Лекция 8. Вариационные методы. Одна задача нелинейной оптики.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

13 ноября 2013 г.

Постановка задачи-1

$$\overrightarrow{\mathrm{D}} = \overrightarrow{\mathrm{D}}_0(x)e^{i\omega t}, \quad \overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{E}}_0(x)e^{i\omega t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{D}} = 0, \quad \operatorname{rot} \overrightarrow{\mathrm{E}} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{D}}_0 = 0, \quad \operatorname{rot} \overrightarrow{\mathrm{E}}_0 = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

причем

$$\overrightarrow{\mathrm{D}}_0 = \hat{\varepsilon}\overrightarrow{\mathrm{E}}_0, \tag{3}$$

$$\hat{\varepsilon} \equiv -\triangle + \left(1 + \frac{2c^2}{\omega^2}\eta \left|\overrightarrow{\mathrm{E}}_0\right|^2\right) \mathrm{I}, \tag{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}_0 = \overrightarrow{\mathrm{E}}_{01} + i\overrightarrow{\mathrm{E}}_{02}, \quad \overrightarrow{\mathrm{D}}_0 = \overrightarrow{\mathrm{D}}_{01} + i\overrightarrow{\mathrm{D}}_{02},$$

где

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}_{01}, \ \overrightarrow{\mathrm{E}}_{02}, \ \overrightarrow{\mathrm{D}}_{01}, \ \overrightarrow{\mathrm{D}}_{02} \in \mathbb{R}^N.$$

Постановка задачи-2

Причем под величиной $\left|\overrightarrow{\mathrm{E}}_0\right|^2$ понимается следующее равенство:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{E}}_0\right|^2 \equiv \left|\overrightarrow{\mathrm{E}}_{01}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{E}}_{02}\right|^2.$$

В силу второго равенства из (2) получаем сразу же, что

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{\mathrm{E}}_{01} = \operatorname{rot} \overrightarrow{\mathrm{E}}_{02} = 0,$$

т. е. в предположении поверхностной односвязности области $\Omega \in \mathbb{R}^N$ приходим к выводу, что существуют такие функции $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega)$, что

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}_{01} = \nabla u, \quad \overrightarrow{\mathrm{E}}_{02} = \nabla v.$$

Кроме того, в силу первого равенства из (2) имеют место следующие равенства:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{D}}_{01} = \operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{D}}_{02} = 0.$$

Постановка задачи-3

Причем
$$\overrightarrow{\mathrm{D}}_{01}=\hat{\varepsilon}\,\overrightarrow{\mathrm{E}}_{01},\quad \overrightarrow{\mathrm{D}}_{02}=\hat{\varepsilon}\,\overrightarrow{\mathrm{E}}_{02},$$
но тогда отсюда и из (4) мы приходим к следующим уравнениям:
$$-\triangle^2 u+\triangle u+\frac{2c^2}{\omega^2}\eta\,\mathrm{div}\left(\left[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right]\nabla u\right)=0, \qquad (5)$$
$$-\triangle^2 v+\triangle v+\frac{2c^2}{\omega^2}\eta\,\mathrm{div}\left(\left[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right]\nabla v\right)=0. \qquad (6)$$
Теперь мы оговорим знак величины $\eta\in\mathbb{R}^1$, входящей в систему уравнений (5) и (6). Предположим, что $\eta<0$, тогда такая среда $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ называется *дефокусирующей* (см., например, [?]). Введем обозначение
$$0<\lambda=-\frac{2c^2}{\omega^2}\eta.$$

Постановка задачи-4

С учетом этого обозначения система уравнений (5) и (6) примет следующий вид:

$$\begin{cases} -\triangle^2 u + \triangle u = \lambda \operatorname{div}\left(\left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right] \nabla u\right), \\ -\triangle^2 v + \triangle v = \lambda \operatorname{div}\left(\left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right] \nabla v\right). \end{cases} \tag{7}$$

Предположим, что граница $\partial\Omega$ представляет собой «заземленный» и «идеальный» проводник, но тогда граничные условия примут следующий вид:

$$u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{E}}_{01}, n(x)\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{E}}_{02}, n(x)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $n_x \in \mathbb{R}^N$ — вектор нормали в точке $x \in \partial\Omega$. И мы приходим к следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n_x}\Big|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{8}$$

Слабое решение.

Определение 1. *Слабым решением задачи* (7)–(8) *назовем пару*

$$w(x) = (u(x), v(x)) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega),$$

удовлетворяющую равенству

$$\langle\langle \mathbb{D}(w), z \rangle\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega), \tag{9}$$

где $\mathbb{D}(w) = (\mathbb{D}_1(w), \mathbb{D}_2(w))$,

$$\mathbb{D}_1(w) \equiv -\triangle^2 u + \triangle u - \lambda \operatorname{div}\left(\left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right] \nabla u\right), \tag{10}$$

$$\mathbb{D}_2(w) \equiv -\triangle^2 v + \triangle v - \lambda \operatorname{div}\left(\left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right] \nabla v\right), \tag{11}$$

а $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ *— это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами* $\mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ *и* $\mathbb{H}^{-2}(\Omega) \times \mathbb{H}^{-2}(\Omega)$.

Функционалы.

Приступим к изучению слабой разрешимости рассматриваемой задачи. Введем следующие функционалы:

$$\psi(w) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left[|\triangle u|^2 + |\triangle v|^2 \right] \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right] \, dx, \quad (12)$$

$$\varphi(w) \equiv \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right]^2 \, dx \quad (13)$$

для $w = (u, v) \in \mathbb{H}^2_0(\Omega) \times \mathbb{H}^2_0(\Omega)$.

Обозначения-1.

В качестве банахова пространства $\mathbb{B}$, фигурирующего в предыдущих параграфах данной лекции, возьмем

$$\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega).$$

Сильным сопряженным к нему, очевидно, будет следующее банахово пространство:

$$\mathbb{B}^* = \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \times \mathbb{H}^{-2}(\Omega).$$

Кроме того, мы будем рассматривать банахово пространство

$$\mathbb{F} \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \times \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega).$$

Обозначения-2.

Банахово пространство $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ будем рассматривать относительно одной из эквивалентных норм:

$$\|w\| = \left(\int\limits_{\Omega} \left[|\triangle u|^2 + |\triangle v|^2 \right] \, dx \right)^{1/2}, \quad w = (u, v) \in \mathbb{B}, \qquad (14)$$

а банахово пространство $\mathbb{F} = \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \times \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ относительно нормы

$$\|w\|_1 = \left(\int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right]^2 \, dx \right)^{1/4}, \quad w = (u, v) \in \mathbb{F}. \qquad (15)$$

Дифференцируемость функционалов-1.

$$\varphi(w) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1) \quad \text{и} \quad \psi(w) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1).$$

$$\psi'_f(w) = \left(-\triangle u + \triangle^2 u, -\triangle v + \triangle^2 v\right) \in \mathbb{C}\left(\mathbb{B};\mathbb{B}^*\right). \tag{16}$$

$$\varphi'_f(w) = \left(-\operatorname{div}\left(\left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right] \nabla u\right), -\operatorname{div}\left(\left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right] \nabla v\right)\right) \tag{17}$$

Дифференцируемость функционалов-2.

Теперь заметим, что в силу предположения, что $N = 1, 2, 3$ имеет место следующее вполне непрерывное вложение:

$$\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{F} = \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \times \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega), \qquad (18)$$

кроме того, имеет место плотное вложение

$$\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} = \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \times \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega),$$

следовательно, в силу рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ и теоремы 3 первой лекции имеет место плотное вложение соответствующих сопряженных пространств:

$$\mathbb{F}^* \equiv \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{B}^* \equiv \mathbb{H}^{-2}(\Omega) \times \mathbb{H}^{-2}(\Omega).$$

Дифференцируемость функционалов-3.

Следовательно, функционал $\varphi(w)$ и его производные Фреше $\varphi'_f(w)$ и $\varphi''_{ff}(w)$ действуют следующим образом:

$$\varphi(w) : \mathbb{B} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \to \mathbb{R}^1,$$

$$\varphi'_f(w) : \mathbb{B} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \to \mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{B}^*,$$

$$\varphi''_{ff}(w) : \mathbb{B} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \to \mathcal{L}\left(\mathbb{F}; \mathbb{F}^*\right) \subset \mathcal{L}\left(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*\right).$$

Тем самым, приходим к выводу, что $\varphi(w) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$.

Многообразие $\mathcal{V}$-1.

Теперь введем многообразие $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} \equiv \{w \in \mathbb{B} : \varphi(w) = 1\}\,. \tag{19}$$

Докажем, что все точки многообразия $\mathcal{V}$ являются обыкновенными. Действительно, пусть существует такая точка $w_1 \in \mathcal{V}$, что в этой точке

$$\varphi'_f(w_1) = \theta \in \mathbb{B}^*,$$

но тогда в силу явного выражения (17) для $\varphi'_f(w)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 = \left\langle\left\langle \varphi'_f(w_1), w_1 \right\rangle\right\rangle = \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u_1|^2 + |\nabla v_1|^2\right]^2 \, dx = 4\varphi(w_1) = 4,$$

поскольку $w_1 = (u_1, v_1) \in \mathcal{V}$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\varphi'_f(w) \neq \theta \in \mathbb{B}^* \quad \text{для всех} \quad w \in \mathcal{V}. \tag{20}$$

Многообразие $\mathcal{V}$-2.

Докажем теперь, что

$$\psi'_f(w) \neq \theta \in \mathbb{B}^* \quad \text{для всех} \quad w \in \mathcal{V}.$$

Действительно, предположим, что в некоторой точке $w_1 \in \mathcal{V}$ имеет место равенство

$$\psi'_f(w_1) = \theta \in \mathbb{B}^*,$$

то в этой точке в силу явного вида (16) производной Фреше $\psi'_f(w)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 = \left\langle \left\langle \psi'_f(w_1), w_1 \right\rangle \right\rangle = 2\psi(w_1) \Rightarrow w_1 = \theta \in \mathbb{B},$$

но тогда, поскольку $w_1 \in \mathcal{V}$, имеют место равенства $1 = \varphi(w_1) = 0$, откуда заключаем, что исходное предположение не верно и, следовательно,

$$\psi'_f(w) \neq \theta \in \mathbb{B}^* \quad \text{для всех} \quad w \in \mathcal{V}. \tag{21}$$

Существование экстремума функционала ψ относительно многообразия $\mathcal{V}$.

Докажем теперь, что функционал $\psi(w)$ достигает минимума в некоторой точке $w_1 = (u_1, v_1) \in \mathcal{V}$ — многообразия

$$\mathcal{V} \equiv \{w \in \mathbb{B} : \varphi(w) = 1\},$$

$$\psi(w) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left[|\triangle u|^2 + |\triangle v|^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right] dx,$$

$$\varphi(w) \equiv \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right]^2 dx.$$

Слабая полунепрерывность снизу функционала ψ относительно многообразия $\mathcal{V}$-1.

Действительно, пусть $\{w_n\} \subset \mathcal{V}$ — это произвольная последовательность такая, что

$$w_n \rightharpoonup w \in \mathcal{V} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B},$$

тогда поскольку банахово пространство $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ вполне непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и поэтому

$$w_n \to w \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Следовательно, имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right] \, dx = \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right] \, dx,$$

где $w_n = (u_n, v_n)$, $w = (u, v)$.

Слабая полунепрерывность снизу функционала ψ относительно многообразия $\mathcal{V}$-2.

Наконец, поскольку следующая величина

$$\left(\int\limits_{\Omega}\left[|\triangle u|^2+|\triangle v|^2\right]\,dx\right)^{1/2},$$

как мы уже доказали, является нормой элемента $w=(u,v)\in\mathbb{B}=\mathbb{H}^2_0(\Omega)\times\mathbb{H}^2_0(\Omega)$, поэтому в силу слабой секвенциальной полунепрерывности нормы банахова пространства имеет место следующее предельное неравенство:

$$\liminf_{n\to+\infty}\int\limits_{\Omega}\left[|\triangle u_n|^2+|\triangle v_n|^2\right]\,dx\geqslant\int\limits_{\Omega}\left[|\triangle u|^2+|\triangle v|^2\right]\,dx.$$

Значит,

$$\liminf_{n\to+\infty}\psi(w_n)\geqslant\psi(w).$$

Слабая коэрцитивность функционала ψ.

В силу очевидного неравенства

$$\psi(w) \geqslant \frac{1}{2}\|w\|^2 \quad \text{для всех} \quad w \in \mathbb{B}$$

приходим к выводу, что функционал $\psi(w)$ является слабо коэрцитивным на всем $\mathbb{B}$.

Слабая замкнутость многообразия $\mathcal{V}$.

Действительно, пусть $\{w_n\} \subset \mathcal{V}$ и

$$w_n \rightharpoonup w \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B},$$

тогда нам нужно доказать, что $w \in \mathcal{V}$. Действительно, поскольку мы уже установили в (18) вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{F} = \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \times \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega),$$

то

$$w_n \to w \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{F} = \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \times \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega).$$

Но поскольку

$$\varphi(w_n) = \frac{1}{4}\|w_n\|_1^4,$$

где $\|\cdot\|_1$ — это норма на $\mathbb{F}$, то поэтому имеем

$$1 = \varphi(w_n) \to \varphi(w) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Следовательно, $\varphi(w) = 1$ и, значит, $w \in \mathcal{V}$.

Существование условно критической точки.

Таким образом, функционал $\psi(w)$ достигает минимума в некоторой, возможно, неединственной точке $w_1 \in \mathcal{V}$, т. е. точка w_1 является условно критической точкой функционала $\psi(w)$ относительно многообразия $\mathcal{V} \equiv \{w \in \mathbb{B} : \ \varphi(w) = 1\}$, поэтому найдется такое число $\mu = \lambda_1 \in \mathbb{R}^1$, что будет иметь место равенство

$$\psi'_f(w_1) - \lambda_1 \varphi'_f(w_1) = \theta \in \mathbb{B}^*. \tag{22}$$

Доказательство, что $\lambda_1 > 0$.

Действительно, из равенства (22) приходим к следующему равенству:

$$\left\langle\left\langle \psi'_f(w_1) - \lambda_1 \varphi'_f(w_1), w_1 \right\rangle\right\rangle = 0$$

откуда сразу же получаем

$$\left\langle\left\langle \psi'_f(w_1), w_1 \right\rangle\right\rangle = \lambda_1 \left\langle\left\langle \varphi'_f(w_1), w_1 \right\rangle\right\rangle,$$

т. е.

$$2\psi(w_1) = \lambda_1 4\varphi(w_1) = 4\lambda_1, \tag{23}$$

поскольку $w_1 \in \mathcal{V}$. Значит, $\psi(w_1) = 2\lambda_1$. Предположим, что $\psi(w_1) = 0$, но отсюда следует, что $w_1 = \theta \in \mathbb{B}$ и тогда $1 = \varphi(w_1) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\psi(w_1) > 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}\psi(w_1) > 0.$$

Лемма о слабом решении.

Теперь заметим, что равенство (22) эквивалентно равенству

$$\left\langle\left\langle \psi'_f(w_1) - \lambda_1 \varphi'_f(w_1), h \right\rangle\right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad h = (h_1, h_2) \in \mathbb{B}. \tag{24}$$

Но тогда, с учетом явного вида (16) и (17) производных Фреше $\psi'_f(w)$ и $\varphi'_f(w)$, мы приходим к выводу, что найденная точка $w_1 = (u_1, v_1) \in \mathcal{V}$ является слабым решением исходной задачи в смысле определения 1, соответствующего собственному значению $\lambda = \lambda_1 > 0$.

Тем самым, нами доказано следующее утверждение.

Лемма

Функционал $\psi(w)$ достигает минимального значения $2\lambda_1 > 0$ на многообразии $\mathcal{V}$ в некоторой точке $w_1 \in \mathcal{V}$.

Основная теорема.

Теорема

Пусть функционал $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *является ограниченным снизу на* $\mathcal{V}$, *причем*

$$d \geqslant \inf_{u\in\mathcal{V}} \psi(u).$$

Пусть, кроме того, для всех

$$c \in \left[\inf_{u\in\mathcal{V}} \psi(u), d\right]$$

функционал ψ *удовлетворяет условию* $(\mathrm{PS_c})$ *на многообразии* $\mathcal{V}$. *Тогда функционал* ψ *достигает минимума на* $\mathcal{V}$, *причем* ψ *имеет по меньшей мере* $\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^d)$ *критических точек на* $\mathcal{V}$.

Условие Пале–Смейла.

Приступим к доказательству того факта, что функционал $\psi(w)$ удовлетворяет условию $(\mathrm{PS_c})$ на многообразии $\mathcal{V}$ при $c \geqslant 2\lambda_1$. Действительно, пусть последовательность $\{w_n\} \subset \mathcal{V}$ — это произвольная последовательность такая, что

$$\psi(w_n) \to c \quad \text{и} \quad \left\|\psi_f'(w_n)\right\|_* (\mathrm{T}_{w_n}\mathcal{V}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \quad (25)$$

Проверка условия Пале–Смейла-1.

Из первого условия вытекает, что последовательность ограничена по норме банахова пространства

$$\mathbb{B} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega).$$

Тогда в силу рефлексивности этого банахова пространства и теоремы 4 Лекции 1 у последовательности $\{w_n\}$ существует подпоследовательность $\{w_{n_k}\} \subset \{w_n\}$ такая, что

$$w_{n_k} \rightharpoonup w \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}. \tag{26}$$

Для удобства в дальнейшем найденную подпоследовательность $\{w_{n_k}\}$ будем обозначать снова через $\{w_n\}$.

Проверка условия Пале–Смейла-2.

Заметим, что ранее мы доказали слабую секвенциальную замкнутость многообразия $\mathcal{V}$ и поэтому $w \in \mathcal{V}$. Для дальнейшего нам необходимо доказать следующую формулу:

$$\varphi(w_n)\left\langle\left\langle \psi'_f(w_n), z\right\rangle\right\rangle - \frac{1}{2}\psi(w_n)\left\langle\left\langle \varphi'_f(w_n), z\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle \psi'_f(w_n), y_n\right\rangle\right\rangle, \tag{27}$$

где $\{y_n\} \subset \mathrm{T}_{w_n}\mathcal{V}$ — это некоторая ограниченная последовательность, зависящая от $z: \; \|z\| \leqslant R$ и $\{w_n\} \subset \mathbb{B}$.

Доказательство формулы-1.

□ Действительно, представим z принадлежащего шару $\|z\| \leqslant R$ банахова пространства $\mathbb{B}$ в следующем виде:

$$z = t_n w_n + y_n, \quad \text{причем} \quad y_n \in \mathrm{T}_{w_n}\mathcal{V}.$$

Докажем, что найдется такая независящая от $n \in \mathbb{N}$ постоянная $c_7(R) > 0$, что

$$\|y_n\| \leqslant c_7(R) < +\infty \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство формулы-2.

Заметим, что в силу определения $\{y_n\}$ справедливо следующее равенство:

$$t_n \left\langle \left\langle \varphi_f^{'}(w_n), w_n \right\rangle \right\rangle = \left\langle \left\langle \varphi_f^{'}(w_n), z \right\rangle \right\rangle,$$

т. е. в силу явного выражения (17) для производной Фреше $\varphi_f^{'}(w)$ справедливо равенство

$$t_n = \frac{1}{4} \left\langle \left\langle \varphi_f^{'}(w_n), z \right\rangle \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 \right] \left[(\nabla u_n, \nabla z_1) + (\nabla v_n, \nabla z_2) \right] dx, \quad (28)$$

где $w_n = (u_n, v_n)$ и $z = (z_1, z_2)$.

Доказательство формулы-3.

Докажем, что последовательность чисел $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^1$ является ограниченной. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
|t_n| \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right] \left[|\nabla u_n||\nabla z_1| + |\nabla v_n||\nabla z_2|\right] dx = \\
= c_1 \int\limits_{\Omega} \Big[|\nabla u_n|^3 |\nabla z_1| + |\nabla u_n|^2 |\nabla v_n||\nabla z_2| + \\
+ |\nabla v_n|^2 |\nabla u_n||\nabla z_1| + |\nabla v_n|^3 |\nabla z_2|\Big] dx = \\
= c_1 \left(\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4\right). \quad (29)
\end{aligned}
$$

Доказательство формулы-4.

Рассмотрим первое слагаемое. Воспользуемся неравенством Гельдера и получим следующую цепочку неравенств:

$$\mathrm{I}_1 = \int\limits_\Omega |\nabla u_n|^3 |\nabla z_1|\, dx \leqslant \left(\int\limits_\Omega |\nabla u_n|^{3p_1}\ dx \right)^{1/p_1} \left(\int\limits_\Omega |\nabla z_1|^{p_2}\ dx \right)^{1/p_2}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega |\nabla u_n|^4\ dx \right)^{3/4} \left(\int\limits_\Omega |\nabla z_1|^4\ dx \right)^{1/4} \leqslant |||\nabla u_n|||_4^3\, |||\nabla z_1|||_4\,,$$

где мы взяли

$$p_1 = \frac{4}{3}, \quad p_2 = 4, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1.$$

Доказательство формулы-5.

Теперь заметим, что поскольку последовательность $\{w_n\} = \{(u_n, v_n)\}$ является ограниченной в $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega)$, то и последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ являются ограниченными в $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$. Но пространство $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$ вполне непрерывно, а значит, и ограничено, вложено в $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$, поэтому последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ ограничены в $\mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$. Следовательно,

$$\|\,|\nabla u_n|\,\|_4 \leqslant c_1 < +\infty, \quad \|\,|\nabla v_n|\,\|_4 \leqslant c_2 < +\infty,$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство формулы-6.

Кроме того, для $z = (z_1, z_2)$ принадлежит по условию ограниченному множеству $\|z\| \leqslant R$ банахова пространства $\mathbb{B} = \mathbb{H}^2_0(\Omega) \times \mathbb{H}^2_0(\Omega)$. Тем самым, по тем же причинам имеют место следующие неравенства:

$$|||\nabla z_1|||_4 \leqslant c_3(R) < +\infty, \quad |||\nabla z_2|||_4 \leqslant c_4(R) < +\infty.$$

Стало быть, интеграл I_1 ограничен числом, не зависящим от $n \in \mathbb{N}$. Аналогичным образом доказывается ограниченность интеграла I_4.

Доказательство формулы-7.

Рассмотрим теперь второй интеграл. Для его оценки воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера и получим следующую цепочку неравенств:

$$\mathrm{I}_2 = \int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^2 |\nabla v_n| |\nabla z_2| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{2r_1} \, dx \right)^{1/r_1} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v_n|^{r_2} \, dx \right)^{1/r_2} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla z_2|^{r_3} \, dx \right)^{1/r_3},$$

где мы положим

$$r_1 = 2, \; r_2 = 4, \; r_3 = 4, \; \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1,$$

и получим для I_2 следующую оценку:

$$\mathrm{I}_2 \leqslant |||\nabla u_n|||_4^2 \, |||\nabla v_n|||_4 \, |||\nabla z_2|||_4 \leqslant c_5(R) < +\infty.$$

Доказательство формулы-8.

Аналогичным образом оценивается интеграл I_3. Следовательно, из (29) получаем, что числовая последовательность $\{t_n\}$ является ограниченной:

$$|t_n| \leqslant c_6(R) < +\infty.$$

Стало быть, справедлива цепочка неравенств

$$\|y_n\| \leqslant \|z - t_n w_n\| \leqslant \|z\| + |t_n|\|w_n\| \leqslant c_7(R) < +\infty.$$

Доказательство формулы-9.

Тогда после подстановки выражения $z = t_n w_n + y_n$ в левую часть (27) и получим следующую цепочку равенств:

$$
\begin{aligned}
&\varphi(w_n)\left\langle\left\langle\psi_f'(w_n), z\right\rangle\right\rangle - \frac{1}{2}\psi(w_n)\left\langle\left\langle\varphi_f'(w_n), z\right\rangle\right\rangle = \\
&\quad = \varphi(w_n)\left\langle\left\langle\psi_f'(w_n), w_n\right\rangle\right\rangle t_n + \varphi(w_n)\left\langle\left\langle\psi_f'(w_n), y_n\right\rangle\right\rangle - \\
&\quad - \frac{1}{2}\psi(w_n)\left\langle\left\langle\varphi_f'(w_n), w_n\right\rangle\right\rangle t_n = 2\psi(w_n)t_n - 2\psi(w_n)t_n + \\
&\qquad + \left\langle\left\langle\psi_f'(w_n), y_n\right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle\psi_f'(w_n), y_n\right\rangle\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Тем самым, формула (27) доказана. ⊠

Итак нами доказана формула.

$$\varphi(w_n)\left\langle\left\langle\psi'_f(w_n),z\right\rangle\right\rangle-\frac{1}{2}\psi(w_n)\left\langle\left\langle\varphi'_f(w_n),z\right\rangle\right\rangle=\left\langle\left\langle\psi'_f(w_n),y_n\right\rangle\right\rangle,$$

где $\{y_n\}\subset \mathrm{T}_{w_n}\mathcal{V}$ — это некоторая ограниченная последовательность, зависящая от $z:\ \|z\|\leqslant R$ и $\{w_n\}\subset\mathbb{B}$.

Правая часть.

Теперь докажем, что

$$\left\langle\left\langle \psi_f'(w_n), y_n \right\rangle\right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Действительно, это следствие второго условия в (25). Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\left\langle\left\langle \psi_f'(w_n), y_n \right\rangle\right\rangle\right| \leqslant \left\|\psi_f'(w_n)\right\|_* (\mathrm{T}_{w_n}\mathcal{V}) \|y_n\| \leqslant$$
$$\leqslant c_7(R) \left\|\psi_f'(w_n)\right\|_* (\mathrm{T}_{w_n}\mathcal{V}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку по построению $\{y_n\} \in \mathrm{T}_{w_n}\mathcal{V}$ и $\|y_n\| \leqslant c_7(R)$.

Правая часть.

Следовательно, из формулы (27) вытекает предельное равенство

$$\varphi(w_n)\left\langle\left\langle\psi'_f(w_n), z\right\rangle\right\rangle - \frac{1}{2}\psi(w_n)\left\langle\left\langle\varphi'_f(w_n), z\right\rangle\right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{30}$$

равномерно по $z \in \mathbb{B}$ из произвольного конечного шара $\|z\| \leqslant R$.

Применение полученной формулы-1.

Теперь посмотрим как воспользоваться полученной формулой (30) для доказательства сильной сходимости выбранной подпоследовательности $\{w_n\} \subset \mathcal{V}$.

Действительно, обозначим через $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_1$ скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{F} \equiv \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \times \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$ и $\mathbb{F}^* \equiv \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega) \times \mathbb{W}^{-1,4/3}(\Omega)$.

Заметим, что банахово пространство $\mathbb{B} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ плотно вложено в банахово пространство $\mathbb{F}$, причем банахово пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно, поэтому в силу теоремы 4 второй лекции имеет место равенство скобок двойственностей:

$$\langle\langle f^*, w \rangle\rangle = \langle\langle f^*, w \rangle\rangle_1 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*, w \in \mathbb{B}. \qquad (31)$$

Применение полученной формулы-2.

Рассмотрим отдельно второе слагаемое в предельной формуле (30), которое имеет следующий вид:

$$-\frac{1}{2}\psi(w_n)\left\langle\left\langle\varphi_f'(w_n), z\right\rangle\right\rangle. \tag{32}$$

Заметим, что для последовательности $\{w_n\} \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{B} \subset \mathbb{F}$ имеем

$$\left\{\varphi_f'(w_n)\right\} \subset \mathbb{F}^*. \tag{33}$$

С другой стороны, $z \in \mathbb{B}$ и поэтому мы можем для выражения (32) в силу (31) получить равенство

$$-\frac{1}{2}\psi(w_n)\left\langle\left\langle\varphi_f'(w_n), z\right\rangle\right\rangle = -\frac{1}{2}\psi(w_n)\left\langle\left\langle\varphi_f'(w_n), z\right\rangle\right\rangle_1. \tag{34}$$

Применение полученной формулы-3.

Докажем теперь, что последовательность (33) является ограниченной в $\mathbb{F}^*$. Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\left\|\varphi'_f(w_n)\right\|_{1*} = \sup_{\|z\|_1 \leqslant 1} \left|\left\langle\left\langle \varphi'_f(w_n), z \right\rangle\right\rangle_1\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sup_{\|z\|_1 \leqslant 1} \int\limits_\Omega \left[|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2\right] \left[|\nabla u_n||\nabla z_1| + |\nabla v_n||\nabla z_2|\right] dx.$$

Далее пользуемся уже полученными оценками для выражения (29). Теперь возьмем в качестве $z \in \mathbb{B}$ в равенстве (34) разность $z = w_n - w$ и получим, что

$$-\frac{1}{2}\psi(w_n)\left\langle\left\langle \varphi'_f(w_n), w_n - w \right\rangle\right\rangle_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \qquad (35)$$

Применение полученной формулы-4.

Действительно, предельная формула (35) является следствием таких рассуждений. Банахово пространство $\mathbb{B} = \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ вполне непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{F} = \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega) \times \mathbb{W}_0^{1,4}(\Omega)$, а последовательность $\{w_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к w в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, поэтому

$$w_n \to w \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{F}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{2}\psi(w_n)\left\langle\left\langle\varphi'_f(w_n), w_n - w\right\rangle\right\rangle_1\right| \leqslant \frac{1}{2}\psi(w_n)\left\|\varphi'_f(w_n)\right\|_{1*}\|w_n - w\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_2\|w_n - w\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где $c_1 > 0$ и не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Здесь мы воспользовались ограниченностью числовой последовательности $\{\psi(w_n)\}$, которая вытекает из первого условия $(\mathrm{PS})_c$ (25).

Применение полученной формулы-5.

Итак, возьмем в правой части предельной формулы (30) $z = w_n - w$ и получим выражение

$$\mathrm{I}_n = \left\langle \left\langle \psi'_f(w_n), w_n - w \right\rangle \right\rangle - \frac{1}{2}\psi(w_n) \left\langle \left\langle \varphi'_f(w_n), w_n - w \right\rangle \right\rangle_1 . \quad (36)$$

Рассмотрим теперь числовую последовательность

$$\left\langle \left\langle \psi'_f(w), w_n - w \right\rangle \right\rangle .$$

Докажем, что она стремится к нулю при $n \to +\infty$. Действительно,

$$\psi'_f(w) \in \mathbb{B}^*,$$

а по доказанному последовательность $\{w_n\} \subset \mathbb{B}$ сходится слабо к $w \in \mathbb{B}$ в $\mathbb{B}$. Значит,

$$\left\langle \left\langle \psi'_f(w), w_n - w \right\rangle \right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \quad (37)$$

Применение полученной формулы-6.

Теперь перепишем формулу (36) в эквивалентном виде

$$\mathrm{I}_n = \left\langle\left\langle \psi_f'(w_n) - \psi_f'(w), w_n - w \right\rangle\right\rangle + \\ + \left\langle\left\langle \psi_f'(w), w_n - w \right\rangle\right\rangle - \frac{1}{2}\psi(w_n) \left\langle\left\langle \varphi_f'(w_n), w_n - w \right\rangle\right\rangle_1 ,$$

из которого получим следующее выражение

$$\left\langle\left\langle \psi_f'(w_n) - \psi_f'(w), w_n - w \right\rangle\right\rangle = \mathrm{I}_n - \left\langle\left\langle \psi_f'(w), w_n - w \right\rangle\right\rangle + \\ + \frac{1}{2}\psi(w_n) \left\langle\left\langle \varphi_f'(w_n), w_n - w \right\rangle\right\rangle_1 ,$$

правая часть которого стремится к нулю при $n \to +\infty$ в силу предельных формул (30), (37) и (35).

Применение полученной формулы-7.

Значит, мы пришли к предельной формуле

$$\left\langle\left\langle \psi_f'(w_n) - \psi_f'(w), w_n - w \right\rangle\right\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

В силу явного вида (16) производной Фреше $\psi_f'(w)$, после «интегрирования по частям» получим выражение

$$\left\langle\left\langle \psi_f'(w_n) - \psi_f'(w), w_n - w \right\rangle\right\rangle =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \Big[|\triangle u_n - \triangle u|^2 + |\triangle v_n - \triangle v|^2 +$$
$$+ |\nabla u_n - \nabla u|^2 + |\nabla v_n - \nabla v|^2 \Big]\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Применение полученной формулы-8.

Но это означает, что

$$w_n = (u_n, v_n) \to w = (u, v) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B},$$

причем $w \in \mathcal{V}$.
Таким образом, нами доказано, что функционал $\psi(w)$ удовлетворяет условию $(\mathrm{PS_c})$ относительно многообразия $\mathcal{V}$ для всех $c \geqslant 2\lambda_1$.

Четные функционалы-1.

Заметим, что функционалы $\varphi(w)$ и $\psi(w)$ являются четными, поэтому мы можем отождествить диаметрально противоположные точки многообразия $\mathcal{V}$. Поэтому введем в рассмотрение банахово пространство

$$\mathbb{X} \equiv \{x = [w, -w] : \ w \in \mathbb{B}\}$$

с нормой $\|x\|_{\mathbb{X}} = \|w\|$. Определим функционалы на $\mathbb{X}$ следующим образом:

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi(w) \quad \text{и} \quad \psi_1(x) \equiv \psi(w) \quad \text{для всех} \quad x = [w, -w] \in \mathbb{X}.$$

Рассмотрим теперь многообразие $\mathcal{V}_1 \subset \mathbb{X}$:

$$\mathcal{V}_1 \equiv \{x \in \mathbb{X} : \ \varphi_1(x) = 1\}.$$

Четные функционалы-2.

Сильным сопряженным пространством $\mathbb{X}^*$ к банахову пространству $\mathbb{X}$ — есть следующее множество:

$$\mathbb{X}^* \equiv \{x^* = [f^*, -f^*] : \ f^* \in \mathbb{B}^*\} .$$

Со следующими скобками двойственности между $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}^*$:

$$(x^*, x) \equiv \langle\langle f^*, w \rangle\rangle .$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что функционалы $\psi_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 8 шестой лекции, в которой функционал $\psi_1(x)$ рассматривается на многообразии $\mathcal{V}_1$.

Теория Люстерника–Шнирельмана-1.

Теперь наша задача доказать, что

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}_1}(\mathcal{V}_1) = +\infty. \tag{38}$$

С этой целью заметим, что на $k-$мерном банаховом пространстве $\mathbb{X}_k \subset \mathbb{X}$ все нормы эквивалентны, поэтому

$$\mathbb{P}^k \equiv \mathbb{X}_k \cap \mathcal{V}_1$$

— это есть конечномерное проективное пространство. Заметим, что в силу результата примера 3 шестой лекции имеет место равенство

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{P}^k}\left(\mathbb{P}^k\right) = k + 1.$$

Теория Люстерника–Шнирельмана-2.

Заметим, что банахово пространство $\mathbb{B} \equiv \mathbb{H}^2_0(\Omega) \times \mathbb{H}^2_0(\Omega)$ является сепарабельным, значит, сепарабельным является и банахово пространство $\mathbb{X}$. Поэтому существуют такие конечномерные банаховы пространства $\mathbb{X}_k \subset \mathbb{X}$, что

$$\mathbb{X}_k \subset \mathbb{X}_{k+1}, \quad \mathbb{X} = \operatorname*{induct}_{k \to +\infty} \mathbb{X}_k.$$

Стало быть, имеет место предельное равенство

$$\operatorname*{induct}_{k \to +\infty} \mathbb{X}_k \cap \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1.$$

Теория Люстерника–Шнирельмана-3.

Следовательно,

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{cat}_{\mathbb{X}_k\cap\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{X}_k\cap\mathcal{V}_1\right) = \operatorname{cat}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathcal{V}_1\right),$$

но тогда

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathcal{V}_1\right) = +\infty,$$

поскольку

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{X}_k\cap\mathcal{V}_1}\left(\mathbb{X}_k\cap\mathcal{V}_1\right) = \operatorname{cat}_{\mathbb{P}^k}\left(\mathbb{P}^k\right) = k+1.$$

Стало быть, выполнено равенство (38).

Теория Люстерника–Шнирельмана-4.

Рассмотрим теперь произвольное число $d \geqslant 2\lambda_1$ и соответствующее множество:

$$(\psi_1)^d \equiv \{x \in \mathbb{X} : \ \psi_1(x) = \psi(w) \leqslant d\}\,.$$

Заметим, что имеет место равенство множеств

$$\psi_1^d = (\psi_1)^d \cap \mathcal{V}_1,$$

где напомним

$$\psi_1^d \equiv \{x \in \mathcal{V}_1 : \ \psi_1(x) = \psi(w) \leqslant d\}\,.$$

Кроме того, очевидно, имеет место вложение

$$(\psi_1)^{d_1} \subset (\psi_1)^{d_2} \quad \text{при} \quad d_1 \leqslant d_2.$$

Теория Люстерника–Шнирельмана-5.

Нетрудно проверить, что поскольку имеет место неравенство

$$c_1\|w\| \geqslant (2\psi(w))^{1/2} \geqslant \|w\|,$$

где $\|w\|$ — является нормой на банаховом пространстве $\mathbb{B}$, то множеству $(\psi_1)^d$ принадлежит шар из банахова пространства $\mathbb{X}$ радиуса $c_1(2d)^{1/2}$ с центром в точке $[\theta, -\theta] \in \mathbb{X}$, где $\theta \in \mathbb{B}$. Следовательно,

$$\mathcal{V}_1 \subset \operatorname*{induct}_{n\to+\infty} (\psi_1)^{d_n}, \quad d_n = 2\lambda_1 n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Теория Люстерника–Шнирельмана-6.

Заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_1}\left(\mathcal{V}_1 \cap (\psi_1)^{d_n}\right) = \operatorname{cat}_{\mathcal{V}_1} \psi_1^{d_n}.$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{cat}_{\mathcal{V}_1} \psi_1^{d_n} = +\infty,$$

поскольку

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_1}(\mathcal{V}_1) = +\infty \quad \text{и} \quad \mathcal{V}_1 = \operatorname*{induct}_{n\to+\infty}\left((\psi_1)^{d_n} \cap \mathcal{V}_1\right).$$

Итак, основная теорема.

Теорема

Нелинейная краевая задача (7), (8), *понимаемая в слабом смысле определения* 11, *имеет не менее, чем счетное множество геометрически разных собственных функций* $w_k \in \mathbb{B} \equiv \mathbb{H}_0^2(\Omega) \times \mathbb{H}_0^2(\Omega)$, *принадлежащих многообразию* $\mathcal{V} \equiv \{w \in \mathbb{B} : \ \varphi(w) = 1\}$ *и соответствующих собственным значениям* $\lambda_k > 0$ *при* $k \in \mathbb{N}$, *причем*

$$\psi(w) \geqslant 2\lambda_1 > 0 \quad \text{для всех} \quad w \in \mathcal{V}$$

и равенство достигается на первой собственной функции $w_1 \in \mathcal{V}$, *соответствующей первому собственному значению* $\lambda_1 > 0$.