Овчинников Алексей Витальевич

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

http://matematika.phys.msu.ru/

Лекция 1
Системы координат
Представление линий и поверхностей

1. Об учебном плане

Лекции	36 ч.
Семинары	18 ч.
Самостоятельная работа	36 ч.
Всего	90 ч.

2. О содержании курса

(1) Элементарные представления о координатном методе.
(2) Векторная алгебра.
(3) Определители второго и третьего порядков.
(4) Прямые и плоскости.
(5) Кривые второго порядка.
(6) Поверхности второго порядка.
(7) Комплексные числа.
(8) Алгебра матриц.
(9) Теория систем линейных уравнений.
(10) Теория линейных пространств.
(11) Теория определителей.

3. Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.
$\forall x$ — квантор всеобщности («для любых x»).
$\exists x$ — квантор существования («существует такой x, что...»).
$\exists! x$ — квантор единственности («существует единственный x, такой что...»).
$\Longrightarrow$ — импликация («следовательно»).
$\Longleftrightarrow$ — эквивалентность.
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$ — факториал натурального числа n.
Двойной факториал:

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1) \cdot (2n+1),$$
$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-2) \cdot (2n).$$

Суммы и произведения:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \qquad \prod_{k=0}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

4. О построении геометрии

Система аксиом Евклида—Гильберта.

Основные понятия: точка, прямая, плоскость.

Отношения между понятиями:

(1) инцидентность («точка лежит на прямой», «прямая проходит через точку» и т. п.; 8 аксиом);
(2) порядок (понятие «лежать между»; 4 аксиомы);
(3) конгруэнтность (движение, равенство; 5 аксиом);
(4) параллельность (1 аксиома);
(5) непрерывность (2 аксиомы).

5. Системы координат

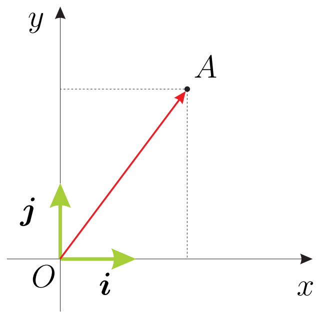
Система координат — объект, позволяющий описывать геометрический объект алгебраическими средствами.

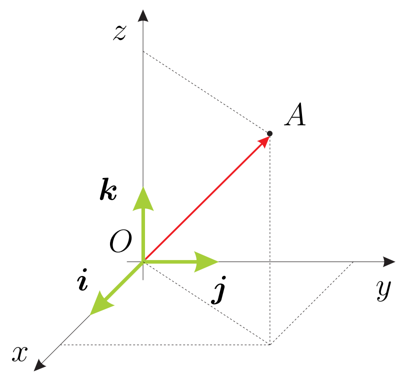
5.1. **Декартова прямоугольная система координат.**

O — начало координат, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные направляющие векторы координатных осей (орты); другое обозначение $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

x — абсцисса, y — ордината, z — аппликата.

$\overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор точки A. Другое обозначение координат x_1, x_2, x_3.



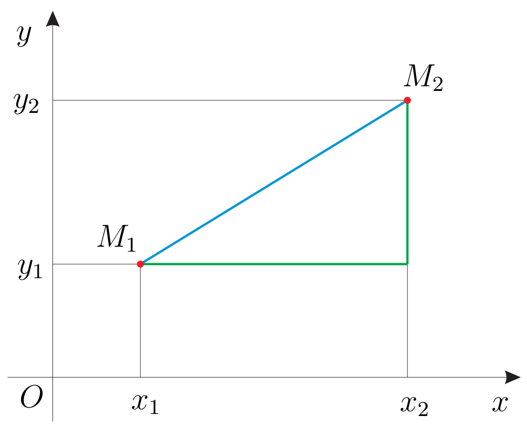


Расстояние между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на прямой:

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости:

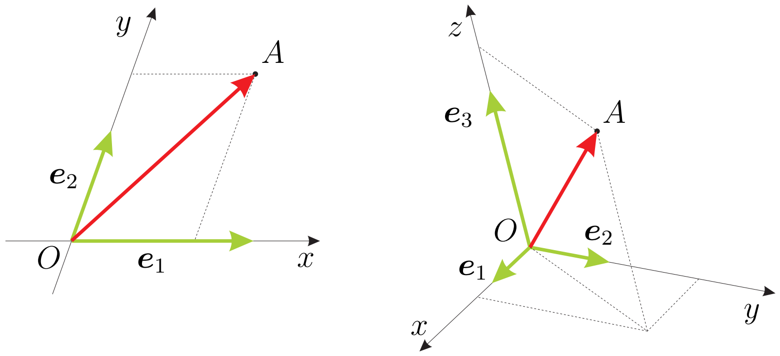
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



В пространственном случае аналогично: для точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

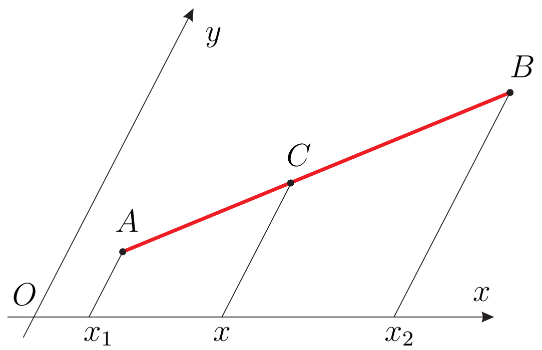
5.2. **Декартова косоугольная система координат.**



Углы между векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ могут быть не прямыми, длины векторов могут быть $\neq 1$.

Пример.

Задача о делении отрезка в данном отношении. На плоскости даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$; координаты точек заданы относительно некоторой (косоугольной) декартовой системы координат. Найти координаты точки $C(x, y)$, делящей отрезок AB в отношении $|AC| : |BC| = m : n$.



Пользуясь теоремой Фалеса, запишем

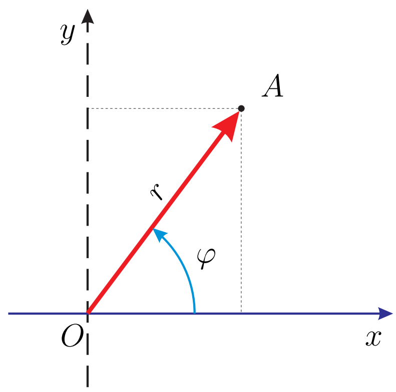
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m}{m+n},$$

откуда

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}.$$

Аналогично находится ордината (и аппликата в пространственном случае) точки C.

5.3. **Полярная система координат на плоскости.**



(r, φ) — полярные координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

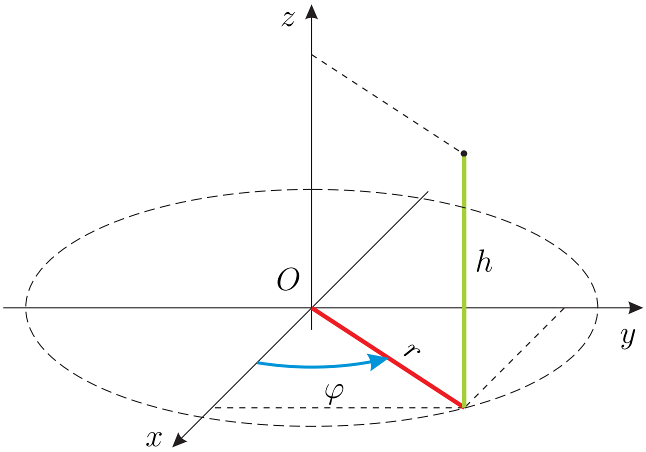
Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty, \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Удобно считать, что φ определено с точностью до добавления $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; тогда пишем

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

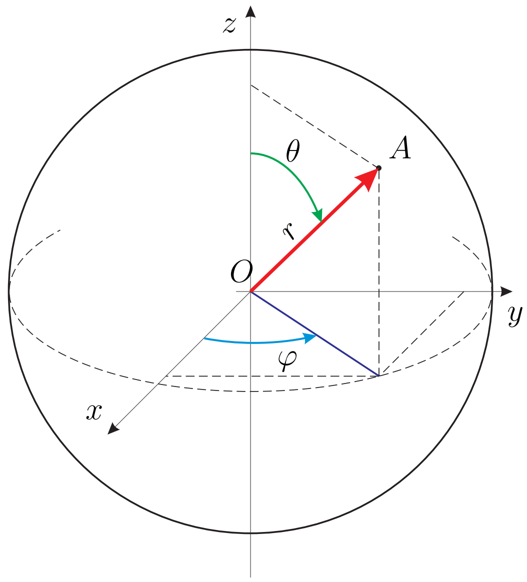
5.4. **Цилиндрическая система координат в пространстве.**



(r, φ, h) — цилиндрические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = h, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ h = z. \end{cases}$$

5.5. **Сферическая система координат в пространстве.**



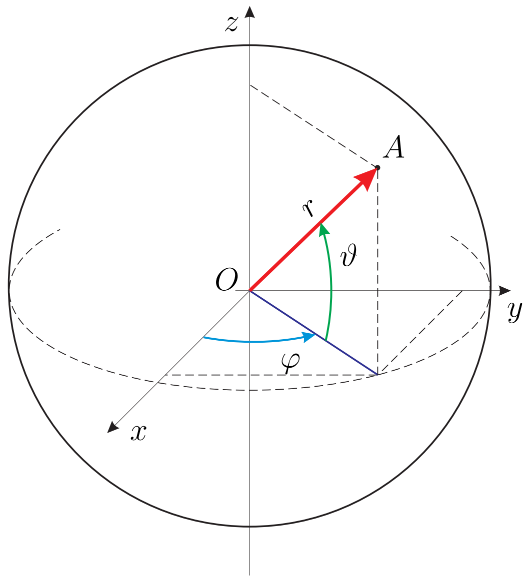
(r, θ, φ) — сферические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

Географические координаты — вариант сферических.



(r, ϑ, φ) — географические координаты точки A. Формулы перехода:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z = r\sin\vartheta. \end{cases}$$

Диапазоны изменения значений координат:

$$0 \leqslant r < +\infty, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad -\pi < \varphi \leqslant \pi \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

6. Уравнения линий и поверхностей

Уравнение линии на плоскости — уравнение вида

$$F(x, y) = 0,$$

каждое решение (x, y) которого представляет собой координаты некоторой точки линии, причем для каждой точки линии найдется некоторое решение данного уравнения.

Уравнение поверхности в пространстве содержит 3 переменные:

$$G(x, y, z) = 0.$$

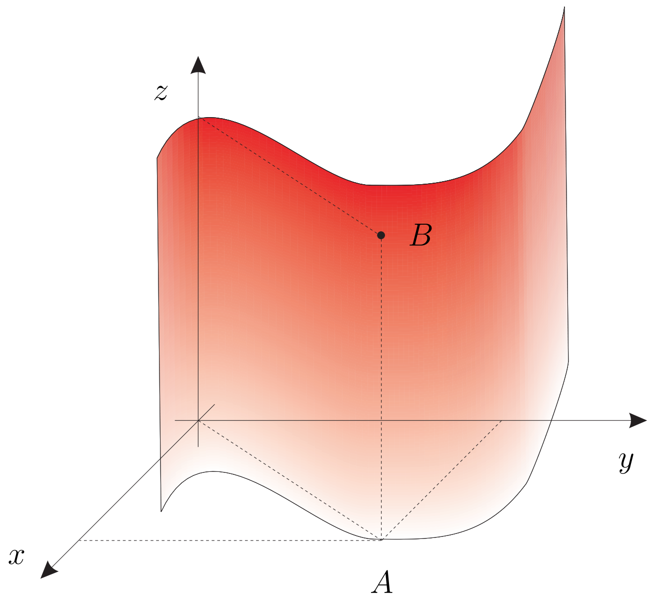
Вместо прямоугольных декартовых координат можно использовать любые другие.

Вместо уравнений можно рассматривать неравенства.

Цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz, описывается уравнением вида

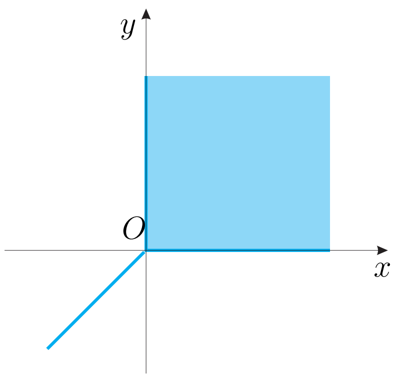
$$G(x, y) = 0.$$

Это же уравнение является одновременно уравнением направляющей.



Уравнение может описывать геометрический объект, не соответствующий интуитивному представлению о линии (поверхности):

$$x - |x| - y + |y| = 0.$$



6.1. **Уравнения прямых на плоскости.**

Уравнение прямой — линейное уравнение:

$$Ax + By = C.$$

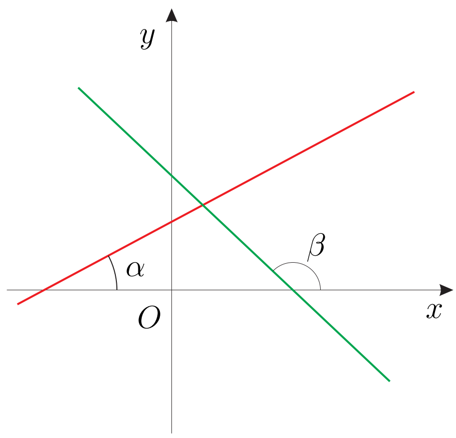
Уравнение можно умножить на любое ненулевое число.

1. Уравнение с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b.$$

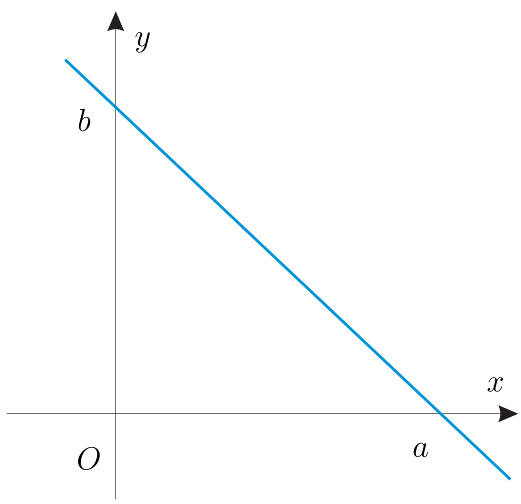
k — угловой коэффициент прямой:

$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$



2. Уравнение прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

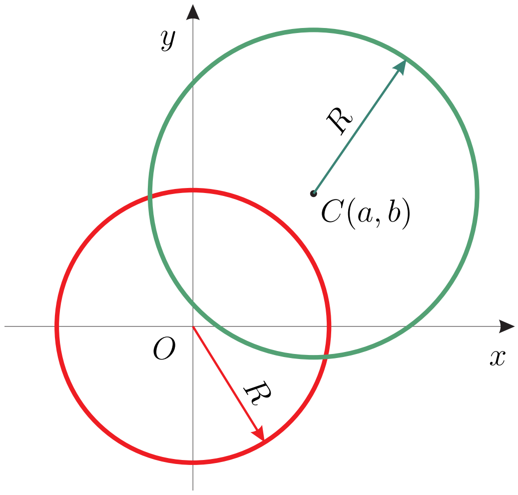


6.2. **Окружность.** Окружность радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

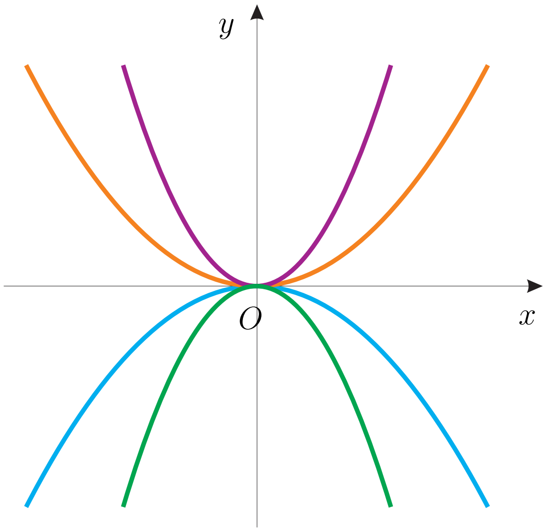
Окружность радиуса R с центром в точке $C(a, b)$:

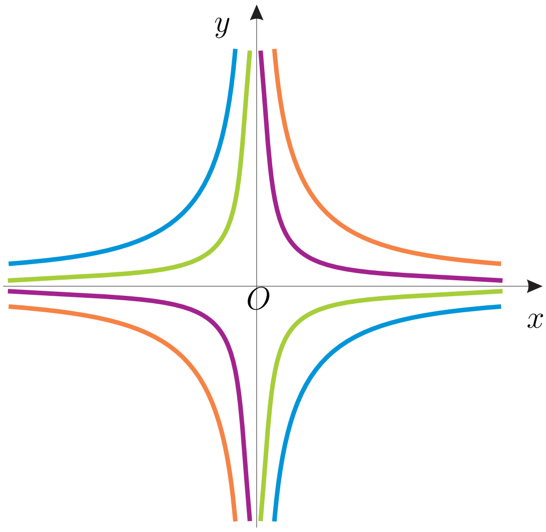
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$



6.3. **Парабола и гипербола.**

$$y = ax^2, \qquad y = \frac{a}{x}.$$





7. Параметрические уравнения

7.1. **Параметрические уравнения линий.** Линия на плоскости может быть задана как множество точек, координаты которых вычисляются по формулам

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Этот способ пригоден и для задания линий в пространстве:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

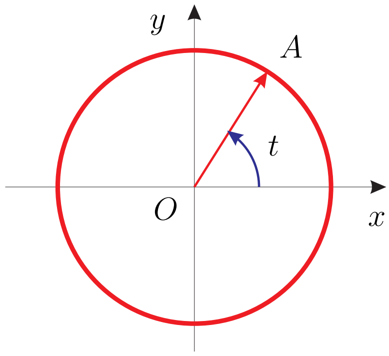
С точки зрения механики параметрические уравнения линии — это закон движения материальной точки, параметр t — время.

Пример.

Параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

Параметр t представляет собой угол между осью Ox и радиус-вектором точки окружности.



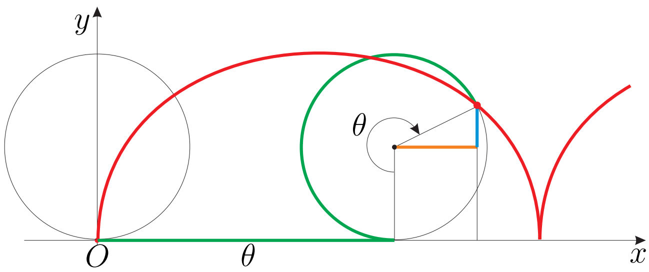
Пример.

Циклоида — это траектория точки обода катящегося по прямой колеса.

Радиус колеса R, параметр — угол θ поворота колеса.

Параметрические уравнения циклоиды

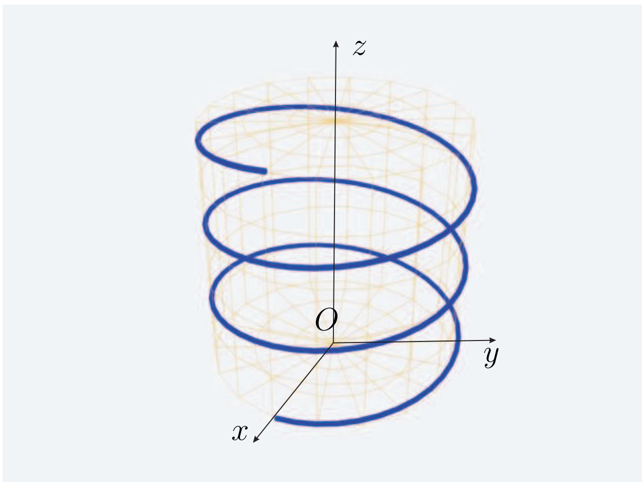
$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta).$$



Пример.

Винтовая линия. Точка совершает два одновременных движения: равномерное вращение с угловой скоростью ω в плоскости Oxy по окружности радиуса R и равномерное поступательное движение вдоль оси Oz со скоростью c:

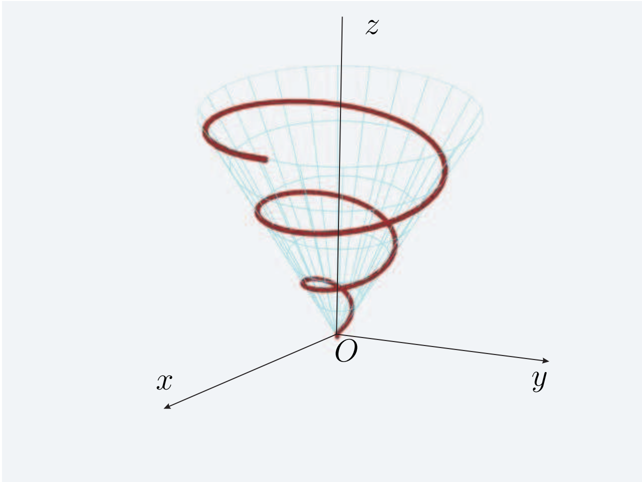
$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t, \quad z = ct.$$



Пример.

Коническая винтовая линия.

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t.$$



7.2. **Параметрическое задание поверхностей.** Поверхности задаются:

(1) уравнениями вида $F(x, y, z) = 0$;

(2) параметрическими уравнениями вида

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2;$$

параметры u, v — внутренние координаты поверхности;

(3) как графики функции двух переменных: $z = f(x, y)$.

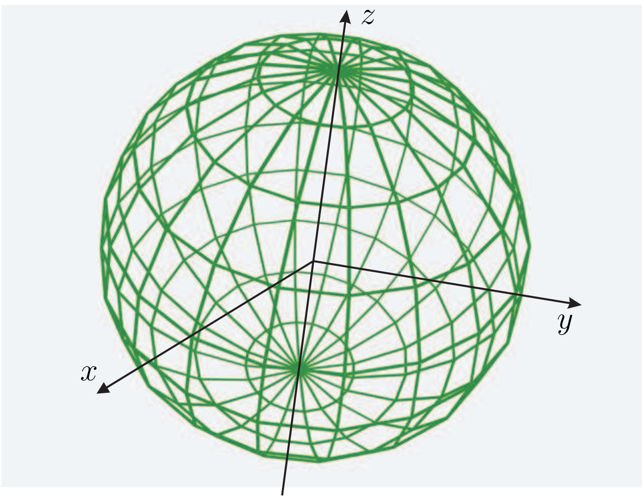
Пример.

Сфера радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Параметрическое представление:

$$\begin{cases} x = R\cos u \sin v, \\ y = R\sin u \sin v, \\ z = R\cos v, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant u < 2\pi, \\ 0 \leqslant v \leqslant \pi. \end{cases}$$



Представить сферу как график функции невозможно, но это удается сделать отдельно для нижней и верхней полусфер:

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

8. Пересечения и проекции

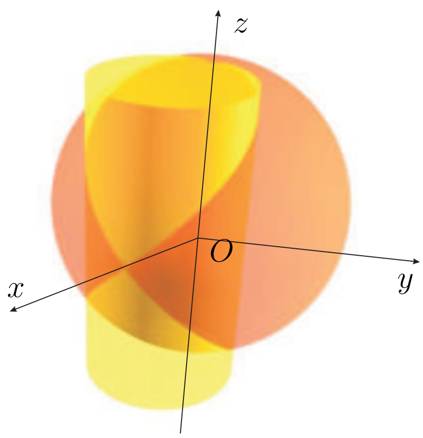
8.1. **Пересечения поверхностей.**

Линии (кривые) в пространстве можно задавать как пересечение двух поверхностей:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Пример.

Кривая Вивиани — пересечение цилиндра радиуса R и сферы радиуса $2R$, центр которой лежит на поверхности цилиндра.



Получим уравнения кривой Вивиани.

Уравнения сферы и цилиндра:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2, \qquad (x - R)^2 + y^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 = 2Rx.$$

Отсюда

$$z^2 = 4R^2 - 2Rx.$$

Положим

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t.$$

Тогда

$$x^2 + y^2 = 2Rx \iff r^2 = 2Rr\cos t \iff r = 2R\cos t.$$

Можно записать выражения для x и y:

$$x = r\cos t = 2R\cos^2 t = R(1 + \cos 2t),$$
$$y = r\sin t = 2R\sin t\cos t = R\sin 2t.$$

Параметр t изменяется в диапазоне

$$0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Теперь можно найти выражение для z:

$$z^2 = 4R^2 - 2Rx = 4R^2\sin^2 t \iff z = \pm 2R\sin t.$$

Можно убрать $\pm$, если разрешить параметру t изменяться в диапазоне

$$0 \leqslant t < 2\pi.$$

Итак, окончательный результат:

$$\begin{cases} x = R(1+\cos 2t), \\ y = R\sin 2t, \qquad\qquad 0 \leqslant t < 2\pi. \\ z = 2R\sin t, \end{cases}$$

8.2. **Проекции.** Проекцией точки $M(x, y, z)$ на координатную плоскость Oxy является точка $N(x, y)$. Таким образом, проектирование на координатную плоскость — это игнорирование одной из координат.

Если линия задана как пересечение двух поверхностей $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$, то уравнение ее проекции на плоскость Oxy получается исключением z из этих уравнений.

Пример.

Проекция кривой Вивиани на плоскость Oxy — это кривая с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = R(1+\cos 2t), \\ y = R\sin 2t. \end{cases}$$

Исключая параметр t, получаем уравнение окружности

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2.$$

9. Разновидности теорем

Импликация — логическая связка, по своему применению приближенная к обороту речи «если... то...».

Импликация записывается как

$$\text{посылка} \Longrightarrow \text{следствие}.$$

Теорема — утверждение, устанавливаемое при помощи доказательства. В формулировке теоремы различают условие и заключение; структура теоремы представляет собой суждение-импликацию.

Пусть имеется импликация вида

$$A \Longrightarrow B;$$

здесь A — посылка, B — следствие.

Посылка A является условием, *достаточным* для выполнения следствия B. Если A истинно, то утверждение B заведомо верно.

Следствие B является условием, *необходимым* для истинности посылки A. Без выполнения B утверждение A не может быть истинным.

Для того чтобы число делилось на 2, необходимо, чтобы последняя цифра в его десятичной записи не была 7:

$$\text{число делится на } 2 \Longrightarrow \underbrace{\text{последняя цифра не } 7}_{\text{необходимое условие делимости на } 2}$$

Это условие не является достаточным: число 23 не заканчивается на 7, но на 2 не делится. Необходимые условия содержат «лишние случаи».

Теорема, выражающая необходимое условие, называется *свойством*:

Если число делится на 2, то его последняя цифра не 7.

Для того чтобы число делилось на 2, достаточно, чтобы его последняя цифра была 0:

$$\underbrace{\text{последняя цифра } 0}_{\text{достаточное условие делимости на 2}} \Longrightarrow \text{число делится на } 2$$

Это условие не является необходимым: число 14 делится на 2, но его последняя цифра не 0. Достаточные условия содержат «не все случаи».

Теорема, выражающая достаточное условие, называется *признаком*:

Признаком (одним из признаков) делимости на 2 является тот фат, что последняя цифра числа — нуль.

Достаточные условия стараются сделать возможно более широкими, т.е. охватывающими возможно большее число случаев, в которых интересующий нас факт всё ещё имеет место, а необходимые условия — возможно более узкими, т.е. охватывающими возможно меньше лишних случаев, в которых изучаемый факт уже не имеет места.

Пример утверждения, в которых необходимое условие совпадает с достаточным:

Для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра была четная.

Теорема, выражающая необходимое и достаточное условие, называется *критерием*.

Рассмотрим теорему

$$A \Longrightarrow B.$$

Обратная теорема — это утверждение

$$B \Longrightarrow A;$$

если исходная теорема верна, то обратная теорема может и не быть верной.

Теорема, обратная обратной, равносильна исходной.

Пример.

Исходная теорема:

$$\text{сумма цифр числа делится на } 3 \Longrightarrow \text{число делится на } 3.$$

Обратная теорема

$$\text{число делится на } 3 \Longrightarrow \text{сумма цифр числа делится на } 3$$

верна.

Если для теоремы верна и обратная теорема, то они могут быть объединены в критерий:

$$\text{число делится на } 3 \iff \text{сумма цифр числа делится на } 3$$

Пример.

Исходная теорема:

$$\text{в треугольнике один из углов прямой} \Longrightarrow \text{два других угла острые.}$$

Обратная теорема

$$\text{два угла в треугольнике острые} \Longrightarrow \text{третий угол прямой}$$

не верна.

Рассмотрим теорему

$$A \Longrightarrow B.$$

Противоположная теорема — это утверждение

$$\neg A \Longrightarrow \neg B$$

(знак $\neg$ означает отрицание).

Противоположная теорема равносильна обратной. Поэтому теорема, противоположная обратной:

$$\neg B \Longrightarrow \neg A,$$

равносильна исходной

$$A \Longrightarrow B.$$

Метод доказательства «от противного» заключается в том, что вместо исходной теоремы доказывается теорема, противоположная к обратной:

$$(\neg B \Longrightarrow \neg A) \iff (A \Longrightarrow B)\,.$$

10. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек $F_1(-a;0)$ и $F_2(a;0)$ есть постоянная величина a^2.

Ответ. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.

Задача 2. Из начала координат проведен луч, пересекающий данную окружность $(x-a)^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ в точке B. На луче по обе стороны от точки B отложены отрезки BM и BN одинаковой длины b. При вращении луча точки M и N описывают кривую, называемую улиткой Паскаля. Составить ее уравнение.

Ответ. $(x^2+y^2-2ax)^2 = b^2(x^2+y^2)$.

Задача 3. Отрезок длины a движется так, что его концы все время находятся на координатных осях. Через концы отрезка проведены прямые, параллельные координатным осям, до их взаимного пересечения в точке P. Точка M является основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на отрезок. При движении отрезка точка M описывает кривую, называемую астроидой. Составить ее уравнение.

Ответ. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.