C^k (x_k, x_k) = 0.$$

Так как x_k — неизотропный вектор, то $(x_k, x_k) \neq 0$. Тогда $C^k = 0$. Итак, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

5. Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $x \perp Q$, если $\forall u \in Q (x \perp u)$.
 Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $Q \perp x$, если $\forall u \in Q (u \perp x)$.
 Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$, $x \perp Q$. Очевидно, $Q \perp x$.
 Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$, $Q \perp x$. Очевидно, $x \perp Q$.
6. Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq H$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$, если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$.
 Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Очевидно, $Q_2 \perp Q_1$.
7. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq H$. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — псевдоортогональная последовательность множеств, если: $Q_k \perp Q_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — псевдоортогональные подпространства пространства H, $Q_1, \ldots, Q_r$ — неизотропные подпространства. **Докажем, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.**

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Тогда:

$$\Big(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} x_m\Big) = (x_k, \theta),$$

$$\sum_{m=\overline{1,r}} (x_k, x_m) = 0,$$

$$(x_k, x_k) = 0,$$

$$x_k = \theta.$$

Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Замечание (псевдоортогональное дополнение). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное псевдоунитарное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

Пусть $Q \subseteq H$. Обозначим, $Q^\perp = \{x\colon x \in H \wedge x \perp Q\}$. Будем говорить, что $Q^\perp$ — псевдоортогональное дополнение множества Q.

Пусть $Q \subseteq H$. **Докажем, что $Q^\perp$ — подпространство пространства H.**

Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $\theta \in Q^\perp$. Пусть x_1, $x_2 \in Q^\perp$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, x_1, $x_2 \perp Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, x_1, $x_2 \perp u$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in H$, $x_1 + x_2 \perp u$. Тогда: $x_1 + x_2 \in H$, $x_1 + x_2 \perp Q$. Следовательно, $x_1 + x_2 \in Q^\perp$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q^\perp$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $x \perp Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $x \perp u$. Следовательно: $\lambda x \in H$, $\lambda x \perp u$. Тогда: $\lambda x \in H$, $\lambda x \perp Q$. Следовательно, $\lambda x \in Q^\perp$. Итак, $Q^\perp$ — подпространство пространства H. □

Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Очевидно, $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$.

Пусть $Q \subseteq H$. Очевидно, $Q^\perp \perp Q$.

Пусть $Q \subseteq H$. Тогда $Q^\perp \perp Q$. Следовательно, $Q \perp Q^\perp$. Тогда $Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное псевдоунитарное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* Q_1*,* $Q_2 \subseteq H$*,* $Q_1 \perp Q_2$*,* $Q_1 + Q_2 = H$*,* Q_2 *— неизотропное множество. Тогда* $Q_1 = Q_2^{\perp}$*.*

Доказательство. Так как $Q_1 \perp Q_2$, то $Q_1 \subseteq Q_2^{\perp}$.

Пусть $x \in Q_2^{\perp}$. Тогда: $x \in H$, $x \perp Q_2$. Так как: $x \in H$, $Q_1 + Q_2 = H$, то существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Так как: $x \perp Q_2$, $x_2 \in Q_2$, то $(x, x_2) = 0$. Так как: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $Q_1 \perp Q_2$, то $(x_1, x_2) = 0$. Тогда:

$$\begin{gathered}
(x, x_2) = 0,\\
(x_1 + x_2, x_2) = 0,\\
(x_1, x_2) + (x_2, x_2) = 0,\\
(x_2, x_2) = 0,\\
x_2 = \theta.
\end{gathered}$$

Следовательно: $x = x_1 + x_2 = x_1 \in Q_1$. Тогда $Q_2^{\perp} \subseteq Q_1$. Так как $Q_1 \subseteq Q_2^{\perp}$, то $Q_1 = Q_2^{\perp}$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное псевдоунитарное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; $Q \subseteq H$, $Q + Q^{\perp} = H$, $Q^{\perp}$ — неизотропное множество. Тогда: $Q^{\perp} \perp Q$, $Q + Q^{\perp} = H$, $Q^{\perp}$ — неизотропное множество. Следовательно: $Q \perp Q^{\perp}$, $Q + Q^{\perp} = H$, $Q^{\perp}$ — неизотропное множество. Тогда $Q = (Q^{\perp})^{\perp}$.

Замечание (метрические тензоры линейного псевдоунитарного пространства). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Пусть: (L, F) — линейное псевдоунитарное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim\bigl((L, F)\bigr) = N$. Тогда: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$, F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\det\bigl([F](e)\bigr) \neq 0$ при: e — базис пространства L. Так как: F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $\det\bigl([F](e)\bigr) \neq 0$ при: e — базис пространства L, то: F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве (L, F), $\det\bigl([F](e)\bigr) \neq 0$ при: e — базис пространства (L, F).

1. Пусть e — базис пространства (L, F). Обозначим: $g_{k,m}(e) = (e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1, N}$. Тогда: $g_{k,m}(e) = F(e_k, e_m) = [F]_{k,m}(e)$ при k, $m = \overline{1, N}$. Следовательно, $g(e) = [F](e)$. Так как: F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве (L, F), $\det\bigl([F](e')\bigr) \neq 0$ при: e' — базис пространства L, то: $g(e) \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $g(e)$ — эрмитова матрица, $(x, y) = g_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$; $\det\bigl(g(e)\bigr) \in \mathbb{R}$, $\det\bigl(g(e)\bigr) \neq 0$. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда: $g_{k,k}(e) = (e_k, e_k) \in \mathbb{R}$.

Пусть e, e' — базисы пространства (L, F). Так как F — полуторалинейная форма в пространстве (L, F), то: $g_{k',m'}(e') = g_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ при k', $m' = \overline{1, N}$; $g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e) \alpha(e, e')$. Будем говорить, что g — ковариантный метрический тензор пространства (L, F).

Пусть e — базис пространства (L, F). Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда $g(e)$ — диагональная матрица. Так как $\det\bigl(g(e)\bigr) \neq 0$, то $e_1, \ldots, e_N$ — неизотропные векторы. Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис. Так как $\det\bigl(g(e)\bigr) \neq 0$, то $e_1, \ldots, e_N$ — неизотропные векторы. Пусть e — псевдоортонормированный базис. Тогда: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1, N}$. Пусть: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда e — псевдоортонормированный базис.

Так как F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве (L, F), то, согласно теореме Лагранжа, существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условиям: e — базис пространства (L,F), $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда: e — псевдоортогональный базис пространства (L,F), $e_1,\dots,e_N$ — неизотропные векторы. Обозначим: $e'_k = \frac{1}{\sqrt{|(e_k,e_k)|}}e_k$ при $k=\overline{1,N}$. Тогда e' — псевдоортонормированный базис пространства (L,F).

Пусть: e — псевдоортогональный базис пространства (L,F), x, $y \in L$. Тогда:

$$(x,y) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} g_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e) = \sum_{k=\overline{1,N}} g_{k,k}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^k(e) = \sum_{k=\overline{1,N}} (e_k,e_k)\overline{[x]^k(e)}[y]^k(e).$$

2. Пусть e — базис пространства (L,F). Обозначим: $g^{k,m}(e) = \big(g(e)^{-1}\big)^{k,m}$ при k, $m = \overline{1,N}$. Так как: $g(e)\in\mathbb{K}^{N\times N}$, $g(e)$ — эрмитова матрица, $\det\big(g(e)\big)\neq 0$, то: $g(e)^{-1}\in\mathbb{K}^{N\times N}$, $g(e)^{-1}$ — эрмитова матрица, $\det\big(g(e)^{-1}\big)\in\mathbb{R}$, $\det\big(g(e)\big)\neq 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства (L,F). Тогда:

$$\begin{gathered} g(e')^{-1} = \Big(\overline{\alpha(e,e')^T}g(e)\alpha(e,e')\Big)^{-1} = \alpha(e,e')^{-1}g(e)^{-1}\Big(\overline{\alpha(e,e')^T}\Big)^{-1} = \\ = \alpha(e,e')^{-1}g(e)^{-1}\overline{\big(\alpha(e,e')^{-1}\big)^T} = \alpha(e',e)g(e)^{-1}\overline{\alpha(e',e)^T}. \end{gathered}$$

Следовательно: $g^{k',m'}(e') = g^{k,m}(e)\alpha^{k'}_{k}(e',e)\overline{\alpha^{m'}_{m}(e',e)}$ при k', $m'=\overline{1,N}$. Будем говорить, что $\big\{g(e)^{-1}\big\}_e$ — контравариантный метрический тензор пространства (L,F).

Пусть e — базис пространства (L,F). Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $e_1,\dots,e_N$ — неизотропные векторы, $g^{k,k}(e) = \frac{1}{g_{k,k}(e)} = \frac{1}{(e_k,e_k)}$ при $k=\overline{1,N}$. Пусть $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда: e — псевдоортогональный базис, $e_1,\dots,e_N$ — неизотропные векторы. Пусть e — псевдоортонормированный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e)=\pm1$ при $k=\overline{1,N}$. Пусть: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e)=\pm1$ при $k=\overline{1,N}$. Тогда e — псевдоортонормированный базис.

Пусть: e — базис пространства (L,F), $x\in L$. Пусть: k, $m=\overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered} (e_m,x) = \big(e_m,[x]^n(e)e_n\big) = [x]^n(e)(e_m,e_n) = g_{m,n}(e)[x]^n(e); \\ g^{k,m}(e)g_{m,n}(e)[x]^n(e) = g^{k,m}(e)(e_m,x), \\ \delta^k_n[x]^n(e) = g^{k,m}(e)(e_m,x), \\ [x]^k(e) = g^{k,m}(e)(e_m,x); \\ x = [x]^k(e)e_k = g^{k,m}(e)(e_m,x)e_k. \end{gathered}$$

Итак:

$$\begin{gathered} [x]^k(e) = g^{k,m}(e)(e_m,x), \quad k=\overline{1,N}; \\ x = g^{k,m}(e)(e_m,x)e_k. \end{gathered}$$

Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда:

$$\begin{gathered} [x]^k(e) = \sum_{m=\overline{1,N}} g^{k,m}(e)(e_m,x) = \frac{(e_k,x)}{g_{k,k}(e)} = \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)}, \quad k=\overline{1,N}; \\ x = \sum_{k,m=\overline{1,N}} g^{k,m}(e)(e_m,x)e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k,x)}{g_{k,k}(e)}e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k,x)}{(e_k,e_k)}e_k. \end{gathered}$$

Лекция 17. Сопряжённый оператор

17.1. Связь между векторами и линейными формами в евклидовых пространствах

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* x_1*,* $x_2 \in H$*,* $\forall u \in H\big((x_1, u) = (x_2, u)\big)$*. Тогда* $x_1 = x_2$*.*

Доказательство. Очевидно: $(x_1 - x_2, x_1 - x_2) = (x_1, x_1 - x_2) - (x_2, x_1 - x_2) = 0$. Тогда $x_1 - x_2 = \theta$. Следовательно, $x_1 = x_2$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть: x_1, $x_2 \in H$, $\forall u \in H\big((u, x_1) = (u, x_2)\big)$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, $\forall u \in H\big((x_1, u) = (x_2, u)\big)$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Замечание (дираковский формализм). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $x \in H$. Обозначим: $\langle x|\,(u) = (x, u)$ при $u \in H$. Очевидно, $\langle x|$ — линейная форма в пространстве H.

Пусть: x_1, $x_2 \in H$, $\langle x_1| = \langle x_2|$. Пусть $u \in H$. Тогда: $(x_1, u) = \langle x_1|\,u = \langle x_2|\,u = (x_2, u)$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Пусть x_1, $x_2 \in H$. Пусть $u \in H$. Тогда: $\langle x_1 + x_2|\,u = (x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = \langle x_1|\,u + \langle x_2|\,u = \big(\langle x_1| + \langle x_2|\big)u$. Следовательно, $\langle x_1 + x_2| = \langle x_1| + \langle x_2|$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$. Пусть $u \in H$. Тогда: $\langle \lambda x|\,u = (\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = \overline{\lambda}\,\langle x|\,(u) = \big(\overline{\lambda}\,\langle x|\big)u$. Следовательно, $\langle \lambda x| = \overline{\lambda}\,\langle x|$.

Пусть $x \in H$. Обозначим, $|x\rangle = x$.

Пусть x, $y \in H$. Тогда: $\langle x|\,|y\rangle = \langle x|\,y = (x, y)$.

2. Пусть $x \in H$. Обозначим: $F_x(u) = (u, x)$ при $u \in H$. Очевидно, F_x — полулинейная форма в пространстве H.

Пусть: x_1, $x_2 \in H$, $F_{x_1} = F_{x_2}$. Пусть $u \in H$. Тогда: $(u, x_1) = F_{x_1}u = F_{x_2}u = (u, x_2)$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Пусть x_1, $x_2 \in H$. Пусть $u \in H$. Тогда: $F_{x_1+x_2}u = (u, x_1 + x_2) = (u, x_1) + (u, x_2) = F_{x_1}u + F_{x_2}u = (F_{x_1} + F_{x_2})u$. Следовательно, $F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$. Пусть $u \in H$. Тогда: $F_{\lambda x}u = (u, \lambda x) = \lambda(u, x) = \lambda F_x(u) = (\lambda F_x)u$. Следовательно, $F_{\lambda x} = \lambda F_x$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$*;* $x \in H$*,* e *— базис пространства* H*.*

1. Пусть: $F(u) = (x, u)$ *при* $u \in H$*. Тогда:* F *— линейная форма в пространстве* H*,* $[F]_k(e) = \overline{g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e)}$ $\Big([F](e) = \overline{\big(g(e)[x](e)\big)^T}\Big)$*.*

2. Пусть: F *— линейная форма в пространстве* H*,* $[F]_k(e) = \overline{g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e)}$ $\Big([F](e) = \overline{\big(g(e)[x](e)\big)^T}\Big)$*. Тогда:* $F(u) = (x, u)$ *при* $u \in H$*.*

3. Пусть: $F(u) = (u, x)$ *при* $u \in H$*. Тогда:* F *— полулинейная форма в пространстве* H*,* $[F]_{\overline{k}}(e) = g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e)$ *при* $k = \overline{1, N}$ $\Big([F](e) = \big(g(e)[x](e)\big)^T\Big)$*.*

4. Пусть: F *— полулинейная форма в пространстве* H*,* $[F]_{\overline{k}}(e) = g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e)$ *при* $k = \overline{1, N}$ $\Big([F](e) = \big(g(e)[x](e)\big)^T\Big)$*. Тогда:* $F(u) = (u, x)$ *при* $u \in H$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, F — линейная форма в пространстве H. Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[F]_k(e) = F(e_k) = (x, e_k) = \big([x]^m(e)e_m, e_k\big) = \overline{[x]^m(e)}(e_m, e_k) = \overline{[x]^m(e)}g_{\overline{m},k}(e) = \\ = \overline{g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e)}.$$

2. Пусть $u \in H$. Тогда:

$$F(u) = [F]_k(e)[u]^k(e) = \overline{\big(g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e)\big)}[u]^k(e) = g_{\overline{m},k}(e)\overline{[x]^m(e)}[u]^k(e) = (x, u).$$

3. Очевидно, F — полулинейная форма в пространстве H. Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[F]_{\overline{k}}(e) = F(e_k) = (e_k, x) = \big(e_k, [x]^m(e)e_m\big) = [x]^m(e)(e_k, e_m) = g_{\overline{k},m}[x]^m(e).$$

4. Пусть $u \in H$. Тогда:

$$F(u) = [F]_{\overline{k}}(e)\overline{[u]^k(e)} = \big(g_{\overline{k},m}[x]^m(e)\big)\overline{[u]^k(e)} = g_{\overline{k},m}\overline{[u]^k(e)}[x]^m(e) = (u, x). \quad \square$$

Замечание (построение вектора по линейной форме). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; e — базис пространства H.

1. Пусть F — линейная форма в пространстве H. Пусть: $x \in H$, $[x]^m(e) = \overline{[F]_n(e)g^{n,\overline{m}}(e)}$ при $m = \overline{1,N}$ ($[x](e) = \overline{\big([F](e)g(e)^{-1}\big)^T}$). Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\overline{g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e)} = \overline{g_{\overline{k},m}(e)\overline{\big([F]_n(e)g^{n,\overline{m}}(e)\big)}} = [F]_n(e)\delta_k^n = [F]_k(e).$$

Следовательно: $F(u) = (x, u)$ при $u \in H$.

2. Пусть F — полулинейная форма в пространстве H. Пусть: $x \in H$, $[x]^m(e) = g^{m,\overline{n}}(e)[F]_{\overline{n}}(e)$ при $m = \overline{1,N}$ ($[x](e) = g(e)^{-1}[F](e)^T$). Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$g_{\overline{k},m}(e)[x]^m(e) = g_{\overline{k},m}(e)\big(g^{m,\overline{n}}(e)[F]_{\overline{n}}(e)\big) = \delta_{\overline{k}}^{\overline{n}}[F]_{\overline{n}}(e) = [F]_{\overline{k}}(e).$$

Следовательно: $F(u) = (u, x)$ при $u \in H$.

17.2. Связь между линейными операторами и полуторалинейными формами в евклидовых пространствах

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные унитарные пространства над полем $\mathbb{K}$. Пусть: A_1, $A_2\colon H_1 \implies H_2$, $\forall x \in H_2 \forall y \in H_1\big((x, A_1y) = (x, A_2y)\big)$. Пусть: $x \in H_2$, $y \in H_2$. Тогда $(x, A_1y) = (x, A_2y)$. В силу произвольности выбора $x \in H_2$ получаем, что $A_1y = A_2y$. В силу произвольности выбора $y \in H_1$ получаем, что $A_1 = A_2$.

Пусть: A_1, $A_2\colon H_1 \implies H_2$, $\forall x \in H_1 \forall y \in H_2\big((A_1x, y) = (A_2x, y)\big)$. Тогда: A_1, $A_2\colon H_1 \implies H_2$, $\forall y \in H_2 \forall x \in H_1\big((y, A_1x) = (y, A_2x)\big)$. Следовательно, $A_1 = A_2$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$. Обозначим: $F_A(x, y) = (x, Ay)$ при x, $y \in H$. Очевидно, F — полуторалинейная форма в пространстве H.

Пусть: A_1, $A_2 \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $F_{A_1} = F_{A_2}$. Пусть x, $y \in H$. Тогда: $(x, A_1y) = F_{A_1}(x, y) = F_{A_2}(x, y) = (x, A_2y)$. Следовательно, $A_1 = A_2$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* e *— базис пространства* H*.*

1. Пусть: $F(x,y)=(x,Ay)$ при x, $y\in H$. Тогда: F — полуторалинейная форма в пространстве H, $[F]_{\overline{k},m}(e)=g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)$ при k, $m=\overline{1,N}$ ($[F](e)=g(e)[A](e)$).

2. Пусть: F — полуторалинейная форма в пространстве H, $[F]_{\overline{k},m}(e)=g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)$ при k, $m=\overline{1,N}$ ($[F](e)=g(e)[A](e)$). Тогда: $F(x,y)=(x,Ay)$ при x, $y\in H$.

Доказательство.

1. Очевидно, F — полуторалинейная форма в пространстве H. Пусть k, $m=\overline{1,N}$. Тогда:

$$[F]_{\overline{k},m}(e)=F(e_k,e_m)=(e_k,Ae_m)=(e_k,[A]^n_m(e)e_n)=[A]^n_m(e)(e_k,e_n)=g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e).$$

2. Пусть x, $y\in H$. Тогда:

$$F(x,y)=[F]_{\overline{k},m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)=\big(g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)\big)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)=$$
$$=g_{\overline{k},n}(e)\overline{[x]^k(e)}\big([A]^n_m(e)[y]^m(e)\big)=g_{\overline{k},n}(e)\overline{[x]^k(e)}[Ay]^n(e)=(x,Ay).\quad\square$$

Замечание (построение линейного оператора по полуторалинейной форме). Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N\in\mathbb{N}$, $\dim(H)=N$; F — полуторалинейная форма в пространстве H, e — базис пространства H.

Пусть: $A\in\mathrm{Lin}(H,H)$, $[A]^n_m(e)=g^{n,\overline{i}}(e)[F]_{\overline{i},m}(e)$ при n, $m=\overline{1,N}$ ($[A](e)=g(e)^{-1}[F](e)$). Пусть k, $m=\overline{1,N}$. Тогда:

$$g_{\overline{k},n}(e)[A]^n_m(e)=g_{\overline{k},n}(e)\big(g^{n,\overline{i}}(e)[F]_{\overline{i},m}(e)\big)=\delta^{\overline{i}}_{\overline{k}}[F]_{\overline{i},m}(e)=[F]_{\overline{k},m}(e).$$

Следовательно: $F(x,y)=(x,Ay)$ при x, $y\in H$.

17.3. Сопряжённый оператор

Определение (сопряжённый оператор). Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные унитарные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon H_1\implies H_2$. Будем говорить, что B — сопряжённый оператор к оператору A, если: $B\colon H_2\implies H_1$, $(x,Ay)=(Bx,y)$ при: $x\in H_2$, $y\in H_1$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные унитарные пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $A\colon H_1\implies H_2$, B_1, B_2 — сопряжённые операторы к оператору A. Тогда B_1, $B_2\colon H_2\implies H_1$. Пусть: $x\in H_2$, $y\in H_1$. Тогда:

$$(B_1x,y)=(x,Ay)=(B_2x,y).$$

Следовательно, $B_1=B_2$.

2. Пусть: $A_1\colon H_1\implies H_2$, B_1 — сопряжённый оператор к оператору A_1, $A_2\colon H_1\implies H_2$, B_2 — сопряжённый оператор к оператору A_2. Тогда: $A_1+A_2\colon H_1\implies H_2$, $B_1+B_2\colon H_2\implies H_1$. Пусть: $x\in H_2$, $y\in H_1$. Тогда:

$$\big(x,(A_1+A_2)y\big)=(x,A_1y+A_2y)=(x,A_1y)+(x,A_2y)=(B_1x,y)+(B_2x,y)=$$
$$=(B_1x+B_2x,y)=\big((B_1+B_2)x,y\big).$$

Итак, B_1+B_2 — сопряжённый оператор к оператору A_1+A_2.

3. Пусть: $\lambda\in\mathbb{K}$, $A\in\colon H_1\implies H_2$, B — сопряжённый оператор к оператору A. Тогда: $\lambda A\colon H_1\implies H_2$, $\overline{\lambda}B\colon H_2\implies H_1$. Пусть: $x\in H_2$, $y\in H_1$. Тогда:

$$\big(x,(\lambda A)y\big)=\big(x,\lambda A(y)\big)=\lambda(x,Ay)=\lambda(Bx,y)=\big(\overline{\lambda}B(x),y\big)=\big((\overline{\lambda}B)x,y\big).$$

Итак, $\overline{\lambda}B$ — сопряжённый оператор к оператору λA.

4. Пусть: $A\colon H_1 \implies H_2$, B — сопряжённый оператор к оператору A. Пусть: $x \in H_1$, $y \in H_2$. Тогда:

$$(Ax, y) = \overline{(y, Ax)} = \overline{(By, x)} = (x, By).$$

5. Пусть: $A\colon H_1 \implies H_2$, B — сопряжённый оператор к оператору A. Тогда: $B\colon H_2 \implies H_1$, $A\colon H_1 \implies H_2$, $(x, By) = (Ax, y)$ при: $x \in H_1$, $y \in H_2$. Итак, A — сопряжённый оператор к оператору B.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2, H_3 — линейные унитарные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A_1\colon H_1 \implies H_2$, B_1 — сопряжённый оператор к оператору A_1, $A_2\colon H_2 \implies H_3$, B_2 — сопряжённый оператор к оператору A_2. Тогда: $A_2A_1\colon H_1 \implies H_3$, $B_1B_2\colon H_3 \implies H_1$. Пусть: $x \in H_3$, $y \in H_1$. Тогда:

$$\big(x, (A_2A_1)y\big) = \big(x, A_2(A_1y)\big) = (B_2x, A_1y) = \big(B_1(B_2x), y\big) = \big((B_1B_2)x, y\big).$$

Итак, B_1B_2 — сопряжённый оператор к оператору A_2A_1.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные унитарные пространства над полем $\mathbb{K}$, $\dim(H_1) = 0 \vee \dim(H_2) = 0$; $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Очевидно: $Ax = \theta_2$ при $x \in H_1$. Пусть: $By = \theta_1$ при $y \in H_2$. Очевидно: $B \in \mathrm{Lin}(H_2, H_1)$, B — сопряжённый оператор к оператору A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_1) = N_1$*;* H_2 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_2) = N_2$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*,* G *— ковариантный метрический тензор пространства* H_1*,* e *— базис пространства* H_1*,* g *— ковариантный метрический тензор пространства* H_2*,* f *— базис пространства* H_2*.*

Пусть: $B \in \mathrm{Lin}(H_2, H_1)$*,* $[B]^{\alpha}_{k}(e, f) = \overline{g_{\overline{k},m}(f)[A]^{m}_{\beta}(f, e)G^{\beta,\overline{\alpha}}(e)}$ *при:* $\alpha = \overline{1, N_1}$*,* $k = \overline{1, N_2}$ ($[B](e, f) = \overline{\big(g(f)[A](f, e)G(e)^{-1}\big)^{T}}$)*. Тогда* B *— сопряжённый оператор к оператору* A*.*

Доказательство. Пусть: $x \in H_2$, $y \in H_1$. Тогда:

$$(Bx, y) = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{[Bx]^{\alpha}}[y]^{\gamma} = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{\big([B]^{\alpha}_{k}[x]^{k}\big)}[y]^{\gamma} = G_{\overline{\alpha},\gamma}\overline{\Big(\overline{\big(g_{\overline{k},m}[A]^{m}_{\beta}G^{\beta,\overline{\alpha}}\big)}[x]^{k}\Big)}[y]^{\gamma} =$$
$$= G_{\overline{\alpha},\gamma}\Big(\big(g_{\overline{k},m}[A]^{m}_{\beta}G^{\beta,\overline{\alpha}}\big)\overline{[x]^{k}}\Big)[y]^{\gamma} = g_{\overline{k},m}\overline{[x]^{k}}\big([A]^{m}_{\beta}G^{\beta,\overline{\alpha}}G_{\overline{\alpha},\gamma}[y]^{\gamma}\big) =$$
$$= g_{\overline{k},m}\overline{[x]^{k}}\big([A]^{m}_{\beta}\delta^{\beta}_{\gamma}[y]^{\gamma}\big) = g_{\overline{k},m}\overline{[x]^{k}}\big([A]^{m}_{\beta}[y]^{\beta}\big) = g_{\overline{k},m}\overline{[x]^{k}}[Ay]^{m} = (x, Ay).$$

Следовательно, B — сопряжённый оператор к оператору A. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные унитарные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon H_1 \implies H_2$, $\exists B$(B — сопряжённый оператор к оператору A). Обозначим через A^* оператор, удовлетворяющий условию: A^* — сопряжённый оператор к оператору A.

Теорема (2-я теорема Фредгольма)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1*,* H_2 *— линейные унитарные пространства над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(H_1)$*,* $\dim(H_2) \neq +\infty$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*. Тогда* $\mathrm{R}(A) = \ker(A^*)^{\perp}$*.*

Доказательство. Докажем, что $\ker(A^*) = \mathrm{R}(A)^{\perp}$. Пусть $x \in \ker(A^*)$. Тогда: $x \in H_2$, $A^*x = \theta_1$. Пусть $v \in \mathrm{R}(A)$. Тогда существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in H_1$, $v = Au$. Следовательно:

$$(x, v) = (x, Au) = (A^*x, u) = (\theta_1, u) = 0.$$

Тогда $x \in \mathrm{R}(A)^{\perp}$.

Пусть $x \in \mathrm{R}(A)^{\perp}$. Тогда: $x \in H_2$, $x \perp \mathrm{R}(A)$. Следовательно:

$$(A^*x, A^*x) = \big(x, A(A^*x)\big) = 0;$$
$$A^*x = \theta_1;$$
$$x \in \ker(A^*).$$

Итак, $\ker(A^*) = \mathrm{R}(A)^{\perp}$.

Так как $\dim(H_2) \neq +\infty$, то: $\mathrm{R}(A) = \big(\mathrm{R}(A)^{\perp}\big)^{\perp} = \ker(A^*)^{\perp}$. □

17.4. Самосопряжённый оператор

Определение (формально самосопряжённый оператор). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(H, H)$. Будем говорить, что A — формально самосопряжённый оператор, если: $(x, Ay) = (Ax, y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$.

Определение (самосопряжённый оператор). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$. Будем говорить, что A — самосопряжённый оператор, если: $(x, Ay) = (Ax, y)$ при x, $y \in H$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор. Тогда A — сопряжённый оператор к оператору A.

   Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, A — сопряжённый оператор к оператору A. Тогда A — самосопряжённый оператор.

2. Пусть: $A_1 \in \mathrm{lin}(H, H)$, A_1 — формально самосопряжённый оператор, $A_2 \in \mathrm{lin}(H, H)$, A_2 — формально самосопряжённый оператор. Тогда $A_1 + A_2$ — формально самосопряжённый оператор.

3. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathrm{lin}(H, H)$, A — формально самосопряжённый оператор. Тогда λA — формально самосопряжённый оператор.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* $F(x, y) = (x, Ay)$ *при* x*,* $y \in H$*. Оператор* A *является самосопряжённым тогда и только тогда, когда* F *— эрмитова форма.*

Доказательство. Пусть A — самосопряжённый оператор. Пусть x, $y \in H$. Тогда:

$$\overline{F(y, x)} = \overline{(y, Ax)} = (Ax, y) = (x, Ay) = F(x, y).$$

Следовательно, F — эрмитова форма.

Пусть F — эрмитова форма. Пусть x, $y \in H$. Тогда:

$$(x, Ay) = F(x, y) = \overline{F(y, x)} = \overline{(y, Ax)} = (Ax, y).$$

Следовательно, A — самосопряжённый оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* e *— базис пространства* H*. Оператор* A *является самосопряжённым тогда и только тогда, когда* $g(e)[A](e)$ *— эрмитова матрица.*

Доказательство. Обозначим: $F(x, y) = (x, Ay)$ при x, $y \in H$. Тогда: F — полуторалинейная форма в пространстве H, $[F](e) = g(e)[A](e)$.

Пусть A — самосопряжённый оператор. Тогда F — эрмитова форма. Следовательно, $[F](e)$ — эрмитова матрица. Тогда $g(e)[A](e)$ — эрмитова матрица.

Пусть $g(e)[A](e)$ — эрмитова матрица. Тогда $[F](e)$ — эрмитова матрица. Следовательно, F — эрмитова форма. Тогда A — самосопряжённый оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть: Q *— подпространство пространства* H*,* Q *— допускает ортогональное проектирование. Тогда:* $P_Q \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* $\mathrm{R}(P_Q) = Q$*,* $P_Q P_Q = P_Q$*,* P_Q *— самосопряжённый оператор.*

2. Пусть: $P \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* $PP = P$*,* P *— самосопряжённый оператор. Тогда:* $\mathrm{R}(P)$ *— допускает ортогональное проектирование,* $P_{\mathrm{R}(P)} = P$*.*

Доказательство.

1. Очевидно: $P_Q \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $\mathrm{R}(P_Q) = Q$, $P_Q P_Q = P_Q$. Пусть x, $y \in H$. Тогда:

$$(x, P_Q y) = \big(P_Q x + (x - P_Q x), P_Q y\big) = (P_Q x, P_Q y) + (x - P_Q x, P_Q y) = (P_Q x, P_Q y) =$$
$$= (P_Q x, P_Q y) + (P_Q x, y - P_Q y) = \big(P_Q x, P_Q y + (y - P_Q y)\big) = (P_Q x, y).$$

Следовательно, P_Q — самосопряжённый оператор.

2. Пусть $x \in H$. Тогда $Px \in \mathrm{R}(P)$. Пусть $v \in \mathrm{R}(P)$. Тогда существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in H$, $v = Pu$. Следовательно:

$$(x - Px, v) = (x - Px, Pu) = \big(P(x - Px), u\big) = \big(Px - P(Px), u\big) = \big(Px - (PP)x, u\big) =$$
$$= (Px - Px, u) = (\theta, u) = 0.$$

Тогда $x - Px \perp \mathrm{R}(P)$. Так как: $Px \in \mathrm{R}(P)$, $x - Px \perp \mathrm{R}(P)$, то Px — ортогональная проекция вектора x на подпространство $\mathrm{R}(P)$. Тогда $\mathrm{R}(P)$ допускает ортогональное проектирование.

Пусть $x \in H$. Тогда Px — ортогональная проекция вектора x на подпространство $\mathrm{R}(P)$. Следовательно, $P_{\mathrm{R}(P)} = P$. □

17.5. Унитарный оператор

Определение (унитарный оператор). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные унитарные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Будем говорить, что A — унитарный оператор, если: $(Ax, Ay) = (x, y)$ при x, $y \in H_1$.

Определение (ортогональный оператор). Пусть: H_1, H_2 — линейные евклидовы пространства над полем $\mathbb{R}$; $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Будем говорить, что A — ортогональный оператор, если: $(Ax, Ay) = (x, y)$ при x, $y \in H_1$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2 — линейные унитарные пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, A — унитарный оператор. Так как $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, то $\theta_1 \in \ker(A)$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда: $x \in H_1$, $Ax = \theta_2$. Следовательно:

$$(x, x) = (Ax, Ax) = (\theta_2, \theta_2) = 0;$$
$$x = \theta_1.$$

Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

2. Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, A — унитарный оператор. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Так как $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, то A — обратимый оператор.

3. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$, $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, A — унитарный оператор. Тогда $\lambda A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$\big((\lambda A)x, (\lambda A)y\big) = \big(\lambda A(x), \lambda A(y)\big) = |\lambda|^2 (Ax, Ay) = (x, y).$$

Итак, λA — унитарный оператор.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H_1, H_2, H_3 — линейные унитарные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A_1 \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, A_1 — унитарный оператор, $A_2 \in \mathrm{Lin}(H_2, H_3)$, A_2 — унитарный оператор. Тогда $A_2A_1 \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$\big((A_2A_1)x, (A_2A_1)y\big) = \big(A_2(A_1x), A_2(A_1y)\big) = (A_1x, A_1y) = (x, y).$$

Итак, A_2A_1 — унитарный оператор.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1*,* H_2 *— линейные унитарные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*. Оператор* A *является унитарным тогда и только тогда, когда:* $\|Ax\| = \|x\|$ *при* $x \in H_1$*.*

Доказательство. Пусть A — унитарный оператор. Тогда: $\|Ax\| = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|$ при $x \in H_1$.

Пусть: $\|Ax\| = \|x\|$ при $x \in H_1$. Тогда: $(Ax, Ax) = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = (x, x)$ при $x \in H_1$. Обозначим: $F_1(x, y) = (x, y)$, $F_2(x, y) = (Ax, Ay)$ при x, $y \in H_1$; $Q_1(x) = (x, x)$, $Q_2(x) = (Ax, Ax)$ при $x \in H_1$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Очевидно: F_1, F_2 — полуторалинейные формы в пространстве H_1, $Q_1(x) = F_1(x, x)$, $Q_2(x) = F_2(x, x)$, $Q_2(x) = Q_1(x)$ при $x \in H_1$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$(Ax, Ay) = F_2(x, y) = \frac{1}{2}\Big(Q_2(x + y) - Q_2(x) - Q_2(y) - i\big(Q_2(x + iy) - Q_2(x) - Q_2(y)\big)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(Q_1(x + y) - Q_1(x) - Q_1(y) - i\big(Q_1(x + iy) - Q_1(x) - Q_1(y)\big)\Big) = F_1(x, y) = (x, y).$$

Следовательно, A — унитарный оператор.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Очевидно: F_1, F_2 — симметричные билинейные формы в пространстве H_1, $Q_1(x) = F_1(x, x)$, $Q_2(x) = F_2(x, x)$, $Q_2(x) = Q_1(x)$ при $x \in H_1$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$(Ax, Ay) = F_2(x, y) = \frac{1}{2}\big(Q_2(x + y) - Q_2(x) - Q_2(y)\big) = \frac{1}{2}\big(Q_1(x + y) - Q_1(x) - Q_1(y)\big) =$$
$$= F_1(x, y) = (x, y).$$

Следовательно, A — унитарный оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1*,* H_2 *— линейные унитарные пространства над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(H_1)$*,* $\dim(H_2) \neq +\infty$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*. Оператор* A *является унитарным тогда и только тогда, когда* $A^*A = I_1$*.*

Доказательство. Пусть A — унитарный оператор. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$\big((A^*A)x, y\big) = \big(A^*(Ax), y\big) = (Ax, Ay) = (x, y) = (I_1x, y).$$

Следовательно, $A^*A = I_1$.

Пусть $A^*A = I_1$. Пусть x, $y \in H_1$. Тогда:

$$(Ax, Ay) = \big(A^*(Ax), y\big) = \big((A^*A)x, y\big) = (I_1x, y) = (x, y).$$

Следовательно, A — унитарный оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1*,* H_2 *— линейные унитарные пространства над полем* $\mathbb{K}$*,* $\dim(H_1) = \dim(H_2)$*,* $\dim(H_2) \neq +\infty$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*,* A *— унитарный оператор. Тогда* $A^* = A^{-1}$*.*

Доказательство. Так как A — унитарный оператор, то $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Согласно 1-й теореме Фредгольма, так как: $\dim(H_1) = \dim(H_2)$, $\dim(H_2) \neq +\infty$, $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$, то $\mathrm{R}(A) = H_2$. Так как $\mathrm{D}(A^*) = H_2$, то $\mathrm{D}(A^*) = \mathrm{R}(A)$. Так как A — унитарный оператор, то $A^*A = I_1$. Тогда $A^* = A^{-1}$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H_1 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_1) = N_1$*;* H_2 *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H_2) = N_2$*;* $A \in \mathrm{Lin}(H_1, H_2)$*,* G *— ковариантный метрический тензор пространства* H_1*,* e *— базис пространства* H_1*,* g *— ковариантный метрический тензор пространства* H_2*,* f *— базис пространства* H_2*. Оператор* A *является унитарным тогда и только тогда, когда* $\overline{\left(g(f)[A](f,e)G(e)^{-1}\right)^T}[A](f,e) = \tilde{I}_1$*.*

Доказательство. Пусть A — унитарный оператор. Тогда:

$$
\begin{gathered}
A^*A = I_1,\\
[A^*A](e,e) = [I_1](e,e),\\
[A^*](e,f)[A](f,e) = [I_1](e,e),\\
\overline{\left(g(f)[A](f,e)G(e)^{-1}\right)^T}[A](f,e) = \tilde{I}_1.
\end{gathered}
$$

Пусть $\overline{\left(g(f)[A](f,e)G(e)^{-1}\right)^T}[A](f,e) = \tilde{I}_1$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
[A^*](e,f)[A](f,e) = [I_1](e,e),\\
[A^*A](e,e) = [I_1](e,e),\\
A^*A = I_1.
\end{gathered}
$$

Следовательно, A — унитарный оператор. □

Лекция 18. Самосопряжённый оператор. Спектральная теория

18.1. Самосопряжённый оператор

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(H, H)$*,* A *— формально самосопряжённый оператор.*

1. *Пусть:* $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$*,* $A[Q] \subseteq Q$*. Тогда* $A[Q^\perp] \subseteq Q^\perp$*.*
2. *Справедливо утверждение:* $\mathrm{SD}(A) \subseteq \mathbb{R}$*.*
3. *Пусть:* λ_1*,* $\lambda_2 \in \mathrm{SD}(A)$*,* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*. Тогда* $H_A(\lambda_1) \perp H_A(\lambda_2)$*.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in Q^\perp \cap \mathrm{D}(A)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $x \in Q^\perp$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A)$, $x \perp Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда: $u \in \mathrm{D}(A)$, $Au \in Q$. Так как: x, $u \in \mathrm{D}(A)$, $x \perp Q$, $Au \in Q$, то: $(Ax, u) = (x, Au) = 0$. Тогда $Ax \perp Q$. Следовательно, $Ax \in Q^\perp$. Тогда $A[Q^\perp] \subseteq Q^\perp$.

2. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Пусть $\lambda \in \mathrm{SD}(A)$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$. Следовательно:

$$
\begin{gathered}
(x, Ax) = (x, \lambda x) = \lambda(x, x); \\
(x, Ax) = (Ax, x) = (\lambda x, x) = \overline{\lambda}(x, x); \\
\lambda(x, x) = \overline{\lambda}(x, x), \\
\lambda = \overline{\lambda}, \\
\lambda \in \mathbb{R}.
\end{gathered}
$$

Тогда $\mathrm{SD}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Тогда: $\mathrm{SD}(A) \subseteq \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3. Пусть: $x_1 \in H_A(\lambda_1)$, $x_2 \in H_A(\lambda_2)$. Тогда: x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Следовательно:

$$
\begin{gathered}
(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2); \\
(x_1, Ax_2) = (Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \overline{\lambda_1}(x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2); \\
(\lambda_2 - \lambda_1)(x_1, x_2) = 0.
\end{gathered}
$$

Так как $\lambda_2 \neq \lambda_1$, то $(x_1, x_2) = 0$. Тогда $H_A(\lambda_1) \perp H_A(\lambda_2)$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор, $Q \subseteq H$, $A[Q] \subseteq Q$. Очевидно, $Q^\perp$ — инвариантное подпространство оператора A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Тогда* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{R}$*.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Тогда $\tilde{F}_A = F_A$. Так как A — самосопряжённый оператор, то $\mathrm{SD}(A) \subseteq \mathbb{R}$. Тогда: $\ker(\tilde{F}_A) = \ker(F_A) = \mathrm{SD}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Очевидно, существуют объекты e, $H_\mathbb{C}$, f, $A_\mathbb{C}$, удовлетворяющие условиям: e — ортонормированный базис пространства H, $H_\mathbb{C}$ — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\dim(H_\mathbb{C}) = N$, f — ортонормированный базис пространства $H_\mathbb{C}$, $A_\mathbb{C} \in \operatorname{Lin}(H_\mathbb{C}, H_\mathbb{C})$, $[A_\mathbb{C}](f) = [A](e)$.

Очевидно, $\mathrm{D}(\tilde{F}_A)$, $\mathrm{D}(F_{A_\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $[A](e) = [A_\mathbb{C}](f)$, то:

$$\tilde{F}_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k\big([A](e)\big)\lambda^k = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k\big([A_\mathbb{C}](f)\big)\lambda^k = F_{A_\mathbb{C}}(\lambda).$$

Тогда $\tilde{F}_A = F_{A_\mathbb{C}}$.

Так как: A — самосопряжённый оператор, e — ортонормированный базис, то $[A](e)$ — эрмитова матрица. Так как $[A_\mathbb{C}](f) = [A](e)$, то $[A_\mathbb{C}](f)$ — эрмитова матрица. Так как f — ортонормированный базис, то $A_\mathbb{C}$ — самосопряжённый оператор. Тогда $\mathrm{SD}(A_\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$. Так как $\tilde{F}_A = F_{A_\mathbb{C}}$, то: $\ker(\tilde{F}_A) = \ker(F_{A_\mathbb{C}}) = \mathrm{SD}(A_\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$. □

Замечание (существование собственного значения у самосопряжённого оператора). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Тогда: $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{K}$. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, то: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) = N$.

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Так как A — самосопряжённый оператор, то $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{R}$. Тогда: $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{R} = \mathbb{K}$. Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, то: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) = N$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(H, H)$, A — формально самосопряжённый оператор, Q — подпространство пространства H, $A[Q] \subseteq Q$.

Так как: $A \in \mathrm{lin}(H, H)$, Q — подпространство пространства H, то $A|_Q \in \mathrm{lin}(H, H)$. Очевидно: $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A) \subseteq Q$. Так как $A[Q] \subseteq Q$, то: $\mathrm{R}(A|_Q) = A[Q] \subseteq Q$. Итак, $A|_Q \in \mathrm{lin}(Q, Q)$. Пусть $x, y \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Так как A — формально самосопряжённый оператор, то: $(x, A|_Q\, y) = (x, Ay) = (Ax, y) = (A|_Q\, x, y)$. Тогда $A|_Q$ — формально самосопряжённый оператор.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(H, H)$, A — формально самосопряжённый оператор, Q — инвариантное подпространство оператора A. Очевидно: $A|_Q = \mathrm{Lin}(Q, Q)$, $A|_Q$ — самосопряжённый оператор.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Существуют векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, удовлетворяющие условиям:* e *— ортогональный базис пространства* H*,* $e_1, \ldots, e_N$ *— собственные векторы оператора* A*.*

Доказательство. Пусть $r = \overline{1, N}$. **Докажем вспомогательное утверждение.** Существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, существуют векторы $e_1, \ldots, e_r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_r \in H$, $e_1, \ldots, e_r$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_r \neq \theta$, $Ae_k = \lambda_k e_k$ при $k = \overline{1, r}$.

Пусть $r = 1$. Так как: $\dim(H) = N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор, то $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$. Тогда существует число λ_1, существует вектор e_1, удовлетворяющие условиям: $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, $e_1 \in H$, $e_1 \neq \theta$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Следовательно: $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, $e_1 \in H$, e_1 — ортогональная последовательность векторов, $e_1 \neq \theta$, $Ae_1 = \lambda_1 e_1$.

Пусть: $r_0 = \overline{1, N-1}$, вспомогательное утверждение справедливо при $r = r_0$. Пусть $r = r_0 + 1$. Так как вспомогательное утверждение справедливо при $r = r_0$, то существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_0}$, существуют векторы $e_1, \ldots, e_{r_0}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_0} \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_{r_0} \in H$, $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_{r_0} \neq \theta$, $Ae_k = \lambda_k e_k$ при $k = \overline{1, r_0}$.

Обозначим, $H_{r_0} = L(e_1, \ldots, e_{r_0})$. Так как: $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $Ae_k = \lambda_k e_k$ при $k = \overline{1, r_0}$, то H_{r_0} — инвариантное подпространство оператора A. Так как: $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор, то $H_{r_0}^{\perp}$ — инвариантное подпространство оператора A. Так как: $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор, то: $A|_{H_{r_0}^{\perp}} \in \mathrm{Lin}(H_{r_0}^{\perp}, H_{r_0}^{\perp})$, $A|_{H_{r_0}^{\perp}}$ — самосопряжённый оператор.

Так как: $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_{r_0} \neq \theta$, то $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — линейно независимые векторы. Тогда: $\dim(H_{r_0}) = \dim\big(L(e_1, \ldots, e_{r_0})\big) = \mathrm{rank}\big(\{e_1, \ldots, e_{r_0}\}\big) = r_0$. Так как: $\dim(H) = N \neq +\infty$, то $H_{r_0} + H_{r_0}^{\perp} = H$. Очевидно, $H_{r_0} \perp H_{r_0}^{\perp}$. Тогда H_{r_0}, $H_{r_0}^{\perp}$ — линейно независимые подпространства. Так как: $H_{r_0} + H_{r_0}^{\perp} = H$, $\dim(H) = N \neq +\infty$, то:

$$\begin{gathered}
\dim(H_{r_0}) + \dim(H_{r_0}^{\perp}) = \dim(H), \\
\dim(H_{r_0}^{\perp}) = \dim(H) - \dim(H_{r_0}), \\
\dim(H_{r_0}^{\perp}) = N - r_0.
\end{gathered}$$

Так как: $\dim(H_{r_0}^{\perp}) = N - r_0 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, $A|_{H_{r_0}^{\perp}} \in \mathrm{Lin}(H_{r_0}^{\perp}, H_{r_0}^{\perp})$, $A|_{H_{r_0}^{\perp}}$ — самосопряжённый оператор, то $\mathrm{SD}(A|_{H_{r_0}^{\perp}}) \neq \varnothing$. Тогда существует число λ_{r_0+1}, существует вектор e_{r_0+1}, удовлетворяющие условиям: $\lambda_{r_0+1} \in \mathbb{K}$, $e_{r_0+1} \in H_{r_0}^{\perp}$, $e_{r_0+1} \neq \theta$, $A|_{H_{r_0}^{\perp}}(e_{r_0+1}) = \lambda_{r_0+1} e_{r_0+1}$. Следовательно: $\lambda_{r_0+1} \in \mathbb{K}$, $e_{r_0+1} \in H_{r_0}^{\perp}$, $e_{r_0+1} \neq \theta$, $Ae_{r_0+1} = \lambda_{r_0+1} e_{r_0+1}$. Так как $e_{r_0+1} \in H_{r_0}^{\perp}$, то: $e_{r_0+1} \in H$, $e_{r_0+1} \perp H_{r_0}$. Так как $e_1, \ldots, e_{r_0} \in H_{r_0}$, то $e_1, \ldots, e_{r_0} \perp e_{r_0+1}$. Так как $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — ортогональные векторы, то $e_1, \ldots, e_{r_0+1}$ — ортогональные векторы. Итак, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_0+1})$, $(e_1, \ldots, e_{r_0+1})$ — искомые последовательности.

Так как вспомогательное утверждение справедливо при $r = N$, то существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условиям: $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_N \in H$, $e_1, \ldots, e_N$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_N \neq \theta$, $Ae_k = \lambda_k e_k$ при $k = \overline{1, N}$. Так как: $e_1, \ldots, e_N$ — ортогональные векторы, $e_1, \ldots, e_N \neq \theta$, то $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы. Так как: $e_1, \ldots, e_N \in H$, $\dim(H) = N$, то e — базис пространства H. Так как $e_1, \ldots, e_N$ — ортогональные векторы, то e — ортогональный базис пространства H. Так как: $e_1, \ldots, e_N \neq \theta$, $Ae_k = \lambda_k e_k$ при $k = \overline{1, N}$, то $e_1, \ldots, e_N$ — собственные векторы оператора A. □

Теорема (спектральная теорема для линейных самосопряжённых операторов)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$*;* H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(H) = N$*;* $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$*,* A *— самосопряжённый оператор. Тогда:* $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$*,* $\big\{H_A(\lambda)\big\}_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)}$ *— ортогональные подпространства,* $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = H$*.*

Замечание (спектральное разложение линейного самосопряжённого оператора). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$, A — самосопряжённый оператор. Тогда: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\big\{H_A(\lambda)\big\}_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)}$ — ортогональные подпространства, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = H$. Следовательно: $\big\{H_A(\lambda)\big\}_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)}$ — допускают ортогональное проектирование, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} P_{H_A(\lambda)} = I$. Очевидно, существует число $r = \overline{1, N}$, существуют числа

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, удовлетворяющие условию: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все различные собственные значения оператора A. Обозначим: $H_k = H_A(\lambda_k)$, $P_k = P_{H_A(\lambda_k)}$ при $k = \overline{1,r}$.

Пусть $x \in H$. Тогда:

$$Ax = A(Ix) = A\Bigg(\bigg(\sum_{k=\overline{1,r}} P_k\bigg)x\Bigg) = A\bigg(\sum_{k=\overline{1,r}} P_k x\bigg) = \sum_{k=\overline{1,r}} A(P_k x) = \sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k(x) = \\ = \bigg(\sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k\bigg)x.$$

Следовательно, $A = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональные подпространства пространства H, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} H_k = H$. Тогда: $H_1, \ldots, H_r$ допускают ортогональное проектирование, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} P_{H_k} = I$. Обозначим: $P_k = P_{H_k}$ при $k = \overline{1,r}$. Пусть: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, $A = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k$. Тогда $A \in \mathrm{Lin}(H, H)$.

Пусть $n = 0$. Тогда:

$$A^n = I = \sum_{k=\overline{1,r}} P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^n P_k.$$

Пусть $n = 1$. Тогда:

$$A^n = A = \sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^n P_k.$$

Пусть: $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$. Тогда:

$$A^n = \bigg(\sum_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k\bigg)^n = \sum_{k_1,\ldots,k_n=\overline{1,r}} \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_n} P_{k_1} \cdots P_{k_n} = \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^n P_k.$$

Пусть: $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $F(x) = \sum\limits_{j=\overline{0,n}} a_j x^j$ при $x \in \mathbb{K}$; $\hat{F}(B) = \sum\limits_{j=\overline{0,n}} a_j B^j$ при $B \in \mathrm{Lin}(H, H)$. Тогда:

$$\hat{F}(A) = \sum_{j=\overline{0,n}} a_j A^j = \sum_{j=\overline{0,n}} a_j \sum_{k=\overline{1,r}} (\lambda_k)^j P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} \bigg(\sum_{j=\overline{0,n}} a_j (\lambda_k)^j\bigg) P_k = \sum_{k=\overline{1,r}} F(\lambda_k) P_k.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $H_1, \ldots, H_r$ — ортогональные подпространства пространства H, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} H_k = H$. Тогда: $H_1, \ldots, H_r$ допускают ортогональное проектирование, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} P_{H_k} = I$. Обозначим: $P_k = P_{H_k}$ при $k = \overline{1,r}$. Пусть: $F\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathrm{D}(F)$, $A = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} \lambda_k P_k$. Обозначим, $\hat{F}(A) = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} F(\lambda_k) P_k$.

18.2. Эрмитовы полуторалинейные формы в унитарном пространстве

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$; $\mathbb{C}$ **— алгебраически замкнутое поле**, A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве H. **Докажем, что существуют векторы** $e'_1, \ldots, e'_N$**, удовлетворяющие условиям:** e' **— ортонормированный базис пространства** H**,** $[A](e')$ **— диагональная матрица.**

Очевидно, существует единственный оператор $\hat{A}$, удовлетворяющий условиям: $\hat{A} \in \operatorname{Lin}(H, H)$, $A(x, y) = (x, \hat{A}y)$ при x, $y \in H$. Так как A — эрмитова форма, то $\hat{A}$ — самосопряжённый оператор. Пусть e — базис пространства H. Тогда $[A](e) = g(e)[\hat{A}](e)$. Следовательно, $[\hat{A}](e) = g(e)^{-1}[A](e)$. Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e) = \tilde{I}$. Следовательно, $[A](e) = [\hat{A}](e)$.

Так как: $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, $\hat{A}$ — самосопряжённый оператор, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — ортонормированный базис пространства H, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$. Так как $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$, то $[\hat{A}](e')$ — диагональная матрица. Так как e' — ортонормированный базис, то $[A](e') = [\hat{A}](e')$. Тогда $[A](e')$ — диагональная матрица.

- Пусть e — базис пространства H. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда:

$$\tilde{F}_{\hat{A}}(\lambda) = \det\bigl([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\bigr) = \det\Bigl(g(e)^{-1}\bigl([A](e) - \lambda g(e)\bigr)\Bigr) = \frac{\det\bigl([A](e) - \lambda g(e)\bigr)}{\det\bigl(g(e)\bigr)}.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Обозначим, $Q_1 = [\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}$. Тогда $\ker(\hat{A} - \lambda I) = h_e\bigl[\ker(\hat{Q}_1)\bigr]$. Обозначим, $Q_2 = [A](e) - \lambda g(e)$. **Докажем, что** $\ker(\hat{Q}_1) = \ker(\hat{Q}_2)$**.** Пусть $\tilde{x} \in \ker(\hat{Q}_1)$. Тогда:

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ \bigl([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\bigr)\tilde{x} = \tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ g(e)\Bigl(\bigl([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\bigr)\tilde{x}\Bigr) = g(e)\tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ \bigl([A](e) - \lambda g(e)\bigr)\tilde{x} = \tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\tilde{x} \in \ker(\hat{Q}_2).$$

Пусть $\ker(\hat{Q}_2)$. Тогда:

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ \bigl([A](e) - \lambda g(e)\bigr)\tilde{x} = \tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ g(e)^{-1}\Bigl(\bigl([A](e) - \lambda g(e)\bigr)\tilde{x}\Bigr) = g(e)^{-1}\tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ \bigl([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\bigr)\tilde{x} = \tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\tilde{x} \in \ker(\hat{Q}_1). \quad \square$$

Итак, $\ker(A - \lambda I) = h_e\bigl[\ker(\hat{Q}_2)\bigr]$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $\mathbb{C}$ **— алгебраически замкнутое поле**, A, B — эрмитовы полуторалинейные формы в пространстве L, $B > 0$. **Докажем, что существуют векторы** $e'_1, \ldots, e'_N$**, удовлетворяющие условиям:** e' **— базис пространства** L**,** $[A](e')$ **— диагональная матрица,** $[B](e') = \tilde{I}$**.**

Так как: B — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $B > 0$, то B — скалярное произведение в пространстве L. Обозначим, $H = (L, B)$. Тогда H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$. Следовательно, $g = [B]$.

Очевидно, существует единственный оператор $\hat{A}$, удовлетворяющий условиям: $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $A(x, y) = (x, \hat{A}y)$ при x, $y \in H$. Так как A — эрмитова форма, то $\hat{A}$ — самосопряжённый оператор. Пусть e — базис пространства H. Тогда $[A](e) = [B](e)[\hat{A}](e)$. Следовательно, $[\hat{A}](e) = [B](e)^{-1}[A](e)$. Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $[B](e) = \tilde{I}$. Следовательно, $[A](e) = [\hat{A}](e)$.

Так как: $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, $\hat{A}$ — самосопряжённый оператор, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — ортонормированный базис пространства H, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$. Так как $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}$, то $[\hat{A}](e')$ — диагональная матрица. Так как e' — ортонормированный базис, то $[A](e') = [\hat{A}](e')$. Тогда $[A](e')$ — диагональная матрица. Так как e' — ортонормированный базис, то $[B](e') = \tilde{I}$.

- Пусть e — базис пространства H. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда:

$$\tilde{F}_{\hat{A}}(\lambda) = \det\bigl([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\bigr) = \det\Bigl([B](e)^{-1}\bigl([A](e) - \lambda[B](e)\bigr)\Bigr) = \frac{\det\bigl([A](e) - \lambda[B](e)\bigr)}{\det\bigl([B](e)\bigr)}.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Обозначим, $Q_1 = [\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}$. Тогда $Q_1 = [\hat{A} - \lambda I](e)$. Следовательно, $\ker(\hat{A} - \lambda I) = h_e^{-1}\bigl[\ker(\hat{Q}_1)\bigr]$. Обозначим, $Q_2 = [A](e) - \lambda[B](e)$. **Докажем, что** $\ker(\hat{Q}_1) = \ker(\hat{Q}_2)$**.** Пусть $\tilde{x} \in \ker(\hat{Q}_1)$. Тогда:

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ \bigl([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\bigr)\tilde{x} = \tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ [B](e)\Bigl(\bigl([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\bigr)\tilde{x}\Bigr) = [B](e)\tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ \bigl([A](e) - \lambda[B](e)\bigr)\tilde{x} = \tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\tilde{x} \in \ker(\hat{Q}_2).$$

Пусть $\tilde{x} \in \ker(\hat{Q}_2)$. Тогда:

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ \bigl([A](e) - \lambda[B](e)\bigr)\tilde{x} = \tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ [B](e)^{-1}\Bigl(\bigl([A](e) - \lambda[B](e)\bigr)\tilde{x}\Bigr) = [B](e)^{-1}\tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} \in \mathbb{K}^N, \\ \bigl([\hat{A}](e) - \lambda\tilde{I}\bigr)\tilde{x} = \tilde{\theta}; \end{cases}$$

$$\tilde{x} \in \ker(\hat{Q}_1). \quad \square$$

Итак, $\ker(A - \lambda I) = h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q}_2)\big]$.

Лекция 19. Кривые и поверхности второго порядка

19.1. Аффинное пространство

Определение (аффинное пространство). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $F\colon M^2 \implies L$. Далее обычно будем писать «$\overrightarrow{p_1p_2}$» вместо «$F(p_1, p_2)$».

Пусть:
1. $\exists p(p \in M)$;
2. $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_3} = \overrightarrow{p_1p_3}$ при p_1, p_2, $p_3 \in M$;
3. $\forall p_1 \in M \forall x \in L \exists! p_2 \in M(\overrightarrow{p_1p_2} = x)$.

Будем говорить, что: (M, L, F) — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$; M — носитель пространства (M, L, F); L — линейное пространство, ассоциированное с аффинным пространством (M, L, F); F — операция векторизации пространства (M, L, F). Будем говорить, что p — точка пространства (M, L, F), если $p \in M$. Будем говорить, что x — вектор пространства (M, L, F), если $x \in L$. Далее обычно будем отождествлять пространство (M, L, F) и множество M.

Пусть $Q = (M, L, F)$. Обозначим, $\vec{Q} = L$.

Утверждение (простейшие свойства операции векторизации)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* Q *— аффинное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*
1. *Пусть* $p \in Q$*. Тогда* $\overrightarrow{pp} = \theta$*.*
2. *Пусть:* p_1*,* $p_2 \in Q$*,* $\overrightarrow{p_1p_2} = \theta$*. Тогда* $p_1 = p_2$*.*
3. *Пусть* p_1*,* $p_2 \in Q$*. Тогда* $-\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_2p_1}$*.*

Доказательство.
1. Очевидно, $\overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp}$. С другой стороны, $\overrightarrow{pp} + \theta = \overrightarrow{pp}$. Тогда $\overrightarrow{pp} = \theta$.
2. Очевидно, $\overrightarrow{p_1p_1} = \theta$. С другой стороны, $\overrightarrow{p_1p_2} = \theta$. Тогда $p_1 = p_2$.
3. Очевидно, $\overrightarrow{p_1p_2} + (-\overrightarrow{p_1p_2}) = \theta$. С другой стороны: $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_1} = \overrightarrow{p_1p_1} = \theta$. Тогда $-\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_2p_1}$. □

Определение (операция откладывания вектора от точки). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $p_1 \in Q$, $x \in \vec{Q}$. Выберем точку p_2, удовлетворяющую условиям: $p_2 \in Q$, $\overrightarrow{p_1p_2} = x$. Обозначим, $p_1 \oplus x = p_2$. Далее обычно будем писать «$p_1 + x$» вместо «$p_1 \oplus x$».

Пусть: $p_1 \in Q$, $x \in \vec{Q}$. Очевидно: $p_1 \oplus x \in Q$, $\overrightarrow{p_1(p_1 \oplus x)} = x$.

Утверждение (простейшие свойства операции откладывания вектора от точки)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* Q *— аффинное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*
1. *Пусть* p_1*,* $p_2 \in Q$*. Тогда* $p_1 \oplus \overrightarrow{p_1p_2} = p_2$*.*
2. *Пусть:* $p_1 \in Q$*,* x*,* $y \in \vec{Q}$*. Тогда* $(p_1 \oplus x) \oplus y = p_1 \oplus (x + y)$*.*
3. *Пусть* $p \in Q$*. Тогда* $p \oplus \theta = p$*.*

Доказательство.
1. Очевидно, $\overrightarrow{p_1(p_1 \oplus \overrightarrow{p_1p_2})} = \overrightarrow{p_1p_2}$. Тогда $p_1 \oplus \overrightarrow{p_1p_2} = p_2$.
2. Обозначим, $p_2 = p_1 \oplus x$. Тогда: $x = \overrightarrow{p_1(p_1 \oplus x)} = \overrightarrow{p_1p_2}$. Обозначим, $p_3 = p_2 \oplus y$. Тогда: $y = \overrightarrow{p_2(p_2 \oplus y)} = \overrightarrow{p_2p_3}$. Очевидно:

$$p_1 \oplus (x + y) = p_1 \oplus (\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_3}) = p_1 \oplus \overrightarrow{p_1p_3} = p_3 = p_2 \oplus y = (p_1 \oplus x) \oplus y.$$

3. Очевидно: $p \oplus \theta = p \oplus \overrightarrow{pp} = p$. $\square$

Замечание (аффинная система координат в аффинном пространстве). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$.

• Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Обозначим: $h_{O,e}(p) = [\overrightarrow{Op}](e)$ при $p \in Q$. Очевидно: $h_{O,e}$ — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_{O,e}) = Q$, $\mathrm{R}(h_{O,e}) = \mathbb{K}^N$; $h_{O,e}^{-1}(x) = O + x^k e_k$ при $x \in \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что: $h_{O,e}$ — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве Q, соответствующая точке O и базису e; O — начало отсчёта координатной карты $h_{O,e}$; e — базис координатной карты $h_{O,e}$. Пусть $p \in Q$. Будем говорить, что $h_{O,e}(p)$ — столбец координат точки p в координатной карте $h_{O,e}$.

Очевидно:

$$h_{O,e}(O) = [\overrightarrow{OO}](e) = [\theta](e) = \tilde{\theta};$$
$$h_{O,e}(O + e_k) = \big[\overrightarrow{O(O + e_k)}\big](e) = [e_k](e) = \tilde{I}_k, \quad k = \overline{1, N}.$$

Тогда:

$$O = h_{O,e}^{-1}(\tilde{\theta});$$
$$e_k = \overrightarrow{O(O + e_k)} = \overrightarrow{h_{O,e}^{-1}(\tilde{\theta}) h_{O,e}^{-1}(\tilde{I}_k)}, \quad k = \overline{1, N}.$$

• Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q. Пусть $p \in Q$. Тогда:

$$h_{O,e}(p) = [\overrightarrow{Op}](e) = [\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'p}](e) = [\overrightarrow{OO'}](e) + [\overrightarrow{O'p}](e) = [\overrightarrow{OO'}](e) + \alpha(e, e')[\overrightarrow{O'p}](e') =$$
$$= h_{O,e}(O') + \alpha(e, e') h_{O',e'}(p).$$

Очевидно:

$$h_{O',e'}(O) = [\overrightarrow{O'O}](e') = [-\overrightarrow{OO'}](e') = -[\overrightarrow{OO'}](e') = -\alpha(e', e)[\overrightarrow{OO'}](e) = -\alpha(e', e) h_{O,e}(O').$$

Пусть: O, $O' \in Q$, e — базис пространства Q. Пусть $p \in Q$. Тогда:

$$h_{O,e}(p) = h_{O,e}(O') + h_{O',e}(p).$$

Очевидно:

$$h_{O',e}(O) = -h_{O,e}(O').$$

Пусть: $O \in Q$, e, e' — базисы пространства Q. Пусть $p \in Q$. Тогда:

$$h_{O,e}(p) = \alpha(e, e') h_{O,e'}(p).$$

Замечание (матрица $\beta(O, e; O', e')$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$.

Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q. Обозначим:

$$\beta(O, e; O', e') = \begin{pmatrix} \alpha(e, e') & h_{O,e}(O') \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно: $\beta(O, e; O', e') \in \mathbb{K}^{(N+1)\times(N+1)}$, $\det\big(\beta(O, e; O', e')\big) = \det\big(\alpha(e, e')\big) \neq 0$.

• Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Очевидно, $\beta(O,e;O,e) = \tilde{I}_{N+1}$ (здесь $\tilde{I}_{N+1}$ — единичная матрица из множества $\mathbb{K}^{(N+1)\times(N+1)}$).

• Пусть: $O,\ O',\ O'' \in Q$, $e,\ e',\ e''$ — базисы пространства Q. **Докажем, что $\beta(O,e;O',e')\beta(O',e';O'',e'') = \beta(O,e;O'',e'')$.**

Пусть $k,\ k'' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\big(\beta(O,e;O',e')\beta(O',e';O'',e'')\big)^{k}_{k''} = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^{k}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{k''}(O',e';O'',e'') =$$

$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^{k}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{k''}(O',e';O'',e'') + \beta^{k}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{k''}(O',e';O'',e'') =$$

$$= \alpha^{k}_{k'}(e,e')\alpha^{k'}_{k''}(e',e'') = \alpha^{k}_{k''}(e,e'') = \beta^{k}_{k''}(O,e;O'',e'').$$

Пусть $k'' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\big(\beta(O,e;O',e')\beta(O',e';O'',e'')\big)^{N+1}_{k''} = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{k''}(O',e';O'',e'') =$$

$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{k''}(O',e';O'',e'') + \beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{k''}(O',e';O'',e'') = 0 =$$

$$= \beta^{N+1}_{k''}(O,e;O'',e'').$$

Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\big(\beta(O,e;O',e')\beta(O',e';O'',e'')\big)^{k}_{N+1} = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^{k}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{N+1}(O',e';O'',e'') =$$

$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^{k}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{N+1}(O',e';O'',e'') + \beta^{k}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O',e';O'',e'') =$$

$$= \alpha^{k}_{k'}(e,e')h^{k'}_{O',e'}(O'') + h^{k}_{O,e}(O') = h^{k}_{O,e}(O'') = \beta^{k}_{N+1}(O,e;O'',e'').$$

Очевидно:

$$\big(\beta(O,e;O',e')\beta(O',e';O'',e'')\big)^{N+1}_{N+1} = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{N+1}(O',e';O'',e'') =$$

$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{k'}_{N+1}(O',e';O'',e'') + \beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O',e';O'',e'') = 1 =$$

$$= \beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O'',e'').$$

• Пусть: $O,\ O' \in Q$, $e,\ e'$ — базисы пространства Q. Тогда: $\beta(O,e;O',e')\beta(O',e';O,e) = \beta(O,e;O,e) = \tilde{I}_{N+1}$. Следовательно, $\beta(O,e;O',e')^{-1} = \beta(O',e';O,e)$.

Замечание (функция $\psi_{O,e}$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$.

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Обозначим:

$$\psi_{O,e}(p) = \begin{pmatrix} h_{O,e}(p) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p \in Q.$$

Очевидно: $\psi_{O,e}$ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\psi_{O,e}) = Q$, $\mathrm{R}(\psi_{O,e}) = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N+1} \wedge x^{N+1} = 1\}$; $\psi^{-1}_{O,e}(x) = O + \sum\limits_{k=\overline{1,N}} x^k e_k$ при: $x \in \mathbb{K}^{N+1}$, $x^{N+1} = 1$.

• Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q. Пусть $p \in Q$. **Докажем, что** $\psi_{O,e}(p) = \beta(O, e; O', e')\psi_{O',e'}(p)$**.**

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\beta(O, e; O', e')\psi_{O',e'}(p)\big)^k = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^k_{k'}(O, e; O', e')\psi^{k'}_{O',e'}(p) =$$
$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^k_{k'}(O, e; O', e')\psi^{k'}_{O',e'}(p) + \beta^k_{N+1}(O, e; O', e')\psi^{N+1}_{O',e'}(p) =$$
$$= \alpha^k_{k'}(e, e')h^{k'}_{O',e'}(p) + h^k_{O,e}(O') = h^k_{O,e}(p) = \psi^k_{O,e}(p).$$

Очевидно:

$$\big(\beta(O, e; O', e')\psi_{O',e'}(p)\big)^{N+1} = \sum_{k'=\overline{1,N+1}} \beta^{N+1}_{k'}(O, e; O', e')\psi^{k'}_{O',e'}(p) =$$
$$= \sum_{k'=\overline{1,N}} \beta^{N+1}_{k'}(O, e; O', e')\psi^{k'}_{O',e'}(p) + \beta^{N+1}_{N+1}(O, e; O', e')\psi^{N+1}_{O',e'}(p) = 1 = \psi^{N+1}_{O,e}(p).$$

19.2. Полином степени не выше 2 в аффинном пространстве

Определение. Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$. Будем говорить, что F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) = Q$, существуют объекты O, e, A, B, C, удовлетворяющие условиям: $O \in Q$, e — базис пространства Q, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A — симметричная матрица, $B \in \mathbb{R}^{1\times N}$, $C \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = A_{k,m}h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p) + 2B_m h^m_{O,e}(p) + C, \quad p \in Q.$$

Определение. Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q.

1. Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Будем говорить, что A, B, C — коэффициенты первого рода полинома F в координатной карте $h_{O,e}$, если: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A — симметричная матрица, $B \in \mathbb{R}^{1\times N}$, $C \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = A_{k,m}h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p) + 2B_m h^m_{O,e}(p) + C, \quad p \in Q.$$

2. Будем говорить, что $\big\{A(O, e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O, e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O, e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F, если для любой точки $O \in Q$ и для любого базиса e пространства Q справедливо утверждение: $A(O, e)$, $B(O, e)$, $C(O, e)$ — коэффициенты первого рода полинома F в координатной карте $h_{O,e}$.

3. Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Будем говорить, что D — коэффициенты второго рода полинома F в координатной карте $h_{O,e}$, если: $D \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, D — симметричная матрица,

$$F(p) = \sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}\psi^k_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p), \quad p \in Q.$$

4. Будем говорить, что $\big\{D(O, e)\big\}_{O,e}$ — семейство коэффициентов второго рода полинома F, если для любой точки $O \in Q$ и для любого базиса e пространства Q, справедливо утверждение: $D(O, e)$ — коэффициенты второго рода полинома F в координатной карте $h_{O,e}$.

5. Пусть $O \in Q$. Будем говорить, что A, B, C — коэффициенты третьего рода полинома F относительно точки O, если: A — симметричная билинейная форма в пространстве $\vec{Q}$, B — линейная форма в пространстве $\vec{Q}$, $C \in \mathbb{R}$,

$$F(p) = A(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}) + 2B(\overrightarrow{Op}) + C, \quad p \in Q.$$

6. Будем говорить, что $\{A_O\}_{O\in Q}$, $\{B_O\}_{O\in Q}$, $\{C_O\}_{O\in Q}$ — семейства коэффициентов третьего рода полинома F, если для любой точки $O \in Q$ справедливо утверждение: A_O, B_O, C_O — коэффициенты третьего рода полинома F относительно точки O.

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$; A_1, A_2 — симметричные билинейные формы в пространстве L, B_1, B_2 — линейные формы в пространстве L, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$,*

$$A_1(x, x) + 2B_1(x) + C_1 = A_2(x, x) + 2B_2(x) + C_2, \quad x \in L.$$

Тогда: $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$.

Доказательство. Пусть: $t \in \mathbb{R}$, $x \in L$. Тогда:

$$A_1(tx, tx) + 2B_1(tx) + C_1 = A_2(tx, tx) + 2B_2(tx) + C_2,$$
$$A_1(x, x)t^2 + 2B_1(x)t + C_1 = A_2(x, x)t^2 + 2B_2(x)t + C_2.$$

В силу произвольности выбора числа $t \in \mathbb{R}$ получаем, что: $A_1(x, x) = A_2(x, x)$, $B_1(x) = B_2(x)$, $C_1 = C_2$. В силу произвольности выбора вектора $x \in L$ получаем, что: $A_1(x, x) = A_2(x, x)$ при $x \in L$; $B_1(x) = B_2(x)$ при $x \in L$; $C_1 = C_2$.

Так как: $A_1(x, x) = A_2(x, x)$ при $x \in L$; A_1, A_2 — симметричные билинейные формы, то: $A_1(x, y) = A_2(x, y)$ при x, $y \in L$. Тогда $A_1 = A_2$.

Так как: $B_1(x) = B_2(x)$ при $x \in L$, то $B_1 = B_2$. □

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$; $O \in Q$, A_1, A_2 — симметричные билинейные формы в пространстве $\vec{Q}$, B_1, B_2 — линейные формы в пространстве $\vec{Q}$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$,*

$$A_1(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}) + 2B_1(\overrightarrow{Op}) + C_1 = A_2(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}) + 2B_2(\overrightarrow{Op}) + C_2, \quad p \in Q.$$

Тогда: $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$.

Замечание (выражение $A(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}) + 2B(\overrightarrow{Op}) + C$). Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; $O \in Q$, e — базис пространства Q.

• Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — симметричная матрица, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{1\times N}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}$, $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in \vec{Q}$; $B(x) = \tilde{B}_m[x]^m(e)$ при $x \in \vec{Q}$; $C = \tilde{C}$. Очевидно: A — симметричная билинейная форма в пространстве $\vec{Q}$, B — линейная форма в пространстве $\vec{Q}$, $C \in \mathbb{R}$, $\tilde{A} = [A](e)$, $\tilde{B} = [B](e)$, $\tilde{C} = C$. Пусть $p \in Q$. Тогда:

$$A(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}) + 2B(\overrightarrow{Op}) + C = \tilde{A}_{k,m}[\overrightarrow{Op}]^k(e)[\overrightarrow{Op}]^m(e) + 2\tilde{B}_m[\overrightarrow{Op}]^m(e) + \tilde{C} =$$
$$= \tilde{A}_{k,m}h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p) + 2\tilde{B}_m h^m_{O,e}(p) + \tilde{C}.$$

• Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве $\vec{Q}$, B — линейная форма в пространстве $\vec{Q}$, $C \in \mathbb{R}$, $\tilde{A} = [A](e)$, $\tilde{B} = [B](e)$, $\tilde{C} = C$. Очевидно: $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — симметричная матрица, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{1\times N}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}$, $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in \vec{Q}$; $B(x) = \tilde{B}_m[x]^m(e)$ при $x \in \vec{Q}$; $C = \tilde{C}$.

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; $O \in Q$, e — базис пространства Q, A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A_1, A_2 — симметричные матрицы, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}^{1\times N}$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$,*

$$(A_1)_{k,m}h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p) + 2(B_1)_m h^m_{O,e}(p) + C_1 = (A_2)_{k,m}h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p) + 2(B_2)_m h^m_{O,e}(p) + C_2,$$
$$p \in Q.$$

Тогда: $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$.

Замечание (выражение $\sum\limits_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}\psi^k_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p)$). Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; $O \in Q$, e — базис пространства Q.

- Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A — симметричная матрица, $B \in \mathbb{R}^{1\times N}$, $C \in \mathbb{R}$,

$$D = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Очевидно: $D \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, D — симметричная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} D_{1,1} & \cdot & D_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{N,1} & \cdot & D_{N,N} \end{pmatrix},$$
$$B = (D_{N+1,1} \cdots D_{N+1,N}),$$
$$C = D_{N+1,N+1}.$$

Пусть $p \in Q$. Тогда:

$$\sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}\psi^k_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} D_{k,m}\psi^k_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p) + \sum_{m=\overline{1,N}} D_{N+1,m}\psi^{N+1}_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p) +$$
$$+ \sum_{k=\overline{1,N}} D_{k,N+1}\psi^k_{O,e}(p)\psi^{N+1}_{O,e}(p) + D_{N+1,N+1}\psi^{N+1}_{O,e}(p)\psi^{N+1}_{O,e}(p) =$$
$$= A_{k,m}h^k_{O,e}(p)h^m_{O,e}(p) + 2B_m h^m_{O,e}(p) + C.$$

- Пусть: $D \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, D — симметричная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} D_{1,1} & \cdot & D_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{N,1} & \cdot & D_{N,N} \end{pmatrix},$$
$$B = (D_{N+1,1} \cdots D_{N+1,N}),$$
$$C = D_{N+1,N+1}.$$

Очевидно: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, A — симметричная матрица, $B \in \mathbb{R}^{1\times N}$, $C \in \mathbb{R}$,

$$D = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; $O \in Q$, e — базис пространства Q, D_1, $D_2 \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, D_1, D_2 — симметричные матрицы,*

$$(D_1)_{k,m}\psi^k_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p) = (D_2)_{k,m}\psi^k_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p), \quad p \in Q.$$

Тогда $D_1 = D_2$.

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q.*

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q, D_1 — коэффициенты второго рода полинома F в координатной карте $h_{O,e}$.

Пусть: $O' \in Q$, e' — базис пространства Q,

$$(D_2)_{k',m'} = (D_1)_{k,m}\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e'), \quad k',\, m' = \overline{1, N+1}.$$

Тогда D_2 — коэффициенты второго рода полинома F в координатной карте $h_{O',e'}$.

Доказательство. Очевидно: $D_2 \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$, D_2 — симметричная матрица. Пусть $p \in Q$. Тогда:

$$\begin{aligned} F(p) = (D_1)_{k,m}\psi^k_{O,e}(p)\psi^m_{O,e}(p) = (D_1)_{k,m}\big(\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\psi^{k'}_{O',e'}(p)\big)\big(\beta^m_{m'}(O,e;O',e')\psi^{m'}_{O',e'}(p)\big) = \\ = \big((D_1)_{k,m}\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e')\big)\psi^{k'}_{O',e'}(p)\psi^{m'}_{O',e'}(p) = (D_2)_{k',m'}\psi^{k'}_{O',e'}(p)\psi^{m'}_{O',e'}(p). \end{aligned}$$

Итак, D_2 — коэффициенты второго рода полинома F в координатной карте $h_{O',e'}$. □

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q.*

1. Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Существует объект D, удовлетворяющий условию: D — коэффициенты второго рода полинома F в координатной карте $h_{O,e}$.

2. Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q. Существуют объекты A, B, C, удовлетворяющие условию: A, B, C — коэффициенты первого рода полинома F в координатной карте $h_{O,e}$.

3. Пусть $O \in Q$. Существуют объекты A, B, C, удовлетворяющие условию: A, B, C — коэффициенты третьего рода полинома F относительно точки O.

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F, $O \in Q$, e — базис пространства Q.*

1. Справедливо утверждение:

$$D(O,e) = \begin{pmatrix} A(O,e) & B(O,e)^T \\ B(O,e) & C(O,e) \end{pmatrix}.$$

2. Справедливы утверждения: $A(O,e) = [A_O](e)$, $B(O,e) = [B_O](e)$, $C(O,e) = C_O$.

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F.*

Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q. Тогда:

$$D_{k',m'}(O',e') = D_{k,m}(O,e)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e'), \quad k',\, m' = \overline{1, N+1}.$$

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F.*

Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — базисы пространства Q. Тогда:

$$A_{k',m'}(O',e') = A_{k,m}(O,e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e'), \quad k',\, m' = \overline{1,N};$$
$$B_{m'}(O',e') = \big(A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(O') + B_m(O,e)\big)\alpha^m_{m'}(e,e'), \quad m' = \overline{1,N};$$
$$C(O',e') = A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(O')h^m_{O,e}(O') + 2B_m(O,e)h^m_{O,e}(O') + C(O,e).$$

Доказательство. Пусть k', $m' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
A_{k',m'}(O',e') = D_{k',m'}(O',e') = \\
= \sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}(O,e)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e') = \\
= \sum_{k,m=\overline{1,N}} D_{k,m}(O,e)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{m=\overline{1,N}} D_{N+1,m}(O,e)\beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{k=\overline{1,N}} D_{k,N+1}(O,e)\beta^k_{k'}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ D_{N+1,N+1}(O,e)\beta^{N+1}_{k'}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e') = \\
= A_{k,m}(O,e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e').
\end{gathered}$$

Пусть $m' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
B_{m'}(O',e') = D_{N+1,m'}(O',e') = \\
= \sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}(O,e)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e') = \\
= \sum_{k,m=\overline{1,N}} D_{k,m}(O,e)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{m=\overline{1,N}} D_{N+1,m}(O,e)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{k=\overline{1,N}} D_{k,N+1}(O,e)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e') + \\
+ D_{N+1,N+1}(O,e)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{m'}(O,e;O',e') = \\
= \big(A_{k,m}(O,e)h^k_{O,e}(O') + B_m(O,e)\big)\alpha^m_{m'}(e,e').
\end{gathered}$$

Очевидно:

$$\begin{gathered}
C(O',e') = D_{N+1,N+1}(O',e') = \\
= \sum_{k,m=\overline{1,N+1}} D_{k,m}(O,e)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{N+1}(O,e;O',e') = \\
= \sum_{k,m=\overline{1,N}} D_{k,m}(O,e)\beta^k_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{N+1}(O,e;O',e') + \\
+ \sum_{m=\overline{1,N}} D_{N+1,m}(O,e)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^m_{N+1}(O,e;O',e') +
\end{gathered}$$

$$+\sum_{k=\overline{1,N}} D_{k,N+1}(O,e)\beta^{k}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')+$$
$$+D_{N+1,N+1}(O,e)\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')\beta^{N+1}_{N+1}(O,e;O',e')=$$
$$=A_{k,m}(O,e)h^{k}_{O,e}(O')h^{m}_{O,e}(O')+2B_m(O,e)h^{m}_{O,e}(O')+C(O,e). \quad \square$$

Замечание. Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q)=N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\{A(O,e)\}_{O,e}$, $\{B(O,e)\}_{O,e}$, $\{C(O,e)\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F.

Пусть: O, $O' \in Q$, e — базис пространства Q. Тогда:

$$A(O',e)=A(O,e);$$
$$B_m(O',e)=A_{k,m}(O,e)h^{k}_{O,e}(O')+B_m(O,e), \quad m=\overline{1,N};$$
$$C(O',e)=A_{k,m}(O,e)h^{k}_{O,e}(O')h^{m}_{O,e}(O')+2B_m(O,e)h^{m}_{O,e}(O')+C(O,e).$$

Пусть: $O \in Q$, e, e' — базисы пространства Q. Тогда:

$$A_{k',m'}(O,e')=A_{k,m}(O,e)\alpha^{k}_{k'}(e,e')\alpha^{m}_{m'}(e,e'), \quad k',\, m'=\overline{1,N};$$
$$B_{m'}(O,e')=B_m(O,e)\alpha^{m}_{m'}(e,e'), \quad m'=\overline{1,N};$$
$$C(O,e')=C(O,e).$$

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q)=N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\{A(O,e)\}_{O,e}$, $\{B(O,e)\}_{O,e}$, $\{C(O,e)\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F.*

Пусть O, $O' \in Q$. Тогда:

$$A_{O'}=A_O;$$
$$B_{O'}(x)=A_O(\overrightarrow{OO'},x)+B_O(x), \quad x\in\vec{Q};$$
$$C_{O'}=A_O(\overrightarrow{OO'},\overrightarrow{OO'})+2B_O(\overrightarrow{OO'})+C_O.$$

Определение (классификация полиномов). Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q)=N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\{A(O,e)\}_{O,e}$, $\{B(O,e)\}_{O,e}$, $\{C(O,e)\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F.

1. Будем говорить, что F — полином степени 2, если: $A(O,e)\neq\tilde{\Theta}$ при: $O\in Q$, e — базис пространства Q.
2. Будем говорить, что F — эллиптический полином, если: $\det\bigl(A(O,e)\bigr)>0$ при: $O\in Q$, e — базис пространства Q.
3. Будем говорить, что F — гиперболический полином, если: $\det\bigl(A(O,e)\bigr)<0$ при: $O\in Q$, e — базис пространства Q.
4. Будем говорить, что F — параболический полином, если: $A(O,e)\neq\tilde{\Theta}$, $\det\bigl(A(O,e)\bigr)=0$ при: $O\in Q$, e — базис пространства Q.

Замечание. Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q)=N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\{A(O,e)\}_{O,e}$, $\{B(O,e)\}_{O,e}$, $\{C(O,e)\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F, $O\in Q$.

Очевидно, существует единственный оператор $\hat{A}_O$, удовлетворяющий условиям: $\hat{A}_O \in \operatorname{Lin}(\vec{Q},\vec{Q})$, $A_O(x,y)=(x,\hat{A}_O y)$ при x, $y\in\vec{Q}$. Так как A_O — симметричная билинейная форма, то $\hat{A}_O$ — самосопряжённый оператор.

Очевидно, существует единственный вектор $\vec{B}_O$, удовлетворяющий условиям: $\vec{B}_O \in \vec{Q}$, $B_O(x) = (\vec{B}_O, x)$ при $x \in \vec{Q}$.

Пусть $p \in Q$. Тогда:

$$F(p) = A_O(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Op}) + 2B_O(\overrightarrow{Op}) + C_O = (\overrightarrow{Op}, \hat{A}_O\overrightarrow{Op}) + 2(\vec{B}_O, \overrightarrow{Op}) + C_O.$$

Замечание. Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F, $O \in Q$, e — базис пространства $\vec{Q}$.

Очевидно:

$$A(O,e) = [A_O](e) = g(e)[\hat{A}_O](e);$$
$$[\hat{A}_O](e) = g(e)^{-1}[A_O](e) = g(e)^{-1}A(O,e).$$

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e) = \tilde{I}$. Следовательно:

$$A(O,e) = [A_O](e) = [\hat{A}_O](e).$$

Очевидно:

$$B(O,e) = [B_O](e) = \big(g(e)[\vec{B}_O](e)\big)^T;$$
$$[\vec{B}_O](e) = \big([B_O](e)g(e)^{-1}\big)^T = \big(B(O,e)g(e)^{-1}\big)^T.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e) = \tilde{I}$. Следовательно:

$$B(O,e) = [B_O](e) = [\vec{B}_O](e)^T;$$
$$[\vec{B}_O](e) = [B_O](e)^T = B(O,e)^T.$$

Замечание. Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F.

Пусть O, $O' \in Q$. Тогда:

$$\hat{A}_{O'} = \hat{A}_O;$$
$$\vec{B}_{O'} = \hat{A}_O\overrightarrow{OO'} + \vec{B}_O;$$
$$C_{O'} = (\overrightarrow{OO'}, \hat{A}_O\overrightarrow{OO'}) + 2(\vec{B}_O, \overrightarrow{OO'}) + C_O.$$

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F.*

Пусть: $O \in Q$, e — базис пространства Q, $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\det(\gamma) \neq 0$. Существует единственный набор объектов O', e', удовлетворяющий условиям: $O' \in Q$, e' — базис пространства Q, $h_{O',e'}(O) = \xi$, $\alpha(e', e) = \gamma$.

Доказательство. Пусть: $O' \in Q$, e' — базис пространства Q, $h_{O',e'}(O) = \xi$, $\alpha(e',e) = \gamma$. Очевидно: $\alpha(e,e') = \alpha(e',e)^{-1} = \gamma^{-1}$. Тогда: $e'_{k'} = (\gamma^{-1})^k_{k'} e_k$ при $k' = \overline{1,N}$. Очевидно: $h_{O,e}(O') = -\alpha(e,e') h_{O',e'}(O) = -\gamma^{-1}\xi$. Тогда $O' = O + (-\gamma^{-1}\xi)^k e_k$.

Пусть: $O' \in Q$, e' — базис пространства Q, $h_{O',e'}(O) = \xi$, $\alpha(e',e) = \gamma$, $O'' \in Q$, e'' — базис пространства Q, $h_{O'',e''}(O) = \xi$, $\alpha(e'',e) = \gamma$. Тогда: $O' = O + (-\gamma^{-1}\xi)^k e_k$, $e'_{k'} = (\gamma^{-1})^k_{k'} e_k$ при $k' = \overline{1,N}$; $O'' = O + (-\gamma^{-1}\xi)^k e_k$, $e''_{k''} = (\gamma^{-1})^k_{k''} e_k$ при $k'' = \overline{1,N}$. Следовательно: $O' = O''$, $e' = e''$.

Пусть: $O' = O + (-\gamma^{-1}\xi)^k e_k$, $e'_{k'} = (\gamma^{-1})^k_{k'} e_k$ при $k' = \overline{1,N}$. Так как $\det(\gamma^{-1}) \neq 0$, то: e' — базис пространства Q, $\alpha(e,e') = \gamma^{-1}$. Тогда: $\alpha(e',e) = \alpha(e,e')^{-1} = (\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$. Очевидно: $O' \in Q$, $h_{O,e}(O') = -\gamma^{-1}\xi$. Тогда:

$$h_{O',e'}(O) = -\alpha(e',e) h_{O,e}(O') = -\gamma(-\gamma^{-1}\xi) = \xi. \quad \square$$

Замечание (приведение коэффициентов первого рода к каноническому виду). Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F.

• Пусть $O' \in Q$. Так как: $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, $\hat{A}_{O'}$ — самосопряжённый оператор, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — ортонормированный базис пространства Q, $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}_{O'}$. Так как $e'_1, \ldots, e'_N$ — собственные векторы оператора $\hat{A}_{O'}$, то $[\hat{A}_{O'}](e')$ — диагональная матрица. Так как e' — ортонормированный базис, то $A(O',e') = [\hat{A}_{O'}](e')$. Тогда $A(O',e')$ — диагональная матрица.

• **Пусть** F **— полином степени 2 в пространстве** Q**.** Тогда $A(O',e') \neq \tilde{\Theta}$. Так как $A(O',e')$ — симметричная матрица, то $\exists k = \overline{1,N}\big(A_{k,k}(O',e') \neq 0\big)$. Без ограничения общности можно считать, что существует число r, удовлетворяющее условиям: $r = \overline{1,N}$, $A_{k,k}(O',e') \neq 0$ при $k = \overline{1,r}$; $A_{k,k}(O',e') = 0$ при $k = \overline{r+1,N}$.

Пусть $\forall k = \overline{r+1,N}\big(B_k(O',e') = 0\big)$. Пусть: $\tilde{A} = A(O',e')$, $\tilde{B} = B(O',e')$, $\tilde{C} = C(O',e')$. Пусть: $p \in Q$, $\tilde{x} = h_{O',e'}(p)$. Тогда:

$$F(p) = \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m + 2\tilde{B}_m\tilde{x}^m + C = \sum_{k=1}^{r} \tilde{A}_{k,k}(\tilde{x}^k)^2 + \sum_{k=1}^{r} 2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C} =$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \tilde{A}_{k,k}\left(\tilde{x}^k + \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}\right)^2 + \tilde{C} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}}.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A};$$
$$\tilde{\tilde{B}}_k = 0, \quad k = \overline{1,r};$$
$$\tilde{\tilde{B}}_k = \tilde{B}_k, \quad k = \overline{r+1,N};$$
$$\tilde{\tilde{C}} = \tilde{C} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}}.$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, $\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \neq 0$ при $k = \overline{1,r}$; $\tilde{\tilde{A}}_{k,k} = 0$ при $k = \overline{r+1,N}$; $\tilde{\tilde{B}} \in \mathbb{R}^{1\times N}$, $\tilde{\tilde{B}}_k = 0$ при $k = \overline{1,N}$; $\tilde{\tilde{C}} \in \mathbb{R}$. Обозначим:

$$\xi^k = \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}, \quad k = \overline{1,r};$$

$$\xi^k = 0, \quad k = \overline{r+1, N}.$$

Тогда $\xi \in \mathbb{R}^N$. Обозначим, $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \xi$. Тогда $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^N$. Очевидно:

$$F(p) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\tilde{\tilde{x}}^k\tilde{\tilde{x}}^m + 2\tilde{\tilde{B}}_k\tilde{\tilde{x}}^k + \tilde{\tilde{C}}.$$

Так как $\det(\tilde{I}) = 1 \neq 0$, то существует единственный набор объектов O'', e'', удовлетворяющий условиям: $O'' \in Q$, e'' — базис пространства Q, $h_{O'',e''}(O') = \xi$, $\alpha(e'', e') = \tilde{I}$. Тогда: $h_{O'',e''}(p) = h_{O'',e''}(O') + \alpha(e'', e')h_{O',e'}(p) = \xi + \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Следовательно:

$$F(p) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}h^k_{O'',e''}(p)h^m_{O'',e''}(p) + 2\tilde{\tilde{B}}_k h^k_{O'',e''}(p) + \tilde{\tilde{C}}.$$

В силу произвольности выбора точки $p \in Q$ получаем, что:

$$F(p) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}h^k_{O'',e''}(p)h^m_{O'',e''}(p) + 2\tilde{\tilde{B}}_k h^k_{O'',e''}(p) + \tilde{\tilde{C}}, \quad p \in Q.$$

Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, то: $A(O'', e'') = \tilde{\tilde{A}}$, $B(O'', e'') = \tilde{\tilde{B}}$, $C(O'', e'') = \tilde{\tilde{C}}$. Тогда: $r = \overline{1, N}$, $A(O'', e'')$ — диагональная матрица, $A_{k,k}(O'', e'') \neq 0$ при $k = \overline{1, r}$; $A_{k,k}(O'', e'') = 0$ при $k = \overline{r+1, N}$; $B_k(O'', e'') = 0$ при $k = \overline{1, N}$.

Пусть $\exists k = \overline{r+1, N}\big(B_k(O', e') \neq 0\big)$. Тогда: $r = \overline{1, N-1}$, $\exists k = \overline{r+1, N}\big(B_k(O', e') \neq 0\big)$. Без ограничения общности можно считать, что: $r = \overline{1, N-1}$, $B_{r+1}(O', e') \neq 0$. Пусть: $\tilde{A} = A(O', e')$, $\tilde{B} = B(O', e')$, $\tilde{C} = C(O', e')$. Пусть: $p \in Q$, $\tilde{x} = h_{O',e'}(p)$. Тогда:

$$\begin{aligned}
F(p) = \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m + 2\tilde{B}_m\tilde{x}^m + C = \sum_{k=1}^{r}\tilde{A}_{k,k}(\tilde{x}^k)^2 + \sum_{k=1}^{N}2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C} = \\
= \sum_{k=1}^{r}\tilde{A}_{k,k}\left(\tilde{x}^k + \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}\right)^2 + \sum_{k=r+1}^{N}2\tilde{B}_k\tilde{x}^k + \tilde{C} - \sum_{k=1}^{r}\frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}} = \\
= \sum_{k=1}^{r}\tilde{A}_{k,k}\left(\tilde{x}^k + \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}\right)^2 + 2\tilde{B}_{r+1}\left(\tilde{x}^{r+1} + \frac{1}{2\tilde{B}_{r+1}}\left(\tilde{C} - \sum_{k=1}^{r}\frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}}\right)\right) + \sum_{k=r+2}^{N}2\tilde{B}_k\tilde{x}^k.
\end{aligned}$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A};$$

$$\tilde{\tilde{B}}_k = 0, \quad k = \overline{1, r};$$

$$\tilde{\tilde{B}}_k = \tilde{B}_k, \quad k = \overline{r+1, N};$$

$$\tilde{\tilde{C}} = 0.$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, $\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \neq 0$ при $k = \overline{1, r}$; $\tilde{\tilde{A}}_{k,k} = 0$ при $k = \overline{r+1, N}$; $\tilde{\tilde{B}} \in \mathbb{R}^{1\times N}$, $\tilde{\tilde{B}}_k = 0$ при $k = \overline{1, r}$; $\tilde{\tilde{B}}_{r+1} \neq 0$, $\tilde{\tilde{C}} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\tilde{C}} = 0$. Обозначим:

$$\xi^k = \frac{\tilde{B}_k}{\tilde{A}_{k,k}}, \quad k = \overline{1, r};$$

$$\xi^{r+1} = \frac{1}{2\tilde{B}_{r+1}}\left(\tilde{C} - \sum_{k=1}^{r}\frac{\tilde{B}_k^2}{\tilde{A}_{k,k}}\right),$$

$$\xi^k = 0, \quad k = \overline{r+2, N}.$$

Тогда $\xi \in \mathbb{R}^N$. Обозначим, $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \xi$. Тогда $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^N$. Очевидно:

$$F(p) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\tilde{\tilde{x}}^k\tilde{\tilde{x}}^m + 2\tilde{\tilde{B}}_k\tilde{\tilde{x}}^k + \tilde{\tilde{C}}.$$

Так как $\det(\tilde{I}) = 1 \neq 0$, то существует единственный набор объектов O'', e'', удовлетворяющий условиям: $O'' \in Q$, e'' — базис пространства Q, $h_{O'',e''}(O') = \xi$, $\alpha(e'', e') = \tilde{I}$. Тогда: $h_{O'',e''}(p) = h_{O'',e''}(O') + \alpha(e'', e')h_{O',e'}(p) = \xi + \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Следовательно:

$$F(p) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}h^k_{O'',e''}(p)h^m_{O'',e''}(p) + 2\tilde{\tilde{B}}_k h^k_{O'',e''}(p) + \tilde{\tilde{C}}.$$

В силу произвольности выбора точки $p \in Q$ получаем, что:

$$F(p) = \tilde{\tilde{A}}_{k,m}h^k_{O'',e''}(p)h^m_{O'',e''}(p) + 2\tilde{\tilde{B}}_k h^k_{O'',e''}(p) + \tilde{\tilde{C}}, \quad p \in Q.$$

Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, то: $A(O'', e'') = \tilde{\tilde{A}}$, $B(O'', e'') = \tilde{\tilde{B}}$, $C(O'', e'') = \tilde{\tilde{C}}$. Тогда: $r = \overline{1, N-1}$, $A(O'', e'')$ — диагональная матрица, $A_{k,k}(O'', e'') \neq 0$ при $k = \overline{1, r}$; $A_{k,k}(O'', e'') = 0$ при $k = \overline{r+1, N}$; $B_k(O'', e'') = 0$ при $k = \overline{1, r}$; $B_{r+1}(O'', e'') \neq 0$, $C(O'', e'') = 0$.

Замечание (инварианты полинома). Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O, e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O, e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O, e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F, $O \in Q$, e — ортонормированный базис пространства Q.

Обозначим:

$$I_k(O, e) = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big(A(O, e)\big), \quad k = \overline{1, N};$$
$$I_{N+1}(O, e) = \det\big(D(O, e)\big).$$

Очевидно:

$$I_1(O, e) = (-1)^{N-1}\alpha_{N-1}\big(A(O, e)\big) = (-1)^{N-1}(-1)^{N-1}\operatorname{tr}\big(A(O, e)\big) = \operatorname{tr}\big(A(O, e)\big),$$
$$I_N(O, e) = (-1)^0\alpha_0\big(A(O, e)\big) = \det\big(A(O, e)\big).$$

Утверждение. *Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N$; F — полином степени не выше 2 в пространстве Q, $\big\{A(O, e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O, e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O, e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F.*

Пусть: O, $O' \in Q$, e, e' — ортонормированные базисы пространства Q. Тогда: $I_k(O', e') = I_k(O, e)$ при $k = \overline{1, N+1}$.

Доказательство. Пусть $k = \overline{1, N}$. Так как e, e' — ортонормированные базисы, то: $A(O, e) = [\hat{A}_O](e)$, $A(O', e') = [\hat{A}_{O'}](e')$. Тогда:

$$I_k(O', e') = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big(A(O', e')\big) = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big([\hat{A}_{O'}](e')\big) = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big([\hat{A}_O](e')\big) =$$
$$= (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big([\hat{A}_O](e)\big) = (-1)^{N-k}\alpha_{N-k}\big(A(O, e)\big) = I_k(O, e).$$

Так как e, e' — ортонормированные базисы, то $\alpha(e, e')$ — ортогональная матрица. Тогда: $\det\big(\alpha(e, e')\big) \neq 0$, $\alpha(e, e')^{-1} = \alpha(e, e')^T$. Следовательно:

$$I_{N+1}(O', e') = \det\big(D(O', e')\big) = \det\big(\beta(O, e; O', e')^T D(O, e)\beta(O, e; O', e')\big) =$$
$$= \det\big(\beta(O, e; O', e')^T\big)\det\big(D(O, e)\big)\det\big(\beta(O, e; O', e')\big) =$$
$$= \det\big(\alpha(e, e')^T\big)I_{N+1}(O, e)\det\big(\alpha(e, e')\big) = \det\big(\alpha(e, e')^T\big)\det\big(\alpha(e, e')\big)I_{N+1}(O, e) =$$
$$= \det\big(\alpha(e, e')^T\alpha(e, e')\big)I_{N+1}(O, e) = \det(\tilde{I})I_{N+1}(O, e) = I_{N+1}(O, e). \quad \square$$

19.3. Кривые и поверхности второго порядка

Определение (кривая второго порядка). Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = 2$. Будем говорить, что l — кривая второго порядка в пространстве Q, если существует функция F, удовлетворяющая условиям: F — полином степени 2 в пространстве Q, $l = \ker(F)$.

Определение (поверхность второго порядка). Пусть: Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $\dim(Q) = N$. Будем говорить, что σ — поверхность второго порядка в пространстве Q, если существует функция F, удовлетворяющая условиям: F — полином степени 2 в пространстве Q, $\sigma = \ker(F)$.

Замечание. Пусть: x, $y \in \mathbb{R}$, $xy < 0$. Тогда $(x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)$.
Пусть: x, $y \in \mathbb{R}$, $xy > 0$. Тогда $(x < 0 \wedge y < 0) \vee (x > 0 \wedge y > 0)$.

Замечание. Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = 2$, Q — ориентированное пространство; $\mathbb{C}$ **— алгебраически замкнутое поле**, l — кривая второго порядка в пространстве Q.

Так как l — кривая второго порядка в пространстве Q, то существует функция F, удовлетворяющая условиям: F — полином степени 2 в пространстве Q, $l = \ker(F)$. Пусть $\big\{A(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{B(O,e)\big\}_{O,e}$, $\big\{C(O,e)\big\}_{O,e}$ — семейства коэффициентов первого рода полинома F.

Так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнутое поле, то существуют объекты O, e, удовлетворяющие одному из следующих наборов условий:

1. $O \in Q$, e — правый ортонормированный базис пространства Q, $A_{1,1} \neq 0$, $A_{2,2} \neq 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$;
2. $O \in Q$, e — правый ортонормированный базис пространства Q, $A_{1,1} \neq 0$, $A_{2,2} = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$;
3. $O \in Q$, e — правый ортонормированный базис пространства Q, $A_{1,1} \neq 0$, $A_{2,2} = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 \neq 0$, $C = 0$.

Тогда:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{2} A_{k,k}\big(h^k_{O,e}(p)\big)^2 + \sum_{k=1}^{2} 2B_k h^k_{O,e}(p) + C, \quad p \in Q.$$

Следовательно, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\sum_{k=1}^{2} A_{k,k}(x^k)^2 + \sum_{k=1}^{2} 2B_k x^k + C = 0.$$

1. Пусть реализуется 1-й вариант. Пусть $A_{1,1}A_{2,2} < 0$. Пусть $C \neq 0$. Так как: $A_{1,1}A_{2,2} < 0$, $C \neq 0$, то: $A_{1,1}C < 0$, $A_{2,2}C > 0$ либо $A_{1,1}C > 0$, $A_{2,2}C < 0$. Без ограничения общности можно считать, что: $A_{1,1}C < 0$, $A_{2,2}C > 0$. Очевидно, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0;$$
$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 = -C;$$
$$\frac{A_{1,1}}{-C}(x^1)^2 + \frac{A_{2,2}}{-C}(x^2)^2 = 1;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\frac{-C}{A_{1,1}}} - \frac{(x^2)^2}{\frac{C}{A_{2,2}}} = 1;$$

$$\frac{(x^1)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right)^2} - \frac{(x^2)^2}{\left(\sqrt{\frac{C}{A_{2,2}}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно, l — гипербола.

2. Пусть реализуется 1-й вариант. Пусть $A_{1,1}A_{2,2} < 0$. Пусть $C = 0$. Так как $A_{1,1}A_{2,2} < 0$, то: $\operatorname{sgn}(A_{1,1}) \neq 0$, $\operatorname{sgn}(A_{1,1}) = -\operatorname{sgn}(A_{2,2})$. Очевидно, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 = 0;$$
$$|A_{1,1}|\,(x^1)^2 - |A_{2,2}|\,(x^2)^2 = 0;$$
$$\left(\sqrt{|A_{1,1}|} \cdot x^1 - \sqrt{|A_{2,2}|} \cdot x^2\right)\left(\sqrt{|A_{1,1}|} \cdot x^1 + \sqrt{|A_{2,2}|} \cdot x^2\right) = 0.$$

Так как $\sqrt{|A_{1,1}|}$, $\sqrt{|A_{2,2}|} \neq 0$, то l — объединение двух прямых, имеющих одну общую точку.

3. Пусть реализуется 1-й вариант. Пусть $A_{1,1}A_{2,2} > 0$. Пусть $A_{1,1}C < 0$. Так как: $A_{1,1}A_{2,2} > 0$, $A_{1,1}C < 0$, то $A_{2,2}C < 0$. Очевидно, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0;$$
$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 = -C;$$
$$\frac{A_{1,1}}{-C}(x^1)^2 + \frac{A_{2,2}}{-C}(x^2)^2 = 1;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\frac{-C}{A_{1,1}}} + \frac{(x^2)^2}{\frac{-C}{A_{2,2}}} = 1;$$
$$\frac{(x^1)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right)^2} + \frac{(x^2)^2}{\left(\sqrt{\frac{-C}{A_{2,2}}}\right)^2} = 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\sqrt{\frac{-C}{A_{2,2}}} \leqslant \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}$. Тогда l — эллипс.

4. Пусть реализуется 1-й вариант. Пусть $A_{1,1}A_{2,2} > 0$. Пусть $A_{1,1}C = 0$. Так как: $A_{1,1} \neq 0$, $A_{1,1}C = 0$, то $C = 0$. Очевидно, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 = 0.$$

Так как: $A_{1,1}$, $A_{2,2} < 0$ либо $A_{1,1}$, $A_{2,2} > 0$, то l — множество, состоящее из одной точки.

5. Пусть реализуется 1-й вариант. Пусть $A_{1,1}A_{2,2} > 0$. Пусть $A_{1,1}C > 0$. Очевидно, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + A_{2,2}(x^2)^2 + C = 0.$$

Так как: $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $C < 0$ либо $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $C > 0$, то $l = \varnothing$.

6. Пусть реализуется 2-й вариант. Пусть $A_{1,1}C < 0$. Очевидно, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + C = 0;$$
$$(x^1)^2 + \frac{C}{A_{1,1}} = 0;$$

$$(x^1)^2 - \frac{-C}{A_{1,1}} = 0;$$
$$\left(x^1 - \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right)\left(x^1 + \sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}}\right) = 0.$$

Так как $\sqrt{\frac{-C}{A_{1,1}}} \neq 0$, то l — объединение двух прямых, не имеющих общих точек.

7. Пусть реализуется второй вариант. Пусть $A_{1,1}C = 0$. Так как: $A_{1,1} \neq 0$, $A_{1,1}C = 0$, то $C = 0$. Очевидно, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{1,1}(x^1)^2 = 0;$$
$$(x^1)^2 = 0;$$
$$x^1 = 0.$$

Тогда l — прямая.

8. Пусть реализуется второй вариант. Пусть $A_{1,1}C > 0$. Очевидно, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{1,1}(x^1)^2 + C = 0.$$

Так как: $A_{1,1}$, $C < 0$ либо $A_{1,1}$, $C > 0$, то $l = \varnothing$.

9. Пусть реализуется третий вариант. Пусть: $p \in Q$, $x = h_{O,e}(p)$. Обозначим, $\lambda = \operatorname{sgn}(A_{1,1}B_2)$. Тогда: $\lambda = \pm 1$, $\lambda \frac{B_2}{A_{1,1}} = \left|\frac{B_2}{A_{1,1}}\right|$. Очевидно:

$$F(p) = A_{1,1}(x^1)^2 + 2B_2x^2 = A_{1,1}(\lambda x^1)^2 - 2(\lambda B_2)(-\lambda x^2).$$

Обозначим:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда: $\gamma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, γ — ортогональная матрица, $\det(\gamma) = 1$. Обозначим, $\tilde{x} = \gamma x$. Тогда $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$. Очевидно:

$$F(p) = A_{1,1}(\tilde{x}^2)^2 - 2(\lambda B_2)\tilde{x}^1.$$

Так как $\det(\gamma) = 1 \neq 0$, то существует единственный набор объектов O', e', удовлетворяющий условиям: $O' \in Q$, e' — базис пространства Q, $h_{O',e'}(O) = \tilde{\theta}$, $\alpha(e', e) = \gamma$. Так как: e — правый ортонормированный базис пространства Q, $\alpha(e, e')$ — ортогональная матрица, $\det\bigl(\alpha(e, e')\bigr) = 1 > 0$, то e' — правый ортонормированный базис пространства Q. Очевидно: $h_{O',e'}(p) = h_{O',e'}(O) + \alpha(e', e)h_{O,e}(p) = \gamma x = \tilde{x}$. Тогда:

$$F(p) = A_{1,1}\bigl(h^2_{O',e'}(p)\bigr)^2 - 2(\lambda B_2)h^1_{O',e'}(p).$$

В силу произвольности выбора точки $p \in Q$ получаем:

$$F(p) = A_{1,1}\bigl(h^2_{O',e'}(p)\bigr)^2 - 2(\lambda B_2)h^1_{O',e'}(p), \quad p \in Q.$$

Тогда $h_{O',e'}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{1,1}(\tilde{x}^2)^2 - 2(\lambda B_2)\tilde{x}^1 = 0;$$

$$A_{1,1}(\tilde{x}^2)^2 = 2(\lambda B_2)\tilde{x}^1;$$
$$(\tilde{x}^2)^2 = 2\lambda\frac{B_2}{A_{1,1}}\tilde{x}^1;$$
$$(\tilde{x}^2)^2 = 2\Big|\frac{B_2}{A_{1,1}}\Big|\tilde{x}^1.$$

Так как $\left|\frac{B_2}{A_{1,1}}\right| > 0$, то l — парабола.

Теорема. *Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = 2$, Q — ориентированное пространство; l — кривая второго порядка в пространстве Q. Тогда l является одним из следующих множеств.*

1. *Эллипс.*
2. *Множество, состоящее из одной точки.*
3. *Пустое множество.*
4. *Гипербола.*
5. *Объединение двух прямых, имеющих одну общую точку.*
6. *Парабола.*
7. *Объединение двух прямых, не имеющих общих точек.*
8. *Прямая.*

Теорема (без доказательства)**.** *Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = 2$, Q — ориентированное пространство; l — кривая второго порядка в пространстве Q, $\exists p_1 \exists p_2 (p_1 \in l \wedge p_2 \in l \wedge p_1 \neq p_2)$.*

Пусть: F_1 — полином степени 2 в пространстве Q, $l = \ker(F_1)$, F_2 — полином степени 2 в пространстве Q, $l = \ker(F_2)$. Тогда существует число λ, удовлетворяющее условиям: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $F_2 = \lambda F_1$.

Теорема (без доказательства)**.** *Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = 3$, Q — ориентированное пространство; σ — поверхность второго порядка в пространстве Q. Тогда σ является одним из следующих множеств.*

1. *Эллипсоид.*
2. *Множество, состоящее из одной точки.*
3. *Пустое множество.*
4. *Однополостный гиперболоид.*
5. *Конус второго порядка.*
6. *Двуполостный гиперболоид.*
7. *Эллиптический параболоид.*
8. *Гиперболический параболоид.*
9. *Эллиптический цилиндр.*
10. *Прямая.*
11. *Гиперболический цилиндр.*
12. *Объединение двух плоскостей, пересекающихся по прямой.*
13. *Параболический цилиндр.*
14. *Объединение двух плоскостей, не имеющих общих точек.*
15. *Плоскость.*

Лекция 20. Элементы теории групп

20.1. Определение группоида

Определение (группоид). Пусть: M — множество, $F\colon M \times M \implies M$. Далее обычно будем писать «$x * y$» вместо «$F(x, y)$».

Будем говорить, что: (M, F) — группоид; M — носитель группоида (M, F); F — алгебраическая операция группоида (M, F). Далее обычно будем отождествлять группоид (M, F) и множество M.

Определение (основные понятия, связанные с понятием «группоид»). Пусть G — группоид.

Будем говорить, что G — ассоциативный группоид, если:

$$\forall x \in G \forall y \in G \forall z \in G \big((x * y) * z = x * (y * z)\big).$$

Будем говорить, что G — коммутативный группоид, если:

$$\forall x \in G \forall y \in G (x * y = y * x).$$

Будем говорить, что u — правый нейтральный элемент группоида G, если:

$$u \in G,$$
$$\forall x \in G (x * u = x).$$

Будем говорить, что u — универсальный правый нейтральный элемент группоида G, если:

$$u \in G,$$
$$\forall x \in G (x * u = x),$$
$$\forall x \in G \exists y \in G (x * y = u).$$

Будем говорить, что u — левый нейтральный элемент группоида G, если:

$$u \in G,$$
$$\forall x \in G (u * x = x).$$

Будем говорить, что u — универсальный левый нейтральный элемент группоида G, если:

$$u \in G,$$
$$\forall x \in G (u * x = x),$$
$$\forall x \in G \exists y \in G (y * x = u).$$

Будем говорить, что u — двусторонний нейтральный элемент группоида G, если:

$$u \in G,$$
$$\forall x \in G (x * u = x),$$
$$\forall x \in G (u * x = x).$$

Будем говорить, что u — универсальный двусторонний нейтральный элемент группоида G, если:

$$u \in G,$$
$$\forall x \in G(x * u = x),$$
$$\forall x \in G(u * x = x),$$
$$\forall x \in G \exists y \in G(x * y = u \wedge y * x = u).$$

Замечание (основные формы записи алгебраической операции). Пусть (M, F) — группоид.

1. Иногда принимают решение писать «xy» вместо «$F(x, y)$». В этом случае говорят об использовании мультипликативной формы записи алгебраической операции.

   Обычно мультипликативную форму записи алгебраической операции используют при работе с ассоциативными группоидами.

   Пусть используется мультипликативная форма записи алгебраической операции. Будем применять термины: «правый единичный элемент», «универсальный правый единичный элемент», «левый единичный элемент», «универсальный левый единичный элемент», «двусторонний единичный элемент», «универсальный двусторонний единичный элемент» вместо терминов: «правый нейтральный элемент», «универсальный правый нейтральный элемент», «левый нейтральный элемент», «универсальный левый нейтральный элемент», «двусторонний нейтральный элемент», «универсальный двусторонний нейтральный элемент».

2. Иногда принимают решение писать «$x + y$» вместо «$F(x, y)$». В этом случае говорят об использовании аддитивной формы записи алгебраической операции.

   Обычно аддитивную форму записи алгебраической операции используют при работе с ассоциативными коммутативными группоидами.

   Пусть используется аддитивная форма записи алгебраической операции. Будем применять термины: «правый нулевой элемент», «универсальный правый нулевой элемент», «левый нулевой элемент», «универсальный левый нулевой элемент», «двусторонний нулевой элемент», «универсальный двусторонний нулевой элемент» вместо терминов: «правый нейтральный элемент», «универсальный правый нейтральный элемент», «левый нейтральный элемент», «универсальный левый нейтральный элемент», «двусторонний нейтральный элемент», «универсальный двусторонний нейтральный элемент».

3. Нужно очень ясно понимать, что речь идёт именно о двух формах записи алгебраической операции, а не о двух разновидностях группоидов. При работе с одним и тем же группоидом можно использовать как мультипликативную, так и аддитивную форму записи алгебраической операции. Более того, следует признать, что выражения «xy», «$x + y$» носят жаргонный характер, ибо являются не более, чем типографскими сокращениями выражения «$F(x, y)$».

20.2. Определение группы

Определение (группа). Пусть: M — множество, $F\colon M \times M \implies M$. Далее обычно будем писать «xy» вместо «$F(x, y)$».

Пусть:

1. $\forall x \in M \forall y \in M \forall z \in M\big((xy)z = x(yz)\big)$;
2. $\exists u \in M\big(\forall x \in M(xu = x) \wedge \forall x \in M \exists y \in M(xy = u)\big)$.

Будем говорить, что: (M, F) — группа; M — носитель группы (M, F); F — алгебраическая операция группы (M, F). Далее обычно будем отождествлять группу (M, F) и множество M.

По сути дела, мы определили группу как ассоциативный группоид, имеющий хотя бы один универсальный правый единичный элемент.

Утверждение (вспомогательный результат №1)**.** *Пусть: G — группа; $u \in G$, $\forall x \in G(xu = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(xy = u)$. Тогда $\forall x \in G \forall y \in G(xy = u \implies yx = u)$.*

Доказательство. Пусть: $x \in G$, $y \in G$, $xy = u$. Так как: $\forall x \in G \exists y \in G(xy = u)$, $y \in G$, то существует элемент z, удовлетворяющий условиям: $z \in G$, $yz = u$. Тогда:

$$yx = (yx)u = (yx)(yz) = \big((yx)y\big)z = \big(y(xy)\big)z = (yu)z = yz = u. \quad \square$$

Утверждение (вспомогательный результат №2)**.** *Пусть: G — группа; $u \in G$, $\forall x \in G(xu = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(xy = u)$. Тогда $\forall x \in G(ux = x)$.*

Доказательство. Пусть $x \in G$. Так как $\forall x \in G \exists y \in G(xy = u)$, то существует элемент y, удовлетворяющий условиям: $y \in G$, $xy = u$. Тогда:

$$ux = (xy)x = x(yx) = xu = x. \quad \square$$

Утверждение («правое основное уравнение»)**.** *Пусть: G — группа; a, $b \in G$. Существует единственный объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in G$, $ax = b$.*

Доказательство. Так как G — группа, то существует элемент u, удовлетворяющий условиям: $u \in G$, $\forall x \in G(xu = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(xy = u)$. Так как: $\forall x \in G \exists y \in G(xy = u)$, $a \in G$, то существует элемент $\tilde{a}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{a} \in G$, $a\tilde{a} = u$.

Пусть: $x \in G$, $ax = b$. Тогда:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(ax) &= \tilde{a}b, \\ (\tilde{a}a)x &= \tilde{a}b, \\ ux &= \tilde{a}b, \\ x &= \tilde{a}b. \end{aligned}$$

Пусть: $x_1 \in G$, $ax_1 = b$; $x_2 \in G$, $ax_2 = b$. Тогда: $x_1 = \tilde{a}b$, $x_2 = \tilde{a}b$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Обозначим, $x = \tilde{a}b$. Тогда: $x \in G$,

$$ax = a(\tilde{a}b) = (a\tilde{a})b = ub = b. \quad \square$$

Утверждение («левое основное уравнение»)**.** *Пусть: G — группа; a, $b \in G$. Существует единственный объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in G$, $xa = b$.*

Доказательство. Так как G — группа, то существует элемент u, удовлетворяющий условиям: $u \in G$, $\forall x \in G(xu = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(xy = u)$. Так как: $\forall x \in G \exists y \in G(xy = u)$, $a \in G$, то существует элемент $\tilde{a}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{a} \in G$, $a\tilde{a} = u$.

Пусть: $x \in G$, $xa = b$. Тогда:

$$\begin{aligned} (xa)\tilde{a} &= b\tilde{a}, \\ x(a\tilde{a}) &= b\tilde{a}, \\ xu &= b\tilde{a}, \\ x &= b\tilde{a}. \end{aligned}$$

Пусть: $x_1 \in G$, $x_1a = b$; $x_2 \in G$, $x_2a = b$. Тогда: $x_1 = b\tilde{a}$, $x_2 = b\tilde{a}$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Обозначим, $x = b\tilde{a}$. Тогда: $x \in G$,

$$xa = (b\tilde{a})a = b(\tilde{a}a) = bu = b. \quad \square$$

Определение (единичный элемент). Пусть G — группа. Будем говорить, что u — единичный элемент группы G, если: $u \in G$, $\forall x \in G(xu = x)$.

По сути дела, мы определили единичный элемент группы как правый единичный элемент группы.

Утверждение (существование и единственность единичного элемента)**.** *Пусть G — группа. Существует единственный объект u, удовлетворяющий условию: u — единичный элемент группы G.*

Доказательство. Так как G — группа, то существует элемент u, удовлетворяющий условиям: $u \in G$, $\forall x \in G(xu = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(xy = u)$. Так как: $u \in G$, $\forall x \in G(xu = x)$, то u — единичный элемент группы G.

Пусть: u_1 — единичный элемент группы G, u_2 — единичный элемент группы G. Тогда: $u_1 \in G$, $\forall x \in G(xu_1 = x)$; $u_2 \in G$, $\forall x \in G(xu_2 = x)$. Так как: $\forall x \in G(xu_1 = x)$, $u_1 \in G$, то $u_1 u_1 = u_1$. Так как: $\forall x \in G(xu_2 = x)$, $u_1 \in G$, то $u_1 u_2 = u_1$. Тогда $u_1 = u_2$. □

Определение (обозначение для единичного элемента). Пусть G — группа. Обозначим через e единичный элемент группы G.

Утверждение (основные свойства единичного элемента)**.** *Пусть G — группа. Тогда: $e \in G$, $\forall x \in G(xe = x)$, $\forall x \in G(ex = x)$.*

Доказательство. Так как e — единичный элемент группы G, то: $e \in G$, $\forall x \in G(xe = x)$. Так как $e \in G$, то $\forall x \in G \exists y \in G(xy = e)$. Так как: $e \in G$, $\forall x \in G(xe = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(xy = e)$, то $\forall x \in G(ex = x)$. □

Замечание (обратный элемент). Пусть G — группа.

Пусть $x \in G$. Будем говорить, что y — обратный элемент к элементу x, если: $y \in G$, $xy = e$.

Пусть $x \in G$. Так как $e \in G$, то существует единственный объект y, удовлетворяющий условиям: $y \in G$, $xy = e$. Тогда существует единственный объект y, удовлетворяющий условию: y — обратный элемент к элементу x.

Пусть $x \in G$. Обозначим через x^{-1} обратный элемент к элементу x.

Утверждение (основные свойства обратного элемента)**.** *Пусть: G — группа; $x \in G$. Тогда: $x^{-1} \in G$, $xx^{-1} = e$, $x^{-1}x = e$.*

Доказательство. Так как: $x \in G$, x^{-1} — обратный элемент к элементу x, то: $x^{-1} \in G$, $xx^{-1} = e$. Так как e — единичный элемент группы G, то: $e \in G$, $\forall x \in G(xe = x)$. Так как $e \in G$, то $\forall x \in G \exists y \in G(xy = e)$. Так как: $e \in G$, $\forall x \in G(xe = x)$, $\forall x \in G \exists y \in G(xy = e)$; $x \in G$, $x^{-1} \in G$, $xx^{-1} = e$, то $x^{-1}x = e$. □

Утверждение. *Пусть: G — группа; $x, y \in G$. Тогда $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.*

Доказательство. Очевидно: $y^{-1}x^{-1} \in G$,

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = \big((xy)y^{-1}\big)x^{-1} = \big(x(yy^{-1})\big)x^{-1} = (xe)x^{-1} = xx^{-1} = e.$$

Тогда $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. □

Замечание (возведение элемента в целую степень). Пусть G — группа. Пусть:

1. α — функция;

2. $\mathrm{D}(\alpha) = G \times \mathbb{Z}$;
3. $\forall x \in G\bigl(\alpha(x, 0) = e\bigr)$;
4. $\forall x \in G \forall k(k \in \mathbb{Z} \land k \geqslant 0)\bigl(\alpha(x, k+1) = \alpha(x, k)x\bigr)$;
5. $\forall x \in G \forall k(k \in \mathbb{Z} \land k \leqslant 0)\bigl(\alpha(x, k-1) = \alpha(x, k)x^{-1}\bigr)$.

Нетрудно доказать, что $\alpha\colon G \times \mathbb{Z} \implies G$. Пусть $x \in G$. Тогда:

$$\alpha(x, 1) = \alpha(x, 0+1) = \alpha(x, 0)x = ex = x;$$
$$\alpha(x, -1) = \alpha(x, 0-1) = \alpha(x, 0)x^{-1} = ex^{-1} = x^{-1}.$$

Далее обычно будем писать «x^k» вместо «$\alpha(x, k)$».

Утверждение. *Пусть G — группа.*
1. *Пусть: $x \in G$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $x^{k+1} = x^k x$.*
2. *Пусть: $x \in G$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $x^{k-1} = x^k x^{-1}$.*

Доказательство.
1. Пусть $k \geqslant 0$. Тогда $x^{k+1} = x^k x$.
   Пусть $k \leqslant -1$. Тогда: $k+1 \in \mathbb{Z}$, $k+1 \leqslant 0$. Следовательно: $x^k x = x^{(k+1)-1}x = (x^{k+1}x^{-1})x = x^{k+1}$.
2. Пусть $k \leqslant 0$. Тогда $x^{k-1} = x^k x^{-1}$.
   Пусть $k \geqslant 1$. Тогда: $k-1 \in \mathbb{Z}$, $k-1 \geqslant 0$. Следовательно: $x^k x^{-1} = x^{(k-1)+1}x^{-1} = (x^{k-1}x)x^{-1} = x^{k-1}$. □

Утверждение. *Пусть G — группа. Тогда $\forall x \in G \forall k \in \mathbb{Z} \forall m \in \mathbb{Z}(x^{k+m} = x^k x^m)$.*

Доказательство. Пусть: $x \in G$, $k \in \mathbb{Z}$. Докажем, что: $\forall m(m \in \mathbb{Z} \land m \geqslant 0)(x^{k+m} = x^k x^m)$, $\forall m(m \in \mathbb{Z} \land m \leqslant 0)(x^{k+m} = x^k x^m)$.

Очевидно: $x^{k+0} = x^k$, $x^k x^0 = x^k e = x^k$. Тогда $x^{k+0} = x^k x^0$.

Пусть: $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, $x^{k+m} = x^k x^m$. Тогда:

$$x^{k+(m+1)} = x^{(k+m)+1} = x^{k+m}x = (x^k x^m)x = x^k(x^m x) = x^k x^{m+1}.$$

Итак, $\forall m(m \in \mathbb{Z} \land m \geqslant 0)(x^{k+m} = x^k x^m)$.

Пусть: $m \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant 0$, $x^{k+m} = x^k x^m$. Тогда:

$$x^{k+(m-1)} = x^{(k+m)-1} = x^{k+m}x^{-1} = (x^k x^m)x^{-1} = x^k(x^m x^{-1}) = x^k x^{m-1}.$$

Итак, $\forall m(m \in \mathbb{Z} \land m \leqslant 0)(x^{k+m} = x^k x^m)$. □

Утверждение. *Пусть: G — группа; $x \in G$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $(x^k)^{-1} = x^{-k}$.*

Доказательство. Очевидно: $x^{-k} \in G$, $x^k x^{-k} = x^{k+(-k)} = x^0 = e$. Тогда $(x^k)^{-1} = x^{-k}$. □

Утверждение. *Пусть G — группа. Тогда $\forall x \in G \forall k \in \mathbb{Z} \forall m \in \mathbb{Z}\bigl(x^{mk} = (x^k)^m\bigr)$.*

Доказательство. Пусть: $x \in G$, $k \in \mathbb{Z}$. Докажем, что: $\forall m(m \in \mathbb{Z} \land m \geqslant 0)\bigl(x^{mk} = (x^k)^m\bigr)$, $\forall m(m \in \mathbb{Z} \land m \leqslant 0)\bigl(x^{mk} = (x^k)^m\bigr)$.

Очевидно: $x^{0k} = x^0 = e$, $(x^k)^0 = e$. Тогда $x^{0k} = (x^k)^0$.

Пусть: $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, $x^{mk} = (x^k)^m$. Тогда:

$$x^{(m+1)k} = x^{mk+k} = x^{mk}x^k = (x^k)^m x^k = (x^k)^{m+1}.$$

Итак, $\forall m(m \in \mathbb{Z} \land m \geqslant 0)\bigl(x^{mk} = (x^k)^m\bigr)$.

Пусть: $m \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant 0$, $x^{mk} = (x^k)^m$. Тогда:

$$x^{(m-1)k} = x^{mk+(-k)} = x^{mk}x^{-k} = (x^k)^m(x^k)^{-1} = (x^k)^{m-1}.$$

Итак, $\forall m(m \in \mathbb{Z} \land m \leqslant 0)\bigl(x^{mk} = (x^k)^m\bigr)$. □

Замечание. Пусть: G — группа, используется аддитивная форма записи алгебраической операции. Будем применять термины: «нулевой элемент», «противоположный элемент» вместо терминов: «единичный элемент», «обратный элемент». Будем писать: «θ», «$-x$», «kx» вместо: «e», «x^{-1}», «x^k».

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[4] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[5] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.