Лекция 11. Метод Галеркина в сочетании с методом компактности.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

27 ноября 2013 г.

Постановка задачи.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$.
Приведем классическую постановку рассматриваемой в дальнейшем задачи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u + |u|^q u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,\mathrm{T}), \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u^{'}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

где $q > 0$ и

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Определение. *Слабым обобщенным решением задачи* (*1*), (*2*) *назовем функцию* $u(x)(t)$ *класса* $u \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, $u^{'} \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^2(\Omega))$, $u^{''} \in \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$, *удовлетворяющую задаче*

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle u^{''} - \triangle u + |u|^q u, v \right\rangle = 0 \; \forall \; v \in \mathbb{L}^1(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \; q \in (0, 4], \tag{3}$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u^{'}(0) = u_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega), \tag{4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— скобки двойственности между гильбертовыми пространствами* $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *и* $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

Эквивалентная постановка.

Задача (3)–(4) эквивалентна следующей

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\varphi(t)\left\langle u^{''}-\triangle u+|u|^q u, w\right\rangle = 0 \ \forall\ w\in\mathbb{H}_0^1(\Omega),\ \forall\ \varphi(t)\in\mathbb{L}^1(0,\mathrm{T}), \tag{5}$$

$$u(0)=u_0\in\mathbb{H}_0^1(\Omega),\quad u^{'}(0)=u_1\in\mathbb{L}^2(\Omega). \tag{6}$$

Основная теорема.

Теорема

Пусть $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $u_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ *и* $q \in (0, 2]$. *Тогда существует единственное слабое обобщенное решение задачи* (1), (2) *в смысле определения* 1 *в классе* $u \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^2(\Omega))$, $u'' \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$.

Приближенные решения-1.

Рассмотрим теперь «приближенную» к задаче (5)–(6) следующую задачу

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}_m} dt\varphi(t)\left\langle u_m'' - \triangle u_m + |u_m|^q u_m, w_j\right\rangle = 0,\ u_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)w_k, \tag{7}$$

$$\mathrm{T}_m > 0,\ w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),\ \forall\, \varphi(t) \in \mathbb{L}^1(0, \mathrm{T}),\ j = \overline{1, m},$$

$$u_m(0) = u_{m0} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u_m'(0) = u_{m1} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \tag{8}$$

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, \mathrm{T}_m], \tag{9}$$

где

$$u_{m0} = \sum_{i=1}^m \alpha_{mi} w_i \to u_0 \text{ сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

$$u_{m1} = \sum_{i=1}^m \beta_{mi} w_i \to u_1 \text{ сильно в } \mathbb{L}^2(\Omega),$$

Выбор базиса.

Относительно системы функций $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty}$ предположим, что это решения задачи на собственные значения и собственные функции

$$\triangle w_j + \lambda_j w_j = 0, \quad w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Известно, что система функций $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty}$ линейно независима и плотна в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Эквивалентная постановка галеркинских приближений.

Поскольку $\mathbb{C}_0^\infty[0, \mathrm{T}_m] \subset \mathbb{L}^1(0, \mathrm{T}_m)$, то в (1.17) возьмем функцию $\varphi(t) \in \mathbb{C}_0^\infty[0, \mathrm{T}_m]$. С другой стороны, в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, \mathrm{T}_m]$ имеем

$$\left\langle u_m'' - \triangle u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle \in \mathbb{C}[0, \mathrm{T}_m].$$

Отсюда в силу основной леммы вариационного исчисления получим поточечную по $t \in [0, \mathrm{T}_m]$ систему m уравнений:

$$\left\langle u_m'' - \triangle u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{10}$$

Поскольку $w_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$, поэтому

$$\langle w_k, w_j \rangle = (w_k, w_j)_2, \quad \langle \triangle w_k, w_j \rangle = (\nabla w_k, \nabla w_j)_2.$$

Система дифференциальных уравнений.

Кроме того, поскольку по построению $u_m \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}_m; \mathbb{H}^1_0(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}_m; \mathbb{L}^{q+2}(\Omega))$ при $q \in [0, 4]$ имеем

$$|u_m|^q u_m \in \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}_m; \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)).$$

С другой стороны, $w_j \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$. Поэтому

$$\langle |u_m|^q u_m, w_j \rangle = (|u_m|^q u_m, w_j)_2 \,.$$

В силу этого из (10) вытекает следующая задача

$$\sum_{k=1}^{m} (w_k, w_j)_2 \, c''_{mk}(t) + \sum_{l=1}^{m} (\nabla w_k, \nabla w_j)_2 \, c_{ml}(t) + \\ + (|u_m|^q u_m, w_j)_2 = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (11)$$

Существование решений.

В силу линейной независимости системы $w_1, ..., w_m$ имеем

$$\det\left(w_k, w_j\right)_2 \neq 0.$$

Поэтому система (11) после обращения матрицы $||a_{kj}|| = ||\left(w_k, w_j\right)_2||$ примет вид системы типа Коши–Ковалевской, а, значит, найдется такое $\mathrm{T}_m > 0$, что система (11) с соответствующими начальными условиями имеет решение $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, \mathrm{T}_m]$.

Априорные оценки-1.

Умножим уравнение (10), отвечающее индексу j, на c'_{mj} и просуммируем по j. Тогда получим

$$\left(u''_m, u'_m\right)_2 + (\nabla u_m, \nabla u'_m)_2 + \left(|u_m|^q u_m, u'_m\right)_2 = 0, \qquad (12)$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\| u'_m \|_2^2 + \| \nabla u_m \|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt} \| u_m \|_{q+2}^{q+2} = 0. \qquad (13)$$

В силу (13) получим

$$\frac{1}{2}\left[\| u'_m \|_2^2 + \| \nabla u_m \|_2^2\right] + \frac{1}{q+2} \| u_m \|_{q+2}^{q+2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\| u_{m1} \|_2^2 + \| \nabla u_{m0} \|_2^2\right] + \frac{1}{q+2} \| u_{m0} \|_{q+2}^{q+2} . \qquad (14)$$

По условию имеем

$$u_{m0} \to u_0 \text{ сильно в } \mathbb{H}^1_0(\Omega), \quad u_{m1} \to u_1 \text{ сильно в } \mathbb{L}^2(\Omega),$$

что означает выполнение неравенства

$$\frac{1}{2}\left[\| u_m' \|_2^2 + \| \nabla u_m \|_2^2\right] + \frac{1}{q+2} \| u_m \|_{q+2}^{q+2} \leqslant C(\mathrm{T}), \qquad (15)$$

где постоянная $C(\mathrm{T})$ — не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Из (15) вытекает, что

$$u_m \text{ ограничены в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{H}^1_0(\Omega)), \quad u_m' \text{ ограничены в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega)). \qquad (16)$$

Отсюда в частности следует что $\mathrm{T}_m > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Предельный переход-1.

Пространство

$$\mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$$

является сопряженным к

$$\mathbb{L}^{1}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$$

и поэтому из последовательности u_m можно выделить такую последовательность u_μ, что

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad * \text{–слабо в } \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \tag{17}$$

$$u'_\mu \rightharpoonup v \quad * \text{–слабо в } \mathbb{L}^{\infty}(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^2(\Omega)). \tag{18}$$

Предельный переход-2.

Из (17) вытекает, что

$$u'_\mu \rightharpoonup u' \text{ в } \mathcal{D}'(0, \mathrm{T}; \mathbb{H}^1_0(\Omega)), \tag{19}$$

и, следовательно, в силу (18) имеем $v = u'$. Кроме того, из (17) и (18) вытекает, что u_m принадлежат ограниченному множеству $\mathbb{H}^1(Q)$, $Q = (0, \mathrm{T}) \times \Omega$. Однако, как известно вложение $\mathbb{H}^1(Q)$ в $\mathbb{L}^2(Q)$ компактно. Здесь мы применяем метод компактности!!! Итак мы можем считать, что подпоследовательность u_μ, удовлетворяет условию

$$u_\mu \to u \text{ сильно в } \mathbb{L}^2(Q) \text{ и почти всюду.} \tag{20}$$

Предельный переход-3.

И, наконец, поскольку $|u_m|^q u_m$ ограничены в $\mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega))$, то можно еще предположить, что

$$|u_m|^q u_m \rightharpoonup w \quad * \text{–слабо в} \quad \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}; \mathbb{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)). \tag{21}$$

Существенно важный момент — здесь мы сталкиваемся с одной из наиболее типичных трудностей нелинейных задач — доказательство того, что

$$w = |u|^q u. \tag{22}$$

Предельный переход-3.

На этот вопрос отвечает следующая лемма.

Лемма

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_t$, g_m и g — такие функции из $\mathbb{L}^p(Q)$, $1 < p < +\infty$, что

$$\| g_m \|_{\mathbb{L}^p(Q)} \leqslant C, \quad g_m \to g \quad \text{почти всюду в} \quad Q.$$

Тогда $g_m \rightharpoonup g$ слабо в $\mathbb{L}^p(Q)$.

Предельный переход-4.

Таким образом, равенство (22) доказано, и можно перейти к пределу в (10), полагая $m = \mu$. В силу (17) и (18) имеем

$$(\nabla u_\mu, \nabla w_j)_2 \rightharpoonup (\nabla u, \nabla w_j)_2 \ \ast\text{–слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}), \tag{23}$$

$$\left(u_\mu^{'}, w_j\right)_2 \rightharpoonup \left(u^{'}, w_j\right)_2 \ \ast\text{–слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}), \tag{24}$$

$$(|u_\mu|^q u_\mu, w_j)_2 \rightharpoonup (|u|^q u, w_j)_2 \ \ast\text{–слабо в } \mathbb{L}^\infty(0,\mathrm{T}), \tag{25}$$

и, следовательно,

$$\left(u_\mu^{''}, w_j\right)_2 = \frac{d}{dt}\left(u_\mu^{'}, w_j\right)_2 \to \left(u^{''}, w_j\right)_2 \ \text{в } \mathcal{D}^{'}(0,\mathrm{T}). \tag{26}$$

Предельный переход-5.

С другой стороны, в силу (10) имеем

$$\left(u_m'', w_j\right)_2 = \left\langle u_m'', w_j \right\rangle = (\nabla u_m, \nabla w_j)_2 - (|u_m|^q u_m, w_j)_2 = 0. \tag{27}$$

Значит,

$$\left(u_m'', w_j\right)_2 \to (v, w_j)_2 \ * \text{–слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}), \tag{28}$$

откуда в силу (26) получаем $v = u''$.

Предельный переход-6.

Теперь мы можем перейти к пределу при $m = \mu \to +\infty$ в задаче (7) и с учетом (23)– (28) получить

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt\varphi(t)\left\langle u'' - \triangle u + |u|^q u, w_j\right\rangle = 0,\ j = \overline{1,\infty},\ \forall\ \varphi(t) \in \mathbb{L}^1(0,\mathrm{T}). \tag{29}$$

Отсюда в силу плотности «галеркинского» базиса $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ мы получим из (29) задачу (5).

Начальные условия-1.

Нам осталось доказать, что построенная функция $u(x)(t)$ удовлетворяет начальным условиям (6). Действительно, по построению имеем $u_\mu(0) = u_{\mu 0} \to u_0$ сильно в $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$. С другой стороны, в силу (17)–19 после возможного исправления на $[0, \mathrm{T}]$ на множестве нулевой меры Лебега получим

$$u_\mu(0) \to u(0) \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Отсюда следует, что имеет место начальное условие $u(0) = u_0$. Теперь в силу (28) имеем

$$\left(u''_m, w_j\right)_2 \to (v, w_j)_2 \ * \text{–слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, \mathrm{T}), \tag{30}$$

и, следовательно,

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right)_2 \to \left(u', w_j\right)_2 \Big|_{t=0} = (u'(0), w_j). \tag{31}$$

Начальные условия-2.

Поскольку

$$\left(u_{\mu}^{'}(0), w_j\right)_2 \to (u_1, w_j)_2 \,, \tag{32}$$

то имеем

$$\left(u^{'}(0), w_j\right)_2 = (u_1, w_j)_2 \quad \forall\, j. \tag{33}$$

Единственность-1.

Лемма

Пусть $v \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega))$, $v' \in \mathbb{L}^2(0,\mathrm{T};\mathbb{L}^2(\Omega))$, *тогда имеет место следующее равенство для почти всех* $t \in (0,\mathrm{T})$

$$\|v\|_2^2(t) - \|v\|_2^2(0) = 2\int\limits_0^t ds\,\left(v', v\right)_2(s).$$

Единственность-2.

Лемма

Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $q \in (0, 2]$. Тогда решение u, полученное в теореме 1, единственно.

Единственность-3.

Пусть u_1 и u_2 — два слабых обобщенных решения задачи в смысле определения 1 и $w = u_1 - u_2$. Пусть $s \in (0, \mathrm{T})$. Положим

$$\psi(t) = \left\{ -\int\limits_t^s w(\sigma)\, d\sigma, \quad t \leqslant s; \quad 0 \text{ при } t > s \right\},$$

$$w_1(t) = \int\limits_0^t w(\sigma)\, d\sigma, \text{ так что } \psi(t) = w_1(t) - w_1(s), \text{ если } t \leqslant s.$$

Тогда из (3) положив $v = \psi(t)$ получим

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} dt \left\langle w'' - \triangle w + |u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi(t) \right\rangle = 0, \; w(0) = 0, \; w'(0) = 0. \tag{34}$$

Единственность-4.

Откуда, интегрируя по частям, получим

$$-\int\limits_0^s \left(w', \psi'\right)_2 dt + \int\limits_0^s (\nabla w, \nabla \psi)_2 \, dt = -\int\limits_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2 \, ,$$

а поскольку $\psi'(t) = w(t)$, в силу леммы 2 имеем

$$-\int\limits_0^s \left(w', w\right)_2 \, dt = -\frac{1}{2} \parallel w \parallel_2^2 (s).$$

Единственность-5.

Поскольку $w_1(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,\mathrm{T}];\mathbb{H}^1_0(\Omega))$ и $w(t) = w_1'(t)$ справедлива цепочка равенств

$$\int\limits_0^s (\nabla w(t), \nabla\psi(t))_2 = \int\limits_0^s (\nabla\psi'(t), \nabla\psi(t))_2\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^s \frac{d}{dt}(\nabla\psi(t), \nabla\psi(t))_2\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla\psi(s), \nabla\psi(s))_2 - \frac{1}{2}(\nabla\psi(0), \nabla\psi(0))_2 = -\frac{1}{2} \parallel \nabla w_1(s) \parallel_2^2 .$$

Единственность-6.

Тогда приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\parallel w \parallel_2^2 (s) + \frac{1}{2}\parallel \nabla w_1(s) \parallel_2^2 = \int\limits_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2 \, dt. \tag{35}$$

Рассмотрим отдельно выражение в правой части, т. е. с учетом равенства $\psi(t) = w'(t)$ выражение

$$\mathrm{I} = \int\limits_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2 \, dt =$$

$$= \int\limits_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, w_1(t) - w_1(s))_2 \, dt \leqslant$$

$$\leqslant (q+1) \int\limits^s \int dx \, |w(t)| \, [|w_1(t)| + |w_1(s)|] \max\{|u_1|^q, |u_2|^q\} \, dt.$$

Единственность-7.

Теперь воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера со следующими показателями:

$$p_1 = \frac{q+2}{q}, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = r, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1,$$

где потребуем, чтобы

$$r \leqslant 2^*.$$

Откуда сразу же получим, что

$$r = \frac{2(q+2)}{2-q}$$

и, стало быть, при $N \geqslant 3$ имеем

$$\frac{2(q+2)}{2-q} \leqslant \frac{2N}{N-2} \Rightarrow q \leqslant \frac{2}{N-1},$$

а при $N = 1, 2$ имеем $q \in [0, 2)$.

Единственность-8.

При выполнении указанных условий на q и N имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{H}^1_0(\Omega) \subset \mathbb{L}^r(\Omega).$$

Единственность-9.

Итак, из (36) получим следующее неравенство

$$\mathrm{I} \leqslant (q+1) \int\limits_0^s dt\, \|w\|_2(t) \left[\|w_1(s)\|_r + \|w_1(t)\|_r\right] \times$$

$$\times \max\left\{\|u_1\|_{q+2}^q(t), \|u_2\|_{q+2}^q(t)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_0^s dt \|w\|_2(t) \left[\|\nabla w_1(s)\|_2 + \|\nabla w_1(t)\|_2\right] dt \leqslant$$

$$\leqslant c_2(\varepsilon) \int\limits_0^s dt \|w\|_2^2(t) + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla w_1(s)\|_2^2 +$$

$$+ c_3 \int\limits_0^s dt \left[\frac{1}{2}\|w\|_2^2(t) + \frac{1}{2}\|\nabla w_1\|_2^2(t)\right] \qquad (37)$$

Единственность-10.

Отсюда в силу (35) и (37) приходим к неравенству

$$\| w \|_2^2 (t) + \| \nabla w_1 \|_2^2 (t) \leqslant \mathrm{C}_4(\mathrm{T}) \int\limits_0^t ds \left[\| w \|_2^2 (s) + \| \nabla w_1 \|_2^2 (s) \right].$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла–Белмана приходим к выводу, что $u_1 = u_2$ почти всюду.