Лекция 6. Вариационные методы. Условный экстремум.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

27 ноября 2013 г.

Введение

Довольно часто тот функционал, который непосредственно соответствует исходной нелинейной краевой задаче не является ограниченным не снизу не сверху, поэтому, естественно, у него нет экстремальных точек на заданном банаховом пространстве, но, с другой стороны, исходной краевой задаче можно сопоставить вариационную задачу на условный экстремум такую, что будут выполнены все условия теоремы 4 предыдущей лекции и с необходимостью экстремаль этой вариационной задачи будет удовлетворять уравнению Лагранжа. Кроме того, мы рассмотрим в этой лекции теорию Люстерника–Шнирельмана.

Обозначения

Пусть

$$\varphi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1 \quad \text{и} \quad \psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$$

— это функционалы, определенные на банаховом пространстве $\mathbb{B}$. Рассмотрим многообразие в $\mathbb{B}$, задаваемое уравнением

$$\mathrm{V}_c \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \varphi(u) = c\} \quad \text{при} \quad c \in \mathbb{R}^1.$$

Определение условного экстремума.

Определение 1. *Точка* $u_0 \in \mathrm{V}_c$ *называется точкой минимума* (*максимума*) *функционала* ψ *относительно многообразия* V_c, *если найдется такая окрестность*

$$\mathrm{U}(u_0) \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \|u - u_0\| \leqslant r\}$$

при некотором $r > 0$, *что*

$$\psi(u) \geqslant \psi(u_0) \ (\leqslant \psi(u_0)) \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathrm{V}_c \cap \mathrm{U}(u_0).$$

Далее мы будем рассматривать тот важный случай, когда функционалы ψ и φ являются дифференцируемыми по Фреше в точке $u_0 \in \mathrm{V}_c$. Дадим определения.

Определение 2. *Точка $u_0 \in \mathrm{V}_c$ называется обыкновенной точкой многообразия V_c, если*

$$\left\|\varphi'_f(u_0)\right\| > 0.$$

Определение 3. *Точка $u_0 \in \mathrm{V}_c$ называется условно критической точкой функционала ψ относительно многообразия V_c, если найдется такое число $\mu \in \mathbb{R}^1$, что*

$$\psi'_f(u_0) = \mu\varphi'_f(u_0).$$

Теорема Лагранжа.

Теорема

Пусть функционалы φ *и* ψ *являются дифференцируемыми по Фреше в точке* $u_0 \in \mathbb{B}$*, причем точка* $u_0 \in \mathbb{B}$ *является обыкновенной точкой многообразия* $\varphi(u) = \varphi(u_0)$:

$$\left\|\varphi'_f(u_0)\right\| > 0,$$

тогда, если точка $u_0 \in \mathbb{B}$ *является точкой условного экстремума функционала* ψ *относительно многообразия*

$$\mathrm{V}_{c_0} \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \varphi(u) = \varphi(u_0) = c_0\},$$

то точка $u_0 \in \mathrm{V}_{c_0}$ *является условно критической, т. е. найдется такое* $\mu \in \mathbb{R}^1$*, что*

$$\psi'_f(u_0) = \mu\varphi'_f(u_0).$$

Доказательство теоремы Лагранжа-1.

Доказательство в общем случае будет предложено в следующем параграфе в связи с рассмотрением теории категорий Люстерника–Шнирельмана, а сейчас мы докажем ее для одного важного случая, когда $\mathbb{B} = \mathbb{H}$ — это вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, а функционал $\varphi(u) = (u, u)$, а точка $u_0 \in \mathbb{S}_a$:

$$\mathbb{S}_a \equiv \left\{u \in \mathbb{H} : \varphi(u) = (u, u) = a^2\right\} \quad \text{при} \quad a > 0.$$

Прежде всего докажем, что каждая точка сферы $\mathbb{S}_a$ является обыкновенной точкой. Действительно,

$$\varphi(u + h) - \varphi(u) = (u + h, u + h) - (u, u) = 2(u, h) + (h, h),$$

т. е.

$$\varphi_f^{'}(u) = 2u \Rightarrow \left\|\varphi_f^{'}(u)\right\| = \sqrt{(2u, 2u)} = 2\|u\| = 2a > 0.$$

Доказательство теоремы Лагранжа-2.

Предположим, что точка $u_0 \in \mathbb{H}$ является точкой условного экстремума функционала

$$\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1$$

относительно многообразия $\mathbb{S}_a$. Докажем, что в этом случае найдется такое число $\mu \in \mathbb{R}^1$, что

$$\psi'_f(u_0) = \frac{\mu}{2}\varphi'_f(u_0) = \mu u_0.$$

С этой целью рассмотрим одномерное подпространство $\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H}$, где

$$\mathbb{H}_1 \equiv \left\{\lambda u_0 : \ \lambda \in \mathbb{R}^1\right\}.$$

Пусть $\mathbb{H}_2$ — это ортогональное дополнение $\mathbb{H}_1$ в $\mathbb{H}$, т. е. для $\mathbb{H}$ имеет место ортогональное разложение:

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2.$$

Доказательство теоремы Лагранжа-3.

Пусть, кроме того, $h \in \mathbb{H}_2$ — это произвольный вектор, принадлежащий сфере $\mathbb{S}_a$, т. е. $\|h\| = a > 0$. Рассмотрим теперь следующий вектор:

$$u = (1 + \alpha\varepsilon)u_0 + \varepsilon h. \tag{1}$$

Потребуем, чтобы этот вектор лежал на сфере $\mathbb{S}_a$:

$$\|u\|^2 = a^2 \Rightarrow (1 + \varepsilon\alpha)^2 a^2 + \varepsilon^2 a^2 = a^2,$$

где мы воспользовались тем, что $u_0 \perp h$. Таким образом, приходим к следующему уравнению:

$$(1 + \varepsilon\alpha)^2 + \varepsilon^2 = 1 \Rightarrow \varepsilon\alpha^2 + 2\alpha + \varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Из этих двух корней выбираем

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Доказательство теоремы Лагранжа-4.

Заметим, что

$$\alpha = -\frac{1}{2}\varepsilon + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Теперь, поскольку функционал

$$\psi(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1$$

является (по условию) дифференцируемым по Фреше в точке $u_0 \in \mathbb{S}_a$, то для всех $u \in \mathbb{S}_a$ вида (1) справедливо представление

$$\psi(u) - \psi(u_0) = \Big(\psi'_f(u_0), u - u_0\Big) + \omega(u_0, u - u_0), \qquad (2)$$

из которого в силу (1) получим равенство

$$\psi(u) - \psi(u_0) = \Big(\psi'_f(u_0), \alpha\varepsilon u_0 + \varepsilon h\Big) + \omega(u_0, \alpha\varepsilon u_0 + \varepsilon h),$$

причем

$$\alpha\varepsilon = \bar{\bar{o}}(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \omega(u_0, \alpha\varepsilon u_0 + \varepsilon h) = \bar{\bar{o}}(\varepsilon),$$

Доказательство теоремы Лагранжа-5.

поэтому приходим к равенству

$$\psi(u) - \psi(u_0) = \varepsilon \left(\psi'_f(u_0), h\right) + \overline{\overline{o}}(\varepsilon).$$

Но по условию теоремы в точке $u = u_0 \in \mathbb{S}_a$ у функционала ψ имеется условный экстремум относительно сферы $\mathbb{S}_a$, поэтому при достаточно малом $\varepsilon > 0$ знак левой части должен сохранятся для всех $u \in \mathbb{S}_a$ с такими малыми $\varepsilon > 0$, но это с необходимостью возможно при условии, что

$$\left(\psi'_f(u_0), h\right) = 0 \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{H}_2,$$

т. е.

$$\psi'_f(u_0) \in \mathbb{H}_1 \Rightarrow \psi'_f(u_0) = \mu u_0 \quad \text{при некотором} \quad \mu \in \mathbb{R}^1.$$

Теорема доказана.

Важный пример. Постановка задачи.

Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу:

$$\begin{cases} -\triangle u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{в} \quad \Omega, \\ \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$ при $\delta \in (0,1]$. Предположим также, что

$$2 < p < \frac{2N}{N-2}, \tag{4}$$

тогда в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{H}^1_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^p(\Omega) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

Постановка задачи на условный экстремум.

Прежде чем приступать к исследованию этой краевой задачи заметим, что функционал

$$\mathrm{E}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\Omega} |u|^2\,dx - \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^p\,dx,$$

производная Фреше $\mathbb{E}'_f(u)$ которого удовлетворяет уравнению

$$\left\langle \mathrm{E}'_f(u), v \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$$

и это и есть слабая постановка задачи (3), однако, этот функционал не является ограниченным не снизу не сверху, и поэтому, естественно, он не достигает ни минимума ни максимума на $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Тем не менее, рассматриваемая нелинейная краевая задача допускает вариационную постановку на *условный экстремум*. Но сначала, как всегда, дадим определение слабого решения краевой задачи (3).

Слабое решение.

Определение 4. *Слабым решением задачи* (3) *назовем функцию* $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, *удовлетворяющую следующему равенству*

$$\left\langle -\triangle u + \lambda u - |u|^{p-2}u, v \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{5}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— это скобки двойственности между гильбертовыми пространствами* $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *и* $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Плотные вложения-1.

Заметим, что в примере 2 четвертой лекции нами было доказано, что оператор

$$\triangle_p : \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \geqslant 2.$$

Но при $p = 2$ оператор $\triangle_p = \triangle$, поэтому

$$\triangle : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \equiv \mathbb{W}^{1,2}_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \equiv \mathbb{W}^{-1,2}(\Omega). \tag{6}$$

Теперь заметим, что имеет место следующая цепочка плотных вложений:

$$\mathbb{H}^1_0(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^p(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad p \in [2, 2^*) . \tag{7}$$

Плотные вложения-2.

Действительно, это следствие теоремы 3 второй лекции, поскольку $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $\mathbb{L}^p(\Omega)$ при указанных условиях рефлексивные пространства, причем имеют место следующие плотные вложения:

$$\mathbb{H}^1_0(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^p(\Omega) \Rightarrow \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\mathbb{L}^p(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^2(\Omega) \Rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^{p'}(\Omega).$$

Кроме того, в силу теоремы 4 второй лекции имеют место следующие равенства:

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)u(x)\,dx \quad \forall \quad u(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega),\; f(x) \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)u(x)\,dx \quad \forall \quad u(x) \in \mathbb{H}^1_0(\Omega),\; f(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Плотные вложения-3.

Теперь заметим, что нелинейный оператор

$$|u|^{p-2}u : \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad p > 2, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Действительно,

$$\int\limits_{\Omega} \left||u(x)|^{p-2}u(x)\right|^{p'} dx = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{(p-1)p'} dx = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx.$$

Следовательно,

$$|u|^{p-2}u : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^p(\Omega) \to \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Наконец, единичный оператор

$$\mathrm{I}u : \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega),$$

но опять в силу цепочки вложений (7) приходим к выводу, что

$$\mathrm{I}u : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^2(\Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Плотные вложения-4.

Таким образом, приходим к выводу, что при условии (4) нелинейный оператор

$$-\triangle u + \lambda u - |u|^{p-2}u : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Поэтому определение 4 слабого решения корректно.

Задача на условный экстремум.

Теперь сопоставим краевой задаче (5), понимаемой в слабом смысле (5) следующую вариационную задачу на условный экстремум. Рассмотрим функционал

$$\psi(u) \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u(x)|^2 + \lambda |u(x)|^2 \right) \, dx \tag{8}$$

на гильбертовом пространстве $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ и многообразие

$$\mathrm{V} \equiv \left\{ u \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) : \varphi(u) \equiv \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx = 1 \right\}. \tag{9}$$

Полунепрерывность функционала-1.

Прежде всего проверим, что функционал $\psi(u)$ слабо секвенциально полунепрерывным снизу на V. Итак, пусть

$$\{u_n\} \subset \mathrm{V} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

причем

$$u_n \rightharpoonup u \in \mathrm{V} \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

но тогда

$$\liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n) \geqslant \psi(u).$$

Действительно, это следствие того факта, что

$$\liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 \, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

Полунепрерывность функционала-2.

поскольку

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

— это норма на $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Кроме того, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{H}^1_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega),$$

поэтому

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Значит,

$$\lambda \int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^2 \, dx \to \lambda \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Слабая секвенциальная полунепрерывность снизу для функционала ψ доказана.

Замкнутость множества.

Теперь докажем, что множество V слабо замкнуто. Действительно, пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{V}$ и

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{H}^1_0(\Omega),$$

но по предположению (4) имеет место следующее вполне непрерывное вложение:

$$\mathbb{H}^1_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{L}^p(\Omega),$$

поэтому

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(\Omega),$$

но тогда

$$1 = \int\limits_{\Omega} |u_n(x)|^p \, dx \to \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx.$$

Значит,

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx = 1, \quad \text{т. е.} \quad u \in \mathrm{V}.$$

Слабая коэрцитивность.

Теперь докажем слабую коэрцитивность функционала $\psi(u)$ на V. Действительно, в силу неравенства Фридрихса имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx \geqslant \lambda_1 \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\,dx \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}^1_0(\Omega),$$

где $0 < \lambda_1$ — это первое собственное значение оператора $-\triangle$ с однородным условием Дирихле. Поэтому для функционала $\psi(u)$ при $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$ справедлива следующая оценка снизу:

$$\psi(u) \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx + \frac{\lambda}{2\lambda_1} \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx.$$

А в случае $\lambda \geqslant 0$ коэрцитивность этого функционала очевидна.

Многообразие $\mathrm{V} - 1$.

Осталось проверить, что все точки многообразия V являются обыкновенными. Действительно, рассмотрим функционал

$$\varphi(u) = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx.$$

Его производная Фреше имеет вид

$$\varphi_f'(u) = p|u|^{p-2}u.$$

С одной стороны,

$$\left\|\varphi_f'(u)\right\|_* = \sup_{\|\nabla v\|_2 \leqslant 1} \left|\left\langle \varphi_f'(u), v \right\rangle\right|.$$

С другой стороны, заметим, что

$$\left\langle \varphi_f'(u), u \right\rangle = p \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx = p > 0 \quad \text{на} \quad \mathrm{V}.$$

Многообразие V-2.

Поэтому

$$\left\|\varphi'_f(u)\right\|_* = \sup_{\|\nabla v\|_2 \leqslant 1} \left|\left\langle \varphi'_f(u), v \right\rangle\right| \geqslant$$

$$\geqslant c \left|\left\langle \varphi'_f(u), u \right\rangle\right| \geqslant cp > 0 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{V},$$

где $c > 0$ — это некоторая постоянная, не зависящая от $u \in \mathrm{V}$.

Слабое решение задачи-1.

Тем самым, выполнены все условия теоремы 4 четвертой лекции, а значит, найдется такая точка $u_0 \in \mathrm{V}$, в которой у функционала ψ достигается минимум. Кроме того, отсюда вытекает выполнимость всех условий теоремы 1 настоящей лекции. Следовательно, найдется такое число $\mu \in \mathbb{R}^1$, что будет выполнено следующее равенство:

$$\left\langle \psi'_f(u_0) - \mu\varphi'_f(u_0), v \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H}^1_0(\Omega),$$

но это равенство есть не что иное, как следующее равенство:

$$\langle -\triangle u_0 + \lambda u_0 - \mu |u_0|^{p-2} u_0, v\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H}^1_0(\Omega). \tag{10}$$

Слабое решение задачи-2.

Теперь докажем, что $\mu > 0$. Действительно, положим в равенстве (10) $v = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, тогда после «интегрирования по частям» получим равенства

$$2\psi(u_0) = \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u_0(x)|^2 + \lambda |u_0(x)|^2\right] dx = \mu \int\limits_{\Omega} |u_0(x)|^p \, dx = \mu,$$

поскольку $u_0 \in \mathrm{V}$. Но, как мы доказали, $\psi(u_0) > 0$, следовательно, и $\mu > 0$. Теперь осталось сделать замену

$$u_0 = c_1 u, \quad c_1 = \left(\frac{1}{\mu p}\right)^{1/(p-2)},$$

чтобы прийти к равенству (5).

Тем самым, нелинейная краевая задача (3) разрешима в слабом обобщенном смысле при $\lambda > -\lambda_1$.

Понятие стягиваемого множества.

Пусть $\mathbb{X}$ — это отделимое топологическое пространство, т. е. *Хаусдорфово* пространство.

Определение 5. Подмножество $A \subset \mathbb{X}$ называется стягиваемым на $\mathbb{X}$ множеством, если найдется такая функция (деформация):

$$h(t,u) : [0,1] \times A \to \mathbb{X}$$

класса $\mathbb{C}([0,1] \times A; \mathbb{X})$ и такая точка $\hat{u} \in \mathbb{X}$, что

$$h(0,u) = u \quad \text{и} \quad h(1,u) = \hat{u} \in \mathbb{X} \quad \text{для всех} \quad u \in A.$$

Понятие категории.

Определение 6. Категорией множества $A \subset \mathbb{X}$ как подмножества Хаусдорфова пространства $\mathbb{X}$ называется отображение

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) : \ 2^{\mathbb{X}} \to \mathbb{Z}_{+} \cup \{+\infty\},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \ A \subset \bigcup_{m=1}^{k} \mathrm{A}_m \right\}$, где каждое множество $A_m \subset \mathbb{X}$ является замкнутым и стягиваемым в $\mathbb{X}$;

(iii) $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) = +\infty$, если нет конечного покрытия.

Свойства категории.

Категория $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A)$ множества $A \subset \mathbb{X}$ по отношению к $\mathbb{X}$ обладает следующим набором свойств:

Теорема

Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — это два Хаусдорфовых пространства. Справедливы следующие свойства:

(i) *если $A \subset C$, то $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) \subset \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(C)$;*

(ii) $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A \cup C) \leqslant \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) + \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(C)$;

(iii) $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}(A \times \{z\}) = \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A)$ *для каждой точки $z \in \mathbb{Y}$;*

(iv) *если $\eta : A \to \mathbb{X}$ является гомеоморфизмом, гомотопичным тождественному отображению id_A на $A \subset \mathbb{X}$, тогда имеет место неравенство $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) \leqslant \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(\eta(A))$.*

Первое свойство вытекает из тех соображений, что покрытие множества C является покрытием множества A. Второе свойство вытекает из того, что объединение покрытий A и C является покрытием и их объединения $A \cup C$. Третье свойство доказывается следующим образом. Пусть $\mathrm{cat}_{\mathbb{B}}(A) = k < +\infty$, поскольку в противном случае и $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}(A \times \{z\}) = +\infty$. Пусть

$$\bigcup_{m=1}^{k} A_m$$

— это покрытие множества A. Но тогда, поскольку $\{z\}$ — это замкнутое множество в $\mathbb{Y}$, имеем

$$\bigcup_{m=1}^{k} (A_m \times \{z\})$$

— это покрытие множества $A \times \{z\}$ и обратное тоже верно.

Доказательство теоремы-2.

Приступим к доказательству четвертого свойства. Прежде всего предположим, что множество A замкнуто, поскольку любое покрытие замкнутого множества является покрытием любого его подмножества. Итак, пусть

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{X}}(\eta(A)) = k < +\infty,$$

поскольку в противном случае сразу же приходим к утверждению. Пусть $\{C_m\}_{m=1}^{k}$ замкнутые и стягиваемые в $\mathbb{X}$ множества, покрывающие множество $\eta(A)$ и для которых в силу стягиваемости определены деформации

$$h_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times C_m; \mathbb{X}).$$

Поскольку отображение $\eta : A \to \mathbb{X}$ гомотопично тождественному отображению id_A, то существует такая деформация $h(t,u)$, что

$$h(0,\cdot) = \mathrm{id}_A, \quad h(1,\cdot) = \eta.$$

Доказательство теоремы-3.

Введем обозначение:

$$h_1(\cdot) \equiv h(1, \cdot).$$

Рассмотрим множества

$$A_m = h_1^{-1}(C_m) \quad \text{при} \quad m = \overline{1, k}.$$

Множества $\{A_m\}_{m=1}^k$ образуют замкнутое покрытие множества A в силу гомеоморфности отображения η. Ясно, что вместе с семейством замкнутых множеств $\{A_m\}$ семейство $\{A_m \cap A\}$ тоже замкнутое покрытие замкнутого множества A.
Докажем, что все эти множества являются стягиваемыми в $\mathbb{X}$.
Действительно, рассмотрим следующую деформацию:

$$\hat{h}_m(t, u) = \begin{cases} h(2t, u) & \text{при} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ h_m(2t - 1, h_1(u)), & \text{при} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Доказательство теоремы-4.

Понятно, что

$$\hat{h}_m(t,u) : [0,1] \times A_m \cap A \to \mathbb{X}$$

$$\hat{h}_m(0,\cdot) = \mathrm{id}_{A_m \cap A}, \quad \hat{h}_m(1,\cdot) = \hat{u}_m \in \mathbb{X}.$$

Осталось доказать, что

$$\hat{h}_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times A_m \cap A; \mathbb{X}).$$

Но это сразу же следует из определения деформаций $h(t,u)$ и $h_m(t,u)$ и следующего равенства

$$h(1,u) = \eta(u) = h_1(u) = h_m(0, h_1(u)) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{X}.$$

Тем самым, семейство множеств $\{A_m \cap A\}_{m=1}^{k}$ является стягиваемым в $\mathbb{X}$. Следовательно,

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) \leqslant k = \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(\eta(A)).$$

Теорема доказана.

ANR.

Для дальнейшего нам сейчас потребуется ввести определение *абсолютного окрестностного ретрактора*. Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — это два метрических пространства и $D \subset \mathbb{Y}$ — замкнутое подмножество,

$$\varphi : D \subset \mathbb{Y} \to \mathbb{X},$$

причем $\varphi \in \mathbb{C}(D; \mathbb{X})$. Дадим определение.

Определение 7. *Метрическое пространство* $\mathbb{X}$ *называется абсолютным окрестностным ретрактором* (ANR), *если для любого замкнутого множества* $D \subset \mathbb{Y}$ *найдется такая окрестность* $\mathrm{U} \subset \mathbb{Y}$, *содержащая* D, *что отображение* φ *можно продолжить до непрерывного на* U.

Еще одно свойство категории для ANR.

Теорема

Пусть метрическое пространство $\mathbb{X}$ *является* ANR *и* $A \subset \mathbb{X}$ *— это произвольное замкнутое множество, тогда найдется такая окрестность* $\mathrm{U} \subset \mathbb{X}$ *множества* A, *что имеет место следующее равенство*:

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) = \mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathrm{U}}).$$

Доказательство теоремы-1.

Итак, пусть $\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A) = k < +\infty$, поскольку в противном случае утверждение теоремы вытекает из теоремы 2. Пусть $\{A_m\}_{m=1}^{k}$ — это замкнутое покрытие множества A, причем каждое A_m является стягиваемым в $\mathbb{X}$, т. е. существует такая деформация

$$h_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times A_m; \mathbb{X}),$$

что

$$h_m(0,u) = u \quad \text{и} \quad h_m(1,u) = \hat{u}_m \in \mathbb{X} \quad \text{для всех} \quad u \in A_m.$$

Докажем, что для каждого множества A_m найдется такая его окрестность U_m, что ее замыкание $\overline{\mathrm{U}}_m$ стягиваемо в $\mathbb{X}$. Действительно, рассмотрим следующее декартово произведение метрических пространств

$$\mathbb{Y} \equiv [0,1] \times \mathbb{X}.$$

Доказательство теоремы-2.

Рассмотрим замкнутое подмножество этого метрического пространства:

$$\mathrm{E}_m \equiv \{[0,1] \times A_m\} \cup \{\{0\} \times \mathbb{X}\} \cup \{\{1\} \times \mathbb{X}\}$$

и рассмотрим на этом замкнутом множестве непрерывную функцию

$$u_m(t,u) = \begin{cases} h_m(t,u) & \text{при} \quad t \in [0,1], \ u \in A_m; \\ u & \text{при} \quad t = 0, \ u \in \mathbb{X}; \\ \hat{u}_m & \text{при} \quad t = 1, \ u \in \mathbb{X}. \end{cases}$$

Поскольку $\mathbb{X}$ — это ANR, то $[0,1] \times \mathbb{X}$ — это тоже ANR. Поэтому найдется такая окрестность $\mathrm{V}_m \subset [0,1] \times \mathbb{X}$ множества E_m, что функция u_m допускает непрерывное продолжение

$$\overline{u}_m(t,u) \in \mathbb{C}(\mathrm{V}_m; \mathbb{X}).$$

Доказательство теоремы-3.

Без ограничения общности можно считать, что множество V_m замкнуто в $[0,1]\times\mathbb{X}$, следовательно, найдется такая замкнутая окрестность $\overline{\mathrm{U}}_m$ множества A_m, что $[0,1]\times\overline{\mathrm{U}}_m\subset\mathrm{V}_m$. Причем

$$\overline{u}_m(0,u)=u \quad \text{и} \quad \overline{u}_m(1,u)=\hat{u}_m\in\mathbb{X} \quad \text{для всех} \quad u\in\overline{\mathrm{U}}_m,$$

т. е. замкнутые множества $\overline{\mathrm{U}}_m$ при $m=\overline{1,k}$ являются стягиваемыми в $\mathbb{X}$, причем

$$\overline{\mathrm{U}}=\bigcup_{m=1}^{k}\overline{\mathrm{U}}_m\supset A$$

и

$$k=\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A)\leqslant\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}\,\overline{\mathrm{U}}\leqslant k\Rightarrow\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(A)=\mathrm{cat}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathrm{U}}).$$

Теорема доказана.

Примеры.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{B}$ — это банахово пространство, а

$$A = \overline{B_R(0)} \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \|u\| \leqslant R\}\,.$$

Очевидно, что множество A замкнуто в $\mathbb{B}$. Докажем, что оно стягиваемо в $\mathbb{B}$. Действительно, рассмотрим следующую деформацию:

$$h(t, u) = (1 - t)u \in \mathbb{C}([0, 1] \times A; \mathbb{B}).$$

Ясно, что

$$h(0, u) = u \quad \text{и} \quad h(1, u) = \theta \in \mathbb{B} \quad \text{для всех} \quad u \in A.$$

Стало быть,

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{B}} \left(\overline{B_R(0)}\right) = 1.$$

Примеры.

ПРИМЕР 3. Символом $\mathbb{S}^{N-1}$ обозначим единичную сферу в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$:

$$\mathbb{S}^{N-1} \equiv \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ \|u\|_N = 1\right\}.$$

Символом $\mathbb{P}^{N-1}$ обозначим следующее множество:

$$\mathbb{P}^{N-1} \equiv \left\{(x, -x); \ x \in \mathbb{S}^{N-1}\right\},$$

которое называется $(N-1)-$мерным *проективным пространством*. Справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{P}^{N-1}}(\mathbb{P}^{N-1}) = N, \tag{11}$$

доказательство которого выходит за рамки настоящей книги.

Примеры.

Пусть теперь $\mathbb{S}^\infty$ — это единичная сфера в банаховом пространстве $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{S}^\infty \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \|u\| = 1\}$$

и введем соответствующее проективное пространство

$$\mathbb{P}^\infty \equiv \{(u, -u); \ u \in \mathbb{S}^\infty\}.$$

Но тогда в силу равенства (11) имеет место следующее равенство:

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{P}^\infty}\left(\mathbb{P}^\infty \cap \mathbb{P}^{N-1}\right) = \mathrm{cat}_{\mathbb{P}^{N-1}}\left(\mathbb{P}^\infty \cap \mathbb{P}^{N-1}\right) = N.$$

Отсюда в силу произвольности $N \in \mathbb{N}$ приходим к выводу, что

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{P}^\infty}\left(\mathbb{P}^\infty\right) = +\infty. \tag{12}$$