Лекция 2. Плотные вложения банаховых пространств.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

5 сентября 2012 г.

Обозначения

Введем некоторые обозначения. Пусть заданы два банаховых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ с нормами

$$\|\quad\|_e \quad \text{и} \quad \|\quad\|_f$$

и с соответствующими сопряженными $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ относительно скобок двойственности:

$$\langle e^*, e\rangle_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad e^* \in \mathbb{E}^*$$

и

$$\langle f^*, f\rangle_f \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Введем стандартным образом скобки двойственности между парами банаховых пространств $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{E}^{**}$, а также $\mathbb{F}^*$ и $\mathbb{F}^{**}$:

$$\langle e^{**}, e^*\rangle_{e*} \quad \text{для всех} \quad e^* \in \mathbb{E}^* \quad \text{и} \quad e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$$

и

$$\langle f^{**}, f^*\rangle_{f*} \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^* \quad \text{и} \quad f^{**} \in \mathbb{F}^{**}.$$

Транспонированный оператор

Заметим, что справедлива следующая лемма:

Лемма

Для произвольного оператора $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *имеет место неравенство*:

$$\|\mathbb{T}e\|_f \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e\to f}\|e\|_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Теперь дадим следующее определение:

Определение 1. *Оператором, транспонированным к* $\mathbb{T}$, *называется оператор*

$$\mathbb{T}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*, \tag{1}$$

определяемый следующим образом:

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e \equiv \langle f^*, \mathbb{T}e\rangle_f \,. \tag{2}$$

Транспонированный оператор

Справедлива следующая теорема:

Теорема

Если $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, *то* $\mathbb{T}^t \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*)$. *Причем*

$$\|\mathbb{T}\|_{e \to f} = \|\mathbb{T}^t\|_{f^* \to e^*}.$$

Оператор вложения банаховых пространств

Теперь рассмотрим частный случай операторов из банахова пространства $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, а именно линейный, непрерывный и инъективный оператор *топологического вложения* $\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$. Во-первых, этот оператор линейный, т. е.

$$\mathbb{J}_{ef}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 \mathbb{J}_{ef} e_1 + \alpha_2 \mathbb{J}_{ef} e_2 \ \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \text{ и } e_1, e_2 \in \mathbb{E}.$$

Во-вторых, этот оператор непрерывный, т. е. в силу линейности — ограниченный

$$\|\mathbb{J}_{ef} e\|_f \leqslant c_1 \|e\|_e.$$

Оператор вложения банаховых пространств

Довольно часто, когда это не вызывает недоразумений, мы не пишем оператор $\mathbb{J}_{ef}$, а используем знак «$\subset$»: $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. Этот знак означает, что мы отождествили пространство $\mathbb{E}$ со множеством $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E}$, для которого этот знак имеет естественный смысл: $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. Иногда, когда мы имеем дело с теоретико–множественным вложением, т.е. когда $\mathbb{J}_{ef}e = e$ этот знак однозначно отражает ситуацию. В том случае если банахово пространство $\mathbb{E}$ вложено в банахово пространство $\mathbb{F}$ не просто непрерывно, но и плотно, тогда эту ситуацию будем обозначать символом

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}.$$

Основная теорема.

Теперь сформулируем основную теорему этого параграфа.

Теорема

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ — это два банаховых пространства и $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Тогда имеют место следующие утверждения

(i) $\mathbb{T}(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbb{T}^t$ — *является инъективным;*

(ii) $\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^* \Rightarrow \mathbb{T}$ — *является инъективным, причем имеет место обратное утверждение при условии, что $\mathbb{E}$ рефлексивно.*

Доказательство основной теоремы. 1.

(i). Итак, пусть $\mathbb{T}^t f^* = 0$, тогда для всех $e \in \mathbb{E}$ имеем равенства

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \left\langle f^*, \mathbb{T} e \right\rangle_f ,$$

но тогда в силу плотности $\mathbb{T}\mathbb{E}$ в $\mathbb{F}$ получаем, что единственным продолжением функционала f^* ортогонального $\mathbb{T}\mathbb{E}$ является функционал ортогональный всему пространству $\mathbb{F}$, стало быть, $f^* = \theta$. Докажем теперь утверждение в другую сторону. Пусть $\mathbb{T}^t$ инъективен. Докажем, что если $f^* \in \mathbb{F}^*$ есть нуль на $\mathbb{T}\mathbb{E}$, то f^* есть нуль на $\mathbb{F}$ откуда и следует в силу теоремы Хана–Банаха плотность множества $\mathbb{T}\mathbb{E}$ в $\mathbb{F}$. Действительно, равенство

$$\langle f^*, f \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{T}\mathbb{E}$$

эквивалентно равенству

$$\langle f^*, \mathbb{T} e \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Доказательство основной теоремы. 2.

Но последнее равенство равно в силу определения $\mathbb{T}^t$ равно

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Отсюда сразу же получаем, что $\mathbb{T}^t f^* = \theta$. Откуда в силу инъективности $\mathbb{T}^t$ приходим к выводу, что $f^* = \theta$. Значит,

$$\mathbb{T}(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}.$$

Доказательство основной теоремы. 3.

(ii). Итак, пусть

$$\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*$$

и $\mathbb{T}e = 0$. Тогда из равенства

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*$$

получаем, что $e \in \mathbb{E}$ ортогонально всему пространству $\mathbb{E}^*$, а значит, $e = \theta$.

Доказательство основной теоремы. 4.

Пусть теперь $\mathbb{T}$ является инъективным. Попробуем доказать требуемое утверждение как и на шаге (i). Итак, надо доказать, что функционал $e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$ равный нулю на $\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*$ равен нулю и на всем $\mathbb{E}^*$, откуда в силу теоремы Хана–Банаха получим требуемый результат. Пусть имеет место равенство

$$\langle e^{**}, e^* \rangle_{e*} = 0 \quad \text{для всех} \quad e^* \in \mathbb{T}^t\mathbb{F}^*,$$

которое эквивалентно

$$\left\langle e^{**}, \mathbb{T}^t f^* \right\rangle_{e*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Доказательство основной теоремы. 5.

Но последнее выражение равно

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} e^{**}, f^* \right\rangle_{f*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*,$$

где $\mathbb{T}^{tt}$ — есть транспонированный к $\mathbb{T}^t$. Из последнего равенства сразу же получаем, что

$$\mathbb{T}^{tt} e^{**} = \theta.$$

И тут мы сталкиваемся с трудностью: **из инъективности оператора $\mathbb{T}$, вообще говоря, не следует инъективность оператора $\mathbb{T}^{tt}$.** Поэтому нужно изучить явное представление оператора $\mathbb{T}^{tt}$ через оператор $\mathbb{T}$.

Доказательство основной теоремы. 6.

Рассмотрим транспонированный оператор $\mathbb{T}^{tt}$ к оператору $\mathbb{T}^t$. Действительно, по определению имеем

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} e^{**}, f^{*} \right\rangle_{f*} = \left\langle e^{**}, \mathbb{T}^{t} f^{*} \right\rangle_{e*} \quad \forall \quad e^{**} \in \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad f^{*} \in \mathbb{F}^{*}. \qquad (3)$$

С учетом того, что имеет изометрически изоморфные вложения

$$\mathbb{J}_e : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad \mathbb{J}_f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^{**}$$

мы можем переписать (3) в следующем виде

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} \mathbb{J}_e e, f^{*} \right\rangle_{f*} = \left\langle \mathbb{J}_e e, \mathbb{T}^{t} f^{*} \right\rangle_{e*}. \qquad (4)$$

Доказательство основной теоремы. 7.

С другой стороны, имеем равенства

$$\left\langle \mathbb{J}_e e, \mathbb{T}^t f^* \right\rangle_{e*} = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T} e \rangle_f = \langle \mathbb{J}_f \mathbb{T} e, f^* \rangle_{f*}$$

Отсюда и из (4) получим равенство

$$\mathbb{T}^{tt} \mathbb{J}_e = \mathbb{J}_f \mathbb{T}.$$

В силу рефлексивности пространства $\mathbb{E}$ существует обратный оператор $\mathbb{J}_e^{-1}$ и поэтому получаем равнство

$$\mathbb{T}^{tt} = \mathbb{J}_f \mathbb{T} \mathbb{J}_e^{-1}.$$

Отсюда из инъективности $\mathbb{T}$ вытекает инъективность оператора $\mathbb{T}^{tt}$, а стало быть, получаем, что

$$\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*.$$

Плотные вложения банаховых пространств

Теперь достаточно применить общий результат теоремы к важному частному случаю оператора инъективного и непрерывного вложения

$$\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$$

и транспонированного оператора

$$\mathbb{J}_{ef}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*.$$

И, тем самым, получить следующий весьма полезный результат в приложениях к изучению слабых решений краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных.

Теорема о плотном вложении

Теорема

Пусть $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *— это два банаховых пространства и* $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. *Тогда имеют место следующие утверждения*

(i) $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbb{J}_{ef}^{t}$ *— является инъективным;*

(ii) $\mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^* \Rightarrow \mathbb{J}_{ef}$ *— является инъективным, причем имеет место обратное утверждение при условии, что* $\mathbb{E}$ *рефлексивно.*

Следствие 1. *В случае рефлексивного банахова пространства* $\mathbb{E}$ *условие* $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}$ *эквивалентно условию* $\mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*$.

Приложения

Теперь давайте рассмотрим ситуацию довольно часто возникающую в приложениях. Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ два банаховых пространства и $\mathbb{E}$ рефлексивно, причем $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}$, т. е. существует такой линейный, инъективный и непрерывный оператор вложения

$$\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F},$$

причем $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E}$ плотно в $\mathbb{F}$. Таким образом, каждому элементу $u \in \mathbb{E}$ сопоставляется некоторый элемент $v = \mathbb{J}_{ef}u$. С другой стороны, для оператора $\mathbb{J}_{ef}$ определен транспонированный оператор

$$\mathbb{J}_{ef}^t : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*,$$

причем в силу теоремы 3 оператор $\mathbb{J}_{ef}^t$ является линейным, непрерывным, инъективным, причем $\mathbb{J}_{ef}^t\mathbb{F}^*$ плотно в $\mathbb{E}^*$.

Приложения

Таким образом, каждому элементу $f \in \mathbb{F}^*$ соответствует некоторый элемент $\mathbb{J}_{ef}^t f \in \mathbb{E}^*$. По определению транспонированного оператора выполнено равенство:

$$\left\langle \mathbb{J}_{ef}^t f, u \right\rangle_e = \left\langle f, \mathbb{J}_{ef} u \right\rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \tag{5}$$

Однако, если мы отождествим $\mathbb{E}$ с его образом в $\mathbb{F}$, т. е. с $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E}$, а $\mathbb{F}^*$ отождествим с его образом в $\mathbb{E}^*$, т. е. с $\mathbb{J}_{ef}^t \mathbb{F}^*$, тогда (5) можно переписать в более простом виде, как это всегда и делается:

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*, \tag{6}$$

причем в силу условий и теоремы 3 имеют место плотные вложения

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*. \tag{7}$$

Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема

Пусть банахово пространство $\mathbb{E}$ непрерывно и плотно вложено в банахово пространство $\mathbb{F}$, тогда имеет место равенство

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \textit{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \tag{8}$$

Приложения

Замечание. В частном случае, когда $\mathbb{E}$ рефлексивно и $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ — некоторое вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и мы согласно теореме Рисса отождествили $\mathbb{H}$ с его сопряженным $\mathbb{H}^*$, то из (6) и (7) мы получим следующие соотношения

$$\langle f, u \rangle_e = (f, u) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{H},$$

причем

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{H} \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*.$$