Лекция 5. Вариационные методы. Теорема о горном перевале.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

29 сентября 2014 г.

Введение

В этой лекции мы рассмотрим важный в приложениях вариационный метод Амбросетти–Рабиновича, основанный на так называемой теореме о горном перевале и имеющий важные приложения в теории неограниченных функционалов. А также результат С. И. Похожаева о несуществовании нетривиального решения одной нелинейной эллиптической задачи.

Некоторые обозначения

Итак, пусть у нас задан функционал $f(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$, удовлетворяющий, кроме того, условию, что его градиент

$$\mathbb{F}(u) = f_f^{\prime}(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}^*$$

является сильно непрерывным по Липшицу и $\mathbb{H}$ вещественное гильбертово пространство.
Теперь введем некоторые обозначения

$$A_c \equiv \Big\{ u \in \mathbb{H} : f(u) \leqslant c \Big\},$$

$$K_c \equiv \Big\{ u \in \mathbb{H} : f(u) = c, \ \mathbb{F}(u) = f_f^{\prime}(u) = 0 \Big\}.$$

Определения

Определение 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— это совокупность функционалов* $f(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$, *градиент которых сильно непрерывен по Липшицу.*

Определение 2.

(i) *Элемент* $u \in \mathbb{H}$ *называется критической точкой, если* $f'_f(u) = 0$.

(ii) *Вещественное число* c *называется критическим значением, если* $K_c \neq \emptyset$

Условия Пале–Смейла

Теперь докажем, что если число c не является критическим значением, то множество $A_{c+\varepsilon}$ легко деформируется в $A_{c-\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Доказательство основано на следующей идее: сначала надо решить соответствующее дифференциальное уравнение в $\mathbb{H}$ и затем с помощью этого решения «продифформировать» множество $A_{c+\varepsilon}$ во множество $A_{c-\varepsilon}$. Поскольку пространство $\mathbb{H}$, вообще говоря, бесконечномерно, нам понадобится условие компактности.

Определение 3. *Функционал $f \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$ удовлетворяет условию компактности Palais–Smale (PS) если каждая последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{H}$, удовлетворяющая условиям*

(i) $\{f(u_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ *ограничена;*

(ii) $f'_f(u_k) \to 0$ *в* $\mathbb{H}^*$

содержит сильно сходящуюся подпоследовательность в $\mathbb{H}$.

Теорема о деформации

Теорема

Пусть $f(u) \in \mathfrak{F}$ *удовлетворяет условию Пале–Смейла (Palais–Smale). Предположим, что* $K_c = \emptyset$*. Тогда для любого достаточного малого* $\varepsilon > 0$ *существуют константа* $0 < \delta < \varepsilon$ *и функция* $\eta(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times \mathbb{H}; \mathbb{H})$ *такие, что отображения* $\eta_t(u) = \eta(t,u) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ u \in \mathbb{H})$ *удовлетворяет условиям*

(i) $\eta_0(u) = u \ (u \in \mathbb{H})$;

(ii) $\eta_1(u) = u \ (u \notin f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]))$;

(iii) $f(\eta_t(u)) \leqslant f(u) \ (u \in \mathbb{H},\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$;

(iv) $\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 1.

Шаг 1. Сначала покажем, что существуют константы $0 < \sigma, \varepsilon < 1$ такие, что

$$\|f_f'(u)\|_{\mathbb{H}^*} \geqslant \sigma \quad \text{для всех} \quad u \in A_{c+\varepsilon} \backslash A_{c-\varepsilon}. \tag{1}$$

Доказательство ведется от противного. Если (1) не выполняется для всех констант $\sigma, \varepsilon > 0$, то существуют последовательности $\sigma_k \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$ и элементы

$$u_k \in A_{c+\varepsilon_k} \backslash A_{c-\varepsilon_k} \tag{2}$$

такие, что

$$\|f_f'(u_k)\|_{\mathbb{H}^*} \leqslant \sigma_k. \tag{3}$$

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 1.

Согласно условию Пале–Смейла существуют подпоследовательность

$$\{u_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$$

и элемент $u \in \mathbb{H}$ такие, что $u_{k_j} \to u$ сильно в $\mathbb{H}$. Но, так как $f \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{H}; \mathbb{R}^1)$, и из (2), (3) вытекает, что

$$f(u) = c, \quad f'_f(u) = 0.$$

Следовательно, $K_c \neq \emptyset$, что противоречит нашему предположению о том, что $K_c = \emptyset$.

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 2.1

Шаг 2. Фиксируем $\delta > 0$ такое, что

$$0 < \delta < \varepsilon, \quad 0 < \delta < \sigma^2/2. \tag{4}$$

Положим

$$A \equiv \left\{ u \in \mathbb{H} \middle| \; f(u) \leqslant c - \varepsilon \text{ или } f(u) \geqslant c + \varepsilon \right\},$$

$$B \equiv \left\{ u \in \mathbb{H} \middle| \; c - \delta \leqslant f(u) \leqslant c + \delta \right\}.$$

Поскольку $\mathbb{F}(u) = f'_f(u)$ ограничено на ограниченных множествах и следовательно, функционал $f(u)$ сильно непрерывен на $\mathbb{H}$, то множества A и B замкнуты.

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 2.2

Следовательно, функции $d(u, A)$ и $d(u, B)$ достигают точной нижней грани на замкнутых множествах A и B, соответственно. Тогда отображение

$$u \mapsto d(u, A) + d(u, B), \quad d(u, C) = \mathrm{distance}(u, C) \equiv \inf_{v \in C} \|v - u\|$$

ограничено снизу положительной константой на каждом ограниченном подмножестве $\mathbb{H}$.

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 2.3

Следовательно, функция

$$g(u) \equiv \frac{\mathrm{distance}(u, A)}{\mathrm{distance}(u, A) + \mathrm{distance}(u, B)} \quad (u \in \mathbb{H})$$

удовлетворяет условиям

$$0 \leqslant g \leqslant 1, \quad g = 0 \quad \text{на} \quad A, \quad g = 1 \quad \text{на} \quad B, \tag{5}$$

где g липшицева на ограниченных множествах.

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 2.4

Действительно, посчитаем производную Фреше функции $d(u, A)$.

$$\|u+h-v\|^2 = \|u-v\|^2 + 2(u-v,h) + \|h\|^2,$$

$$d^2(u+h,C) = d^2(u,C) + 2\inf(u-v,h) + \|h\|^2,$$

$$d(u+h,C) = d(u,C) + \frac{1}{d(u,C)} \inf_{v\in C} \langle J^{-1}(u-v), h\rangle + \omega(u,h), \quad u \notin C,$$

$J : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}$ —оператор Рисса–Фреше.

Следовательно, производная Фреше имеет вид

$$\left\langle d'_f(u,C), h\right\rangle \equiv \frac{1}{d(u,C)} \inf_{v\in C} \left\langle J^{-1}(u-v), h\right\rangle, \quad u \notin C.$$

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 2.5

Поскольку как мы доказали знаменатель функционала $g(u)$ ограничен на ограниченных множествах снизу положительной постоянной, то вычисляя производную Фреше функционала $g(u)$ как композицию производных Фреше, получим, что эта производная Фреше $g'_f(u)$ ограничена на ограниченных множествах. При этом имеет место выражение

$$g'_f(u) = 0 \quad \text{при} \quad u \in A \cup B, \quad \overline{A} = A, \quad \overline{B} = B, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Следовательно, функционал $g(u)$ локально липшиц–непрерывен на $\mathbb{H}$.

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 2.6

Положим

$$h(t) \equiv \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1; \\ 1/t, & t \geqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

Наконец, определим отображение

$$\mathbb{V} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad J : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H} \quad \text{изометрия Рисса}$$

формулой

$$\mathbb{V}(u) \equiv -g(u)h\left(\|Jf_f'(u)\|_{\mathbb{H}}\right) Jf_f'(u) \quad (u \in \mathbb{H}). \tag{7}$$

Заметим, что $\mathbb{V}$ ограничено.

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 3.

Шаг 3. Для произвольного $u \in \mathbb{H}$ рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\eta}{dt}(t) = \mathbb{V}(\eta(t)) \quad t > 0, \quad \eta(0) = u. \tag{8}$$

Поскольку $\mathbb{V}$ ограничено и непрерывно по Липшицу на ограниченных множествах, существует единственное решение для всех $t \geqslant 0$. Пишем $\eta = \eta(t, u) = \eta_t(u)$ $(t \geqslant 0,\ u \in \mathbb{H})$, чтобы подчеркнуть зависимость решения, как от времени t, так и от начального положения $u \in \mathbb{H}$. Ограничившись случаем $0 \leqslant t \leqslant 1$, мы видим, что таким образом определенное отображение $\eta \in \mathbb{C}([0, 1] \times \mathbb{H}; \mathbb{H})$ удовлетворяет утверждениям (i) и (ii). Действительно, это следствие того, что $g = 0$ при $u \in A$.

Шаг 4. Теперь вычислим

$$\frac{d}{dt}f(\eta_t(u)) = \left\langle f'_f(\eta_t(u)), \frac{d}{dt}\eta_t(u)\right\rangle = \left(Jf'_f(\eta_t(u)), \frac{d}{dt}\eta_t(u)\right)_{\mathbb{H}} =$$
$$= \left(Jf'_f(\eta_t(u)), \mathbb{V}(\eta_t(u))\right)_{\mathbb{H}} =$$
$$= -g(\eta_t(u))h\left(\|Jf'_f(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}}\right)\|Jf'_f(\eta_t(u))\|^2_{\mathbb{H}}. \quad (9)$$

В частности,

$$\frac{d}{dt}f(\eta_t(u)) \leqslant 0 \quad (u \in \mathbb{H}, 0 \leqslant t \leqslant 1) \Rightarrow f(\eta_t(u)) \leqslant f(u).$$

Следовательно, утверждение (iii) доказано.

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 5.

Шаг 5. Теперь фиксируем точку

$$u \in A_{c+\delta} \tag{10}$$

Наша цель — доказать соотношение

$$\eta_1(u) \in A_{c-\delta} \tag{11}$$

и тем самым проверить утверждение (iv). Если $\eta_t(u) \notin B$ для некоторого $t \in [0,1]$, мы сразу же получаем требуемое утверждение. Действительно, при этом если найдется такое $t^* \in [0,1]$, что

$$\eta_{t^*}(u) \notin B,$$

то в силу (iii)

$$f(\eta_{t^*}(u)) \leqslant f(u) \leqslant c+\delta.$$

И, значит,

$$f(\eta_{t^*}(u)) < c-\delta \quad \text{и} \quad f(\eta_t(u)) \leqslant f(\eta_{t^*}(u)) \quad \text{для всех} \quad t \in [t^*, 1].$$

И, следовательно,

$$f(\eta_1(u)) < c - \delta.$$

Поэтому предположим, что $\eta_t(u) \in B$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Тогда $g(\eta_t(u)) = 1$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Следовательно, из (9) вытекает

$$\frac{d}{dt} f(\eta_t(u)) = -h\left(\|Jf'_f(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}}\right)\|Jf'_f(\eta_t(u))\|^2_{\mathbb{H}}. \qquad (12)$$

Если

$$\|Jf'_f(\eta_t(u))\|_{\mathbb{H}} \leqslant 1,$$

то из (6) и (1) вытекает

$$\frac{d}{dt} f(\eta_t(u)) = -\|Jf'_f(\eta_t(u))\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant -\sigma^2.$$

Доказательство теоремы о деформации. Шаг 5.

С другой стороны, если

$$\|Jf'_f(u)\|_{\mathbb{H}} \geqslant 1,$$

то из (6) и (1) получаем

$$\frac{d}{dt} f(\eta_t(u)) \leqslant -\sigma^2.$$

В силу этих неравенств, (12) и (4) выводим оценку

$$f(\eta_1(u)) \leqslant f(u) - \sigma^2 \leqslant c + \delta - \sigma^2 \leqslant c - \delta,$$

из которой следует (11), и требуемое утверждение доказано.

Теорема доказана.

Теорема о горном перевале.

Используя «минимаксную» технику и построенную деформацию η, докажем существование критической точки. С этой целью докажем утверждение, которое носит название «теорема о горном перевале».

Определение 4. $\Gamma \equiv \left\{ g \in \mathbb{C}([0,1];\mathbb{H}) \middle| \, g(0) = 0, \; g(1) = v \right\}$.

Теорема

Пусть $f \in \mathfrak{F}$ удовлетворяет условию Пале–Смейла. Предположим также, что

(i) $f(0) = 0$,

(ii) *существуют константы $r, a > 0$ такие, что $f(u) \geqslant a$, если $\|u\| = r$,*

(iii) *существует элемент $v \in \mathbb{H}$ такой, что $\|v\| > r$, $f(v) \leqslant 0$*

Тогда $c = \inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} f(g(t))$ — *критическое значение* f.

Доказательство теоремы о горном перевале-1.

Прежде всего имеем $c \geqslant a$, поскольку

$$\max_{t \in [0,1]} f(g(t)) \geqslant a.$$

Пусть c не является критическим значением $f(\cdot)$, так что

$$K_c = \emptyset.$$

Выберем достаточно малое число

$$0 < \varepsilon < a/2.$$

Согласно теореме 1 о деформации существует константа $0 < \delta < \varepsilon$ и гомеоморфизм

$$\eta_t : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

такие, что

$$\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}, \tag{13}$$

$$\eta_1(u) = u, \quad \text{если} \quad u \notin f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]). \tag{14}$$

Доказательство теоремы о горном перевале-2.

Выберем $g \in \Gamma$ так, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} f(g(t)) \leqslant c + \delta. \qquad (15)$$

Тогда $\hat{g} \equiv \eta \circ g$ также принадлежит Γ, поскольку $\eta(g(0)) = \eta(0) = 0$ и $\eta(g(1)) = \eta(v) = v$ в силу (14). Но тогда из (15) следует $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} f(\hat{g}(t)) \leqslant c - \delta$, откуда

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} f(g(t)) \leqslant c - \delta,$$

что приводит к противоречию. Напомним, что $A_c = \{u \in \mathbb{H} : \ f(u) \leqslant c\}$.

Теорема доказана.

Пример.

Для иллюстрации применения теоремы о горном перевале рассмотрим следующую полулинейную краевую задачу:

$$-\triangle u = f(u) \quad \text{в} \quad U, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial U, \quad f(0) = 0, \tag{16}$$

где $U \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей ∂U, $f(\cdot)$ гладкая и для некоторого $1 < p < (N+2)/(N-2)$ при $N \geqslant 3$

$$|f(z)| \leqslant c(1 + |z|^p), \quad |f'(z)| \leqslant c(1 + |z|^{p-1}), \quad z \in \mathbb{R}^1, \tag{17}$$

где c — константа.

Пример.

Пусть

$$0 \leqslant F(z) \leqslant \gamma f(z) z \quad \text{для некоторой константы} \quad \gamma < 1/2, \tag{18}$$

где

$$F(z) \equiv \int\limits_0^z f(s)\, ds$$

и $z \in \mathbb{R}^1$. Предположим, наконец, что $0 < a \leqslant A$,

$$a|z|^{p+1} \leqslant |F(z)| \leqslant A|z|^{p+1} \quad (z \in \mathbb{R}^1). \tag{19}$$

Поскольку по условию $f(0) = 0$, то тривиальное решение является решением задачи. Но нас интересует другое решение.

Пример.

Замечание. Уравнение с частными производными

$$-\triangle u = |u|^{p-1}u$$

попадает под указанные условия. Позднее мы вернемся к этому виду нелинейности.

Теорема

Краевая задача (16) *имеет хотя бы одно слабое решение* u *неравное тождественно нулю.*

Доказательство теоремы. Шаг 1.

Шаг 1. Определим функционал

$$\mathrm{I}[u] \equiv \int\limits_U \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\right] dx \quad \text{для} \quad u \in \mathbb{H}_0^1(U). \tag{20}$$

Мы хотим применить теорему о горном перевале к функционалу $\mathrm{I}[u]$. Будем рассматривать пространство $\mathbb{H} \equiv \mathbb{H}_0^1(U)$ относительно одной из возможных норм

$$\|u\| = \left(\int\limits_U |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\mathrm{I}[u] \equiv \mathrm{I}_1[u] - \mathrm{I}_2[u] \equiv \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int\limits_U F(u)\, dx. \tag{21}$$

Доказательство теоремы. Шаг 2.

Шаг 2. Сначала покажем, что I принадлежит классу $\mathcal{F}$. Для этого заметим, что при любых $u, w \in \mathbb{H}$,

$$\mathrm{I}_1[w] = \frac{1}{2}\|w\|^2 = \frac{1}{2}\|u+w-u\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 + (u, w-u) + \frac{1}{2}\|w-u\|^2.$$

Поэтому I_1 дифференцируем по Фреше в точке u и $\mathrm{I}'_{1f}[u] = -\Delta u$. Следовательно, $\mathrm{I}_1 \in \mathcal{F}$.

Доказательство теоремы. Шаг 3-1.

Шаг 3. Теперь рассмотрим I_2. Напомним, что по теореме Браудера–Минти, которую мы рассмотрим позже, в силу равномерной монотонности оператора Лапласа

$$-\triangle : \mathbb{H}^1_0(U) \to \mathbb{H}^{-1}(U)$$

для любого $v^* \in \mathbb{H}^{-1}(U)$ задача

$$-\triangle u = v^* \quad \text{в} \quad U, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \partial U$$

имеет единственное решение $v \in \mathbb{H}^1_0(U)$. Положим $v = Jv^*$, так что

$$J : \mathbb{H}^{-1}(U) \to \mathbb{H}^1_0(U) \ - \ \text{изометрия Рисса–Фреше.} \tag{22}$$

Доказательство теоремы. Шаг 3-2.

Заметим, что если $w \in \mathbb{L}^{2N/(N+2)}(U)$, то линейный функционал w^*, определенный формулой (теорема вложения Реллиха–Кондрашова)

$$\langle w^*, u\rangle \equiv \int\limits_U wu\,dx \quad (u \in \mathbb{H}^1_0(U)),$$

принадлежит $\mathbb{H}^{-1}(U)$. Заметим, что

$$p\frac{2N}{N+2} < \frac{N+2}{N-2}\frac{2N}{N+2} = 2^*$$

и, таким образом, $f(u) \in \mathbb{L}^{2N/(N+2)}(U) \subset \mathbb{H}^{-1}(U)$, если $u \in \mathbb{H}^1_0(U)$.

Доказательство теоремы. Шаг 3-3.

Заметим, что в силу теоремы Красносельского для оператора Немыцкого для $u \in \mathbb{H}_0^1(U)$

$$\mathrm{I}_{2f}'[u] = f(u). \tag{23}$$

Заметим, что если $u, \overline{u} \in \mathbb{H}_0^1(U)$, $\|u\|, \|\overline{u}\| \leqslant L$, то

$$\|\mathrm{I}_{2f}'(u) - \mathrm{I}_{2f}'(\overline{u})\| \leqslant c\|f(u) - f(\overline{u})\|_{\mathbb{L}^{2N/(N+2)}(U)}.$$

Однако поскольку

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leqslant |f^{'}(s_3)||s_1 - s_2|, \quad s_3 \in [s_1, s_2],$$

то, очевидно, что в силу (17) имеет место неравенство

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leqslant c\left(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}\right)|s_1 - s_2|$$

$$\|f(u) - f(\overline{u})\|_{\mathbb{L}^{2N/(N+2)}(U)} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_U \left((1 + |u|^{p-1} + |\overline{u}|^{p-1})|u - \overline{u}|\right)^{2N/(N+2)}\, dx\right)^{(N+2)/(2N)} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_U \left(1 + |u|^{p-1} + |\overline{u}|^{p-1}\right)^{2N/(N+2)(N+2)/4}\right)^{2/N} \|u-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^{2^*}(U)} \leqslant$$

$$\leqslant c(L)\|u - \overline{u}\|_{\mathbb{L}^{2^*}(U)} \leqslant c(L)\|u - \overline{u}\|,$$

Доказательство теоремы. Шаг 3-7.

где мы воспользовались (17) и, кроме того,

$$\frac{2N}{N+2}r = 2^* \Rightarrow r = \frac{N+2}{N-2}, \quad r^{'} = \frac{N+2}{4}.$$

Таким образом, отображение

$$\mathrm{I}^{'}_{2f} : \mathbb{H}^1_0(U) \to \mathbb{H}^{-1}(U)$$

непрерывно по Липшицу на ограниченных множествах. Следовательно, $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ и мы получаем требуемое утверждение.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы. Шаг 4-1.

Шаг 4. Теперь проверим условие Пале–Смейла. Для этого предположим, что

$$\{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{H}_0^1(U),$$

где

$$\{\mathrm{I}[u_k]\}_{k=1}^{+\infty} \quad \text{ограничена}, \tag{24}$$

$$\mathrm{I}_f'[u_k] \to 0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}^{-1}(U). \tag{25}$$

Согласно вышесказанному

$$\Delta u_k + f(u_k)) \to 0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}^{-1}(U). \tag{26}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\left|\left\langle \mathrm{I}_f'[u_k], v\right\rangle\right| = \left|\int\limits_U ((\nabla u_k, \nabla v) - f(u_k)v)\, dx\right| \leqslant \varepsilon \|v\| \quad (v \in \mathbb{H}_0^1(U))$$

при достаточно больших k. Положим $v = u_k$.

Доказательство теоремы. Шаг 4-2.

Имеем

$$\left| \int\limits_U \left[|\nabla u_k|^2 - f(u_k)u_k \right] \, dx \right| \leqslant \varepsilon \|u_k\|$$

для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших k. При $\varepsilon = 1$, в частности, имеем

$$\int\limits_U f(u_k)u_k \, dx \leqslant \|u_k\|^2 + \|u_k\| \tag{27}$$

для всех достаточно больших k. Но поскольку из (24) следует

$$\left(\frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \int\limits_U F(u_k) \, dx \right) \leqslant c < +\infty$$

для всех k и некоторой константы c,

заключаем, что

$$\|u_k\|^2 \leqslant c + 2 \int\limits_U F(u_k)\,dx \leqslant c + 2\gamma \left(\|u_k\|^2 + \|u_k\|\right).$$

Так как $2\gamma < 1$, последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathbb{H}_0^1(U)$. Поэтому существуют подпоследовательность $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ и функция $u \in \mathbb{H}_0^1(U)$ такие, что $u_{k_j} \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{H}_0^1(U)$ и $u_{k_j} \to u$ сильно в $\mathbb{L}^{p+1}(U)$. Последнее утверждение справедливо поскольку $p+1 < 2^*$. Но тогда $f(u_k) \to f(u)$ сильно в $\mathbb{H}^{-1}(U)$, откуда $J[f(u_k)] \to J[f(u)]$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(U)$. Следовательно, из (26) получаем

$$u_{k_j} \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}_0^1(U). \tag{28}$$

Значит, функционал $\mathrm{I}(u)$ удовлетворяет условию (PS).

Доказательство теоремы. Шаг 5-1.

Шаг 5. Наконец, проверим остальные условия теоремы о горном перевале. Очевидно, что $\mathrm{I}[0] = 0$. Пусть $u \in \mathbb{H}_0^1(U)$, $\|u\| = r$, где $r > 0$ будет выбрано ниже. Тогда

$$\mathrm{I}[u] = \mathrm{I}_1[u] - \mathrm{I}_2[u] = \frac{r^2}{2} - \mathrm{I}_2[u]. \tag{29}$$

В силу (19)

$$|\mathrm{I}_2[u]| \leqslant c \int\limits_U |u|^{p+1}\, dx \leqslant c \left(\int\limits_U |u|^{2^*}\, dx \right)^{(p+1)/2^*} \leqslant c\|u\|^{p+1} \leqslant cr^{p+1}.$$

В силу (29)

$$\mathrm{I}[u] \geqslant \frac{r^2}{2} - cr^{p+1} \geqslant \frac{r^2}{4} = a > 0,$$

если $r > 0$ достаточно мало, так как $p + 1 > 2$. Выберем теперь $u \in \mathbb{H}$, неравное тождественно нулю.

Доказательство теоремы. Шаг 5-2.

Положим $v \equiv tu$, где $t > 0$ надлежит выбрать соответствующим образом. Тогда

$$\mathrm{I}[v] = \mathrm{I}_1[tu] - \mathrm{I}_2[tu] = t^2 \mathrm{I}_1[u] - \int\limits_U F(tu)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant t^2 \mathrm{I}_1[u] - a t^{p+1} \int\limits_U |u|^{p+1}\, dx < 0$$

при достаточно больших $t > 0$, где мы опять воспользовались (19).

Доказательство теоремы. Шаг 6.

Шаг 6. Мы проверили все условия теоремы о горном перевале. Поэтому существует функция $u \in \mathbb{H}_0^1(U)$, неравная тождественно нулю, такая, что

$$\mathrm{I}'_f[u] = \Delta u + f(u) = 0.$$

В частности, для любой $v \in \mathbb{H}_0^1(U)$

$$\int\limits_U (\nabla u, \nabla v)\, dx = \int\limits_U f(u) v\, dx,$$

откуда следует, что u — слабое решение задачи (16).

Теорема доказана.

Результат С. И. Похожаева об отсутствии нетривиальных решений.

Рассмотрим нелинейное эллиптическое уравнение с частными производными, для которого можно применить различные методы дифференциальных неравенств:

$$-\triangle u = |u|^{p-1}u \quad \text{в} \quad U, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial U. \tag{30}$$

Применив развитую в предыдущем разделе технику можно доказать, что существует нетривиальное решение задачи (30) в случае

$$1 < p < \frac{N+2}{N-2}. \tag{31}$$

Пусть

$$\frac{N+2}{N-2} < p. \tag{32}$$

Критический показатель.

Наша цель показать, что при некотором геометрическом условии на область $U \subset \mathbb{R}^N$ из (31) следует, что $u \equiv 0$ будет единственным гладким решением задачи (30). Тогда становится ясно, что ограничение в условии (32) из предыдущего пункта в определенном смысле естественно и, следовательно,

$$p = \frac{N+2}{N-2}$$

является критическим показателем.

Вспомогательная лемма.

Определение 5. *Открытое множество U называется звездным относительно 0, если для любой точки $x \in \overline{U}$ прямолинейный отрезок $\{\lambda x | 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ лежит в $\overline{U}$.*

Очевидно, что если U выпукло и $0 \in U$, то U звездно относительно 0. Однако в общем случае звездная область не обязана быть выпуклой.

Лемма

Пусть ∂U класса $\mathbb{C}^1$ и U — звездная область относительно 0. Тогда

$$(x, \nu(x)) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \partial U,$$

где ν — единичная внешняя нормаль.

Доказательство леммы.

Поскольку ∂U класса $\mathbb{C}^1$, для $x \in \partial U$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|x - y| < \delta$ и $y \in \overline{U}$ имеем

$$\left(\nu(x), \frac{y - x}{|y - x|}\right) \leqslant \varepsilon.$$

В частности,

$$\limsup_{\overline{U} \ni y \to x} \left(\nu(x), \frac{y - x}{|y - x|}\right) \leqslant 0.$$

Пусть $y = \lambda x$, где $0 < \lambda < 1$. Тогда $y \in \overline{U}$ ввиду звездности U. Таким образом,

$$\left(\nu(x), \frac{x}{|x|}\right) = - \lim_{\lambda \to 1-0} \left(\nu(x), \frac{\lambda x - x}{|\lambda x - x|}\right) \geqslant 0.$$

Вспомогательная теорема.

Теорема

Пусть $u \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{U})$ *— решение задачи* (30) *и показатель* p *удовлетворяет неравенству* (32). *Предположим, что множество* U *звездно относительно* 0 *и* ∂U *класса* $\mathbb{C}^1$. *Тогда*

$$u \equiv 0 \quad \text{внутри} \quad U.$$

Доказательство теоремы. Шаг 1.

Шаг 1. Умножив уравнение на $(x, \nabla u)$ и интегрируя по U, находим

$$\int\limits_U (-\triangle u)(x, \nabla u)\, dx = \int\limits_U |u|^{p-1} u(x, \nabla u)\, dx. \tag{33}$$

Перепишем это равенство в виде $A = B$.

Шаг 2. Левая часть имеет вид

$$A \equiv -\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_U u_{x_i x_i} x_j u_{x_j}\, dx =$$

$$= \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_U u_{x_i} (x_j u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\partial U} u_{x_i} \nu^i x_j u_{x_j}\, dx \equiv A_1 + A_2. \tag{34}$$

Шаг 3. Имеем

$$A_1 = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_U \left(u_{x_i}\delta_{ij}u_{x_j} + u_{x_i}x_j u_{x_i x_j} \right) dx =$$

$$= \int\limits_U \left(|\nabla u|^2 + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right)_{x_j} x_j \right) dx =$$

$$= \left(1 - \frac{N}{2}\right) \int\limits_U |\nabla u|^2 \, dx + \int\limits_{\partial U} \frac{|\nabla u|^2}{2} (\nu, x) \, dS. \quad (35)$$

С другой стороны, поскольку $u = 0$ на ∂U, градиент ∇u параллелен нормали ν в каждой точке $x \in \partial U$. Таким образом,

$$\nabla u \equiv \pm |\nabla u| \nu.$$

Доказательство теоремы. Шаг 3-2.

С помощью этого неравенства вычисляем

$$A_2 = -\int\limits_{\partial U} |\nabla u|^2 (\nu, x)\, dS. \tag{36}$$

Из (34)–(36) следует, что

$$A = \frac{2-N}{2}\int\limits_{U} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\partial U} |\nabla u|^2 (\nu, x)\, dS.$$

Доказательство теоремы. Шаг 4.

Шаг 4. Возвращаясь к (33) находим

$$B \equiv \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{U} |u|^{p-1} u x_j u_{x_j} \, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{U} \left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1} \right)_{x_j} x_j \, dx =$$

$$= -\frac{N}{p+1} \int\limits_{U} |u|^{p+1} \, dx.$$

Доказательство теоремы. Шаг 5-1.

Шаг 5. Ввиду этого вычисления и (33) получаем

$$\frac{N-2}{2}\int\limits_{U}|\nabla u|^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial U}|\nabla u|^2\,(\nu,x)\,dS=\frac{N}{p+1}\int\limits_{U}|u|^{p+1}\,dx. \tag{37}$$

В силу леммы 1 приходим к неравенству

$$\frac{N-2}{2}\int\limits_{U}|\nabla u|^2\,dx\leqslant\frac{N}{p+1}\int\limits_{U}|u|^{p+1}\,dx. \tag{38}$$

Доказательство теоремы. Шаг 5-2.

Умножая уравнение $-\triangle u = |u|^{p-1}u$ на u и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_U |\nabla u|^2 \, dx = \int\limits_U |u|^{p+1} \, dx.$$

Подставив в (38), находим

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p+1}\right) \int\limits_U |u|^{p+1} \, dx \leqslant 0.$$

Поэтому, если u неравно тождественно нулю, то

$$\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p+1} \leqslant 0,$$

т.е.

$$p \leqslant \frac{N+2}{N-2}.$$

Теорема доказана.