ГЛАВА VIII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

§1. Метод конечных разностей в прикладных задачах

1.1 Общая постановка задачи

Универсальным методом приближённого решения, применимым для широкого круга задач математической физики, является метод конечных разностей. Как правило задачи матаматической физики представляют собой системы нелинейных уравнений в частных производных, рассматриваемых в некоторой t-цилиндрической области D:

$$\bar{D} = \{(x, y, z; t) : (x, y, z) \in \bar{G}, t \in [t_\circ, T]\} = \bar{G} \times [t_\circ, T].$$

При этом естественным образом выделяется "эволюционный" характер переменной t. Решение интересующей нас задачи подчинено в $\bar{D}$ дополнительным требованиям: 1) условия при $t = t_0$ (на гиперплоскости $t = t_0$) называются *начальными условиями*; 2) условия на границе $\partial D \equiv \gamma$ области D — *краевыми* или *граничными* условиями.

Задача с *начальными условиями* – задача в неограниченной области D – называется задачей Коши; в отличии от *краевой* или *смешанной краевой* задачи.

Удобна общая постановка задачи, не связанная с выделением одной из переменных. Пусть $(x_1, ..., x_p) \equiv x \in D : \partial D = \Gamma$. Тогда для интересующей нас функции $u(x)$ имеем задачу:

$$A[u(x)] = f(x), \quad x \in D \tag{1}$$

$$R[u(x)] = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

где A и R –дифференциальные операторы задачи и краевых условий. Относительно задачи (1-2) будем предполагать ,что она поставлена корректно, то есть операторы A и R; область D и её границы Γ таковы, что при выборе соответствующих классов функций и правых частей в уравнениях (1) и (2) решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных [*1)].

С точки зрения приложений нас, естественно, будет интересовать случай, когда оператор A — линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка (согласно обычной классификации уравнений это — эллиптическое, гиперболическое или параболическое уравнение). Хотя, конечно, задача (1-2) может быть и другой природы.

[*1)] И коэффициентов уравнения, то есть соответствующих операторов задачи (1-2).

1.2 Разностная схема

Введём в области $\bar{D} = D + \Gamma$ сетку $\Omega_h = x_{i \in I}$ состоящую из множества внутренних узлов ω_h и множества граничных узлов Γ_h:

$$\Omega_h = \{x_i\}_I = \omega_h \cup \Gamma_h.$$

Мы пока абстрагируемся от способа конкретного получения сетки Ω_h в области $\bar{D}$; смысла параметра "h" в соответствующих сетках, контролирующего как пространственные, так и временные размеры сетки; особенностей получения сетки Γ_h на границе области — оставим эти вопросы до рассмотрения конкретных задач.

Далее, рассмотрим сеточные функции $y(x) \equiv y_h(x),\ x \in \Omega_h$ дискретного переменного $\{x_i\}$ и с их помощью построим приближенное решение задачи (1-2). Для этого относительно $y_h(x)$ сформулируем "разностную задачу", обычно "заменяя" операторы исходной задачи A и R и их сеточными аналогами A_h и R_h. Тогда на сеточном шаблоне $\Omega_h = \omega_h \cup \Gamma_h$ имеем

$$A_h y_h(x) = \varphi_h(x), \quad x \in \omega_h \tag{3}$$
$$R_h y_h(x) = \chi_h(x), \quad x \in \Gamma_h, \tag{4}$$

Задачу (3)-(4) назовём *разностной схемой* для задачи (1)-(2). Обычно это алгебраическая система уравнений относительно $y_i = y_h(x_i)$.

При переходе от исходной задачи (1)-(2) к её разностному аналогу (3)-(4) особенно важны три группы вопросов:

–существование, единственность и алгоритм построения разностного решения y_h ;

–при каких условиях разностное решение $y_h(x)$ стремится к точному решению $u(x)$ и какова при этом скорость сходимости;

–из каких соображений и как конкретно выбирать сетку Ω_h и строить разностную схему: A_h, R_h и φ_h, χ_h в задаче (3)-(4).

§2. Основные понятия и теоремы теории разностных схем

2.1 Невязка разностной схемы.

При построении разностного уравнения задачи

$$A[u] = f \quad \Rightarrow \quad A_h y = \varphi_h$$

мы получили задачу, которой точное решение $u(x)$, как правило, не удовлетворяет (мы подразумеваем простейшую схему проектирования $u(x)$ на сетку Ω_h $\{u(x_i)\}$).

Сеточную функцию

$$\psi_h = \varphi_h - A_h u$$

называют *невязкой* сеточного уравнения (3). Её удобно представить на решении $u(x)$ в виде

$$\psi_h = (Au - f)_h - (A_h u - \varphi_h) \quad \text{на } \omega_h. \tag{5}$$

Аналогично определяются невязки граничных условий

$$\eta_h(x) = (Ru - \mu)_h - (R_h u - \chi_h) \quad \text{на } \Gamma_h. \tag{5'}$$

Как правило невязки $\psi_h(x)$ и $\eta_h(x)$ оценивают по параметру h через разложение в ряд Тейлора в предположении достаточной гладкости соответствующего решения $u(x)$ для получения представления невязки с остаточным членом вида $O(h^n)$.

2.2 Аппроксимация разностной схемы

Разностная схема (3)-(4) аппроксимирует задачу (1)-(2), если имеет место:

$$\| \psi_h(x) \|_{\varphi_h} \to 0, \quad \| \eta_h(x) \|_{\chi_h} \to 0 \quad \text{при } h \to 0 \tag{6}$$

То есть соответствующие невязки стремяться к нулю при $h \to 0$.
Аппроксимация задачи (1)-(2) имеет порядок k ,если

$$\| \psi_h(x) \|_{\varphi_h} = O(h^k); \quad \| \eta_h(x) \|_{\chi_h} = O(h^k), \quad h \to 0. \tag{6'}$$

В этих определениях нормы вычисляются для сеточных функций на ω_h и Γ_h, но в своих функциональных пространствах (соответствующих правых частей). Вопрос о выборе норм отложим до рассмотрения частных задач. Обычно это сеточные аналоги чебышевской нормы в C или гильбертовой нормы в L_2.
Замечания:

Само решение задачи (1)-(2) ,как правило, неизвестно и использовать его для получения невязок ψ_h и η_h затруднительно. Поэтому берут достаточно широкий класс функций $\mathcal{V}$ и требуют аппроксимации порядка k задачи (1)-(2) $\forall v \in \mathcal{V}$, то есть

$$\| (Av - f)_h - (A_h v - \varphi_h) \|_{\varphi_h} = O(h^k), \quad h \to 0.$$

При этом на решении $v \equiv u(x)$ задачи (1)-(2) аппроксимация будет не хуже ,чем порядка k (а может быть и лучше).

Как правило схема (3)-(4) по различным переменным имеет различные порядки аппроксимации, например, невязка уравнения

$$\| \psi_h \|_{\varphi_h} = O(\tau^p + h^k), \quad \text{при } \tau \to 0, \quad h \to 0.$$

Такая аппроксимация называется *абсолютной* в отличии от *условной* аппроксимации в случае, когда, например

$$\| \psi_h \|_{\varphi_h} = O(\tau^p + h^k + \frac{\tau^r}{h^\delta}), \quad \tau \to 0, \quad h \to 0, \quad \frac{\tau^r}{h^\delta} \to 0.$$

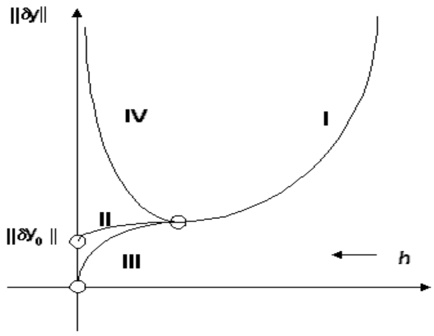
При *условной аппроксимации* разностное уравнение может аппроксимировать различные дифференциальные задачи.

2.3 Устойчивость разностной схемы

Отсутсвие устойчивости разностной схемы характеризуется тем, что малые ошибки, допущенные на каком-либо этапе вычисления, в дальнейшем сильно возрастают и делают непригодным результат расчёта (или вообще невозможным сам расчёт). Обычно устойчивость разностной схемы оценивают по погрешности входных данных, поскольку погрешность аппроксимации, в силу определения (6), при $h \to 0$ стремится к нулю. Выделим в структуре погрешности эти слагаемые:

$$\delta y_h = \delta y_h^{in.} + \delta y_h^{app.}.$$

Типичный график зависимости погрешности сеточного решения от величины шага таков:



I–При уменьшении шага сначала погрешность всех схем убывает, так как существенно уменьшается погрешность аппроксимации.

II–Для устойчивых схем погрешность сеточного решения будет стремиться к конечной величине,связанной с ошибкой входных данных. Если при $h \to 0$ ошибка входных данных исчезает, то — это случай III. То есть устойчивая схема в этом случае позволяет получить сколь угодно высокую точность расчёта.

Если же схема неустойчива (IV), то при $h \to 0$ погрешность $\|\delta y_h\|$ возрастает (ибо растёт объём неустойчивых вычислений). Погрешность $\|\delta y_h\|$ будет иметь ненулевой минимум и уже невозможно получить сколь угодно высокую точность расчёта.

Как правило погрешности *входных данных* и *аппроксимации* имеют степенной характер зависимости от $h \Rightarrow h^\alpha$; а неустойчивость приводит к возрастанию погрешности решения по экспоненциальному закону $\sim b^{a/h}$ и при $h \to 0$ расчёт теряет смысл. Напомним

Разностная схема (3-4) устойчива по входным данным φ и χ, если решение разностной схемы непрерывно зависит от входных данных и эта зависимость равномерна относительно шага сетки h, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *(δ не зависит от h) такое, что*

$$\begin{array}{ll} \forall \chi_1, \chi_2 : & \| \chi_1 - \chi_2 \| < \delta(\varepsilon) \\ \forall \varphi_1, \varphi_2 : & \| \varphi_1 - \varphi_2 \| < \delta(\varepsilon) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \| y_1(x) - y_2(x) \|_{y_h} < \varepsilon. \qquad (7)$$

Для линейных схем разностное решение линейно зависит от входных данных (в силу линейности обратного оператора)и $\delta(\varepsilon) = C\varepsilon$. Тогда

$$\|y_1 - y_2\| \leq C_1 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\varphi_h} + C_2 \|\chi_1 - \chi_2\|_{\chi_h}. \qquad (7')$$

Замечания:

На устойчивость разностной схемы влияет не только аппроксимация уравнений (1) (то есть оператора A), но, и особенно, краевых условий (2).

Если переменных в задаче несколько, то рассматривают безусловную и условную устойчивость;

Входное значение $\chi_h(x)$ на гиперплоскости $t = t_\circ$ выделяют особо,и соответствующая устойчивость называется устойчивостью по начальным условиям. Тут важна особая роль t. Мы ограничимся рассмотрением разностных схем, в которых сеточная функция рассматривается на двух временных слоях t_m; t_{m+1}, то есть $y \equiv y_h(x; t_m)$ и $\hat{y} \equiv y_h(x; t_{m+1})$. Общий вид такой схемы:

$$B_h \frac{\hat{y} - y}{\tau} + A_h y = \varphi_h.$$

Для такой схемы решение смешанной задачи Коши (с краевыми условиями) на некотором слое t^* можно рассматривать как начальное условие для всех последующих слоёв по t.

Определение: *Двуслойная схема называется равномерно устойчивой по начальным данным, если при постановке начальных данных на любом слое t^*, $(t_0 \leq t^* < t < T)$ она по ним устойчива, причём эта устойчивость равномерна по t^*.*

Для линейных разностных схем это означает, что $\exists C > 0$ не зависящее от t^* и h и

$$\| y_1(t) - y_2(t) \|_{y_h} \leq C \| y_1(t^*) - y_2(t^*) \|, \quad t_0 \leq t^* < t < T \qquad (7'')$$

где $y_1(x; t), y_2(x; t)$ — решение разностной задачи с одинаковой правой частью $A_h y = \varphi_h$, но различными начальными данными $\chi_{1,2}|_{t^*}$.

Из равномерной устойчивости $(7'')$ следует $(7')$ (но не наоборот).

Теорема 1. (достаточный признак равномерной устойчивости):

Пусть $y_1(x; t)$ и $y_2(x; t)$ решения разностной задачи $A_h y = \varphi_h$ с одинаковой правой частью, отвечающие различным начальным условиям $\chi_{1,2}|_{t^*=t_\circ}$.Тогда для равномерной устойчивости $\{A_h; R_h\}$ по начальным данным достаточно, чтобы для всех слоёв по t имело место

$$\| \hat{y}_1 - \hat{y}_2 \|_{y_h} \leq (1 + C\tau) \| y_1 - y_2 \|_{y_h}, \quad C \geq 0 \qquad (8)$$

Доказательство: Если на некотором слое t_* в решении содержится ошибка δy, то при переходе на следующий слой она возрастает не больше чем в $(1 + C\tau) \leq e^{C\tau}$ раз. При достижении слоя T за $\frac{T-t^*}{\tau}$ шагов ошибка вырастет не более чем в $e^{C(T-t^*)}$ раз, то есть не более чем в $e^{C(T-t_0)}$ раз. Следовательно

$$\| \delta y \| \leq A \| \delta y(t_0) \| .$$

Эта оценка равномерна по t^* и h ■

Фактический рост погрешности не более чем в $(1 + C\tau)^{\frac{T-t_0}{\tau}}$ раз.

Теорема 2. (признак устойчивости двуслойной разностной схемы по правой части):

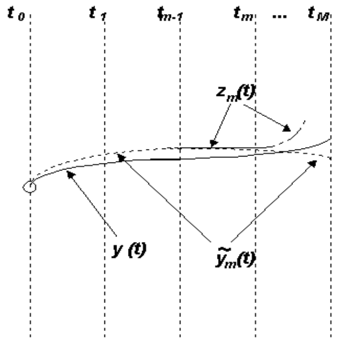
Пусть двуслойная разностная схема $A_h y = \varphi_h$ равномерно устойчива по начальным данным и такова, что если два её решения $A_h y_{1,2} = \varphi_{1,2}$ на некотором слое t_m равны $y_1(x; t_m) = y_2(x; t_m)$, то на следующем слое t_{m+1} выплнено соотношение

$$\| \hat{y}_1 - \hat{y}_2 \| \leq C\tau \| \varphi_1 - \varphi_2 \|, \quad C > 0,$$

$C - const$ (не зависит от h), в таком случае разностная схема устойчива по правой части φ_h.

Доказательство: Итак, пусть возмущение связанно только с правой частью φ. Тогда пусть $y(x;t)$ — решение невозмущённой разностной задачи $A_h y = \varphi$; $\tilde{y}(x;t)$ — решение возмущённой разностной задачи $A_h\tilde{y} = \tilde{\varphi}$, причём $y(t_0) = \tilde{y}(t_0)$ (ибо нас интересует только возмущение правой части).

Введём в рассмотрение последовательность сеточных функций $\{z_m(x;t)\}_{m=1,2,\ldots}$, определенных при $t \geq t_{m-1}$ из условий:



$$\begin{cases} z_m(t_{m-1}) = z_{m-1}(t_{m-1}) \\ A_h z_m = \begin{cases} \tilde{\varphi} & , \quad t_{m-1} < t \leq t_m \\ \varphi & , \quad t > t_m \end{cases} \\ z_1(t_0) = y(t_0) = \tilde{y}(t_0) = z_0(t_0) \end{cases}$$

На каждом из слоёв $t \in [t_{m-1}, t_m]$ решение возмущённой задачи $\tilde{y}(t)$ совпадает с соответствующей функцией $z_m(t)$ поскольку в точку t_{m-1} начальное условие принесено функцией z_{m-1} удовлетворяющей возмущенному уравнению на соответствующем отрезке t. Аналогично на предыдущем слое и так далее, пока мы не попадём в начальную по t точку. В точке $t = t_{m-1}$ и $\tilde{y}$ и z_{m-1} имеют то же начальное условие и на интервале $(t_{m-1}; t_m)$ удовлетворяют возмущенной задаче $A_h(\cdot) = \tilde{\varphi}$.

Далее, при $t \in (t_m, t_{m+1})$, функции $z_{m+1}(t)$ и $z_m(t)$ совпадают в точке t_m и удовлетворяют различным уравнениям. Тогда:

1) $\| z_{m+1}(t_{m+1}) - z_m(t_{m+1}) \| \leq C\tau \| \varphi - \tilde{\varphi} \|_{\varphi}$.

2) В силу равномерной устойчивости нашей задачи по начальным данным при $t \geq t_{m+1}$ функции $z_{m+1}(t)$ и $z_m(t)$ удовлетворяют одному уравнению но разностным начальным условиям. В таком случае на последнем временном слое t_M получим:

$$\| z_{m+1}(t_M) - z_m(t_M) \| \leq C_2 \| z_{m+1}(t_{m+1}) - z_m(t_{m+1}) \| \leq C_2 C\tau \| \varphi - \tilde{\varphi} \| .$$

Откуда:

$$\| z_M(t_M) - z_0(t_M) \| \leq \| z_M - z_{M-1} \| + \| z_{M-1} - z_{M-2} \| + \ldots + \| z_1 - z_0 \| \leq$$

$$\leq MC_2 C\tau \| \varphi - \tilde{\varphi} \| = A(T - t_\circ) \| \varphi - \tilde{\varphi} \| .$$

Таким образом имеет место устойчивость разностной схемы по правым частям ■

Замечание: Сформулируем без доказательства достаточные условия устойчивости двуслойной разностной схемы

$$B\frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = \varphi.$$

Если A и $B > 0$, причм $B \geq \frac{\tau A}{2} > 0$, то $\| \hat{y} \|_A \leq \| y \|_A$, то есть схема устойчива в A-энергетической норме по начальным данным.

2.4 Сходимость разностной схемы

Решая сеточную задачу (3)-(4) нас естественно интересует близость сеточного решения $y(x)$ к решению $u(x)$ задачи (1)-(2). *Разностное решение* $y(x)$ *сходится к решению* $u(x)$, *если*

$$\| y(x) - u(x) \|_h \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{10}$$

Разностное решение имеет порядок точности k, *если*

$$\| y(x) - u(x) \| = O(h^k), \quad h \to 0. \tag{10'}$$

(или обладает сходимостью порядка k*).*

Напомним ещё раз, что мы рассматриваем лишь корректные разностные схемы (3)-(4), то есть решение разностной схемы существует и единственно при любых входных данных φ и χ из заданных классов функций и схема устойчива по входным данным (её решение непрерывно от них зависит).

Теорема3: *Если решение задачи (1)-(2)* $u[f,\mu]$ *существует, разностная схема (3)-(4) корректна и аппроксимирует задачу (1)-(2), то разностное решение* $y[\varphi,\chi]$ *сходится к точному:*

$$\lim_{h\to 0} \| y_h - u \| = 0.$$

("Аппроксимация + Устойчивость $\Rightarrow$ *Сходимость").*

Доказательство: Запишем невязку разностной схемы (3)-(4).

$$\begin{array}{c} \psi_h = (Au - f)_h - (A_h u - \varphi_h) = \varphi_h - A_h u \\ \eta_h = (Ru - \mu) - (R_h u - \chi_h) = \chi_h - R_h u \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} A_h u = \varphi_h - \psi_h \\ R_h u = \chi_h - \eta_h. \end{array} \tag{*}$$

Функция $u(x)$ удовлетворяет задаче (*) — возмущённой задаче (3)-(4). Так как схема устойчива, то $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$

$$\| \psi_h \|_{\varphi_h} < \delta(\varepsilon), \quad \| \eta_h \|_{\chi_h} < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \| y - u \|_{y_h} < \varepsilon.$$

В силу аппроксимации $\forall \delta > 0$, $\exists h_0$, $\forall h < h_0$ имеет место

$$\| \psi_h \|_{\varphi} < \delta, \quad \| \eta \|_{\chi} < \delta.$$

Таким образом: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists h_0(\delta(\varepsilon))$, $\forall h < h_0$ имеем

$$\| y_h - u \|_{y_h} < \varepsilon,$$

то есть $y \to u$ при $h \to 0$ ■

Замечания:

Если какое-либо данное нам условие аппроксимировано точно, то устойчивость по ним можно не требовать, так как они не вносят погрешности в решение (кроме ошибок округления, тогда устойчивость по этим данным нужна).

Для условной аппроксимации (или устойчивости) сходимость тоже носит условный характер.

Для линейных разностных схем имеет место:

Теорема 4. *Пусть выполнены условия Теоремы 1, схема* A_h, R_n *линейна и имеет порядок аппроксимации* k, *то схема (3)-(4) сходится и её точность (сходимость)*

не ниже порядка k (порядка аппроксимации).
Доказательство: Рассмотрим погрешность разностного решения

$$z(x) = y(x) - u(x).$$

Мы получили для решения исходной задачи разностную схему, возмущённую невязками

$$\begin{cases} A_h u = \varphi - \psi, & x \in \omega_h \\ R_h u = \chi - \eta, & x \in \Gamma_h \end{cases}$$

Вычитая эти уравнения из соответствующих уравнений (3)-(4), найдём:

$$\begin{cases} A_h z = \psi \\ R_h z = \eta \end{cases} \tag{**}$$

Схема (**) устойчива, то есть

$$\| z \|_{y_h} \leq C_1 \| \psi \|_{\varphi} + C_2 \| \eta \|_{\chi} .$$

Но, поскольку исходная схема (3)-(4) обладает аппроксимацией порядка k, то

$$\| z \|_{y_h} \leq C_1 \alpha h^k + C_2 \beta h^k = C h^k.$$

Фактическая сходимость может иметь более высокий порядок.

§3. Разностные схемы для одномерного уравнения теплопроводности

3.1 Постановка задачи. Разностная схема

Рассмотрим задачу о распространении тепла на отрезке в случае простейших краевых условий 1-го рода (условий Дирихле)

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$

начальные условия

$$u(x,0) = \mu_1(x) \equiv \mu(x) \tag{11}$$

однородные краевые условия

$$u(0,t) = \mu_2(t) \equiv 0; \quad u(l,t) = \mu_3(t) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$