ГЛАВА III

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§1. Постановка задачи численного интегрирования

Задача численного интегрирования функций заключается в вычислении приближенного значения определенного интеграла

$$I = \int\limits_a^b f(x)\rho(x)\,dx; \qquad (\rho(x) > 0 \text{ – весовая функция})$$

на основе ряда значений подынтегральной функции $\left\{ f(x)\big|_{x=x_k} = f(x_k) = y_k \right\}$.

Формулы численного вычисления однократного интеграла называются *квадратурными формулами*, двойного и более кратного — *кубатурными*. Ограничимся лишь рассмотрением квадратурных формул.

Обычный и естественный прием построения квадратурных формул состоит в замене подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ *интерполирующей* или *аппроксимирующей* функцией $g(x)$ сравнительно простого вида (например полиномом) с последующим аналитическим интегрированием. Это приводит к представлению

$$I = \int\limits_a^b f(x)\rho(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\rho(x)\,dx + R[f], \tag{1}$$

В пренебрежении остаточным членом $R[f]$ получаем приближенную формулу $\tilde{I} = \int_a^b g(x)\rho(x)\,dx$. Мы ограничимся случаем, когда в качестве $g(x)$ выбирается полином (возможно и обобщенный) а $\rho(x) \equiv 1$ (как правило).

Обозначим через $y_i \equiv f(x_i)$ значение подынтегральной функции в различных точках $x_i \in \overline{\omega}_n$ на $[a, b]$[*1)]. В качестве приближенной функции $g(x)$ рассмотрим интерполяционный полином на $\overline{\omega}_n$ в форме полинома Лагранжа:

$$g(x) = L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}\ ,$$

при этом $f(x) = L_n(x) + r_n(x)$; || где $r_n(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа ("точная" формула)

Формула (1) дает:

$$\int\limits_a^b f(x)\rho(x)\,dx = \int\limits_a^b L_n(x)\rho(x)\,dx + R_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) + R_n; \tag{2}$$

[*1)] квадратурные формулы не всегда являются формулами <u>*замкнутого*</u> типа, т.е. $x_0 = a$; $x_n = b$

где

$$C_k = \int\limits_a^b \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)}\,\rho(x)\,dx, \quad R_n(f) = \int\limits_a^b r_n(x)\rho(x)\,dx. \tag{$2'$}$$

В формуле (2) величины $\{x_k\}$ – называются узлами, $\{C_k\}$ – весами, R_n – погрешностью квадратурной формулы $\tilde{I} = \sum_{k=0}^n C_k f(x_k)$. Если веса C_k вычислены по формуле ($2'$), то соответствующую квадратурную формулу (2) называют квадратурной формулой *интерполяционного* типа.

Замечания:

1. Веса $\{C_k\}$ квадратурной формулы (2) при заданном расположении узлов $\overline{\omega}_n$ не зависят от вида подынтегральной функции.

2. В квадратурных формулах интерполяционного типа остаточный член $R_n[f]$ может быть представлен в виде значения конкретного дифференциального оператора на функции $f(x)$. Так для $f(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$

$$R_n[f] = \int\limits_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x)\rho(x)\,dx = C(n^{*1)})\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}; \quad \xi \in (a;b).$$

Это позволяет утверждать, что *для полиномов до порядка n включительно квадратурная формула (2) точна, т.е. $R_n(f) \equiv 0$.* Наивысшая степень полинома, для которого квадратурная формула точна, называется *степенью* квадратурной формулы.

> *Квадратурная формула (2) интерполяционного типа имеет степень не ниже n.*

3. Вычисление весов $\{C_k\}$ квадратурной формулы (2) можно проводить не по явным формулам ($2'$), строя интерполяционный базис Лагранжа, а, используя тот факт, что формула (2) точна для $y = x^k; \quad 0 \le k \le n$. Получим

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \int_a^b x^0 dx = \sum_{k=0}^n C_k x_k^0 \\ I_1 &= \int_a^b x^1 dx = \sum_{k=0}^n C_k x_k^1 \\ &\ldots\ldots \\ I_n &= \int_a^b x^n dx = \sum_{k=0}^n C_k x_k^n \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{СЛАУ для } \{C_k\} \\ \text{где} \\ I_n = \displaystyle\int_a^b x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b \end{array}$$

Определитель получившейся СЛАУ — есть определитель Вандермонда системы $\{x^k\}$ на сетке $\overline{\omega}_n$

$$\Delta = W(x_0, \ldots, x_n) \neq 0$$

и можно сравнительно компактно записать ответ задачи.

*1) зависят от n через шаг сетки

Дальнейшее свое внимание мы сосредоточим на построении интерполяционных квадратурных формул на сетках с постоянным шагом $h = \mathrm{const}$

$$x_{k+1} - x_k = h_{k+1} = h = \frac{b-a}{h} = \mathrm{const}\,.$$

§2. Квадратурные формулы Ньютона-Котесса $\left(\substack{h=\mathrm{const}\\ \rho\equiv 1}\right)$

В такой постановке естественно рассматривать квадратурные формулы замкнутого типа. Итак, пусть

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b; \quad h = \frac{b-a}{n}; \quad x_k = x_0 + kh; \quad k = \overline{0, n}.$$

Тогда при вычислении весовых коэффициентов $(2')$ $\{C_k\}$ возможны дальнейшие упрощения. Обозначим $\frac{x-x_0}{h} \equiv q$ (выраженная в сеточных шагах длина $x - x_0$), получим

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = h^{n+1}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\cdot\left(\frac{x-(x_0+h)}{h}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{x-(x+nh)}{h}\right) = h^{n+1} q\cdot(q-1)\,\cdots\,(q-n);$$

$$\omega'(x_k) = \overbrace{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})}^{k \text{ сомножителей}}\cdot\overbrace{(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}^{(n-k) \text{ сомножителей}} =$$

$$= h^n k\cdot(k-1)\cdots 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots(-(n-k)) = (-1)^{n-k}\cdot h^n k!(n-k)!$$

В таком случае

$$C_k = \int\limits_a^b \frac{\omega(x)\,dx}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\,\frac{\cancel{h^{n+1}}}{\cancel{h^{n+1}}}\int\limits_a^b \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(q-k)}\,dx = \left|\begin{array}{l} \frac{x-x_0}{h} = q \\ \frac{dx}{h} = dq \end{array}\right| =$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\,h\int\limits_0^n \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(q-k)}\,dq;$$ Окончательно

$$C_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\,h\int\limits_0^n \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(q-k)}\,dq; \qquad (3)$$

веса квадратурной формулы Ньютона-Котесса

Заменим в (3) $h = \frac{b-a}{n}$ и введем обозначение $C_i = (b-a)\mathcal{K}_i$, тогда

$$\mathcal{K}_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i!)}\,\frac{1}{n}\int\limits_0^n \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{(q-i)}\,dq; \qquad (4)$$

коэффициенты Котесса

А сама квадратурная формула принимает вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{K}_i + R_n[f], \qquad \text{формула Ньютона-Котесса} \tag{5}$$

где $h = \frac{b-a}{n}$; $f(x_i) = f(a+ih)$.
Замечания:[*1)]
Для коэффициентов Котесса имеют место соотношения:

1. $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{K}_i = 1$ (ибо для $f \equiv 1$; $R_n[f] = 0$)

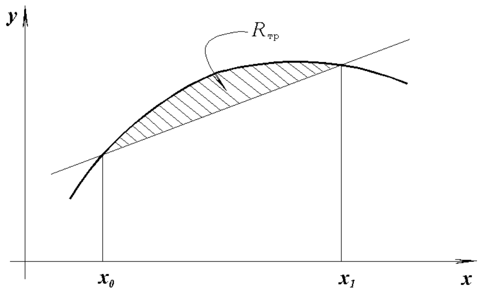
2. $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{n-i}$; $\begin{cases} \text{по построению +} \\ \text{замена переменных} \\ q = -\alpha + n \end{cases}$

3. Важно отметить, что коэффициенты Котесса $\mathcal{K}_i$ не являются знакоопределенными, что существенно отразится на свойствах формулы (5) в плане устойчивости суммирования при $n \to \infty$.

§3. Важные частные случаи $n = 1$, $n = 2$

3.1 Квадратурная формула трапеций ($n = 1$)

Пусть соответствующий интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$ — полином $1^{\underline{й}}$ степени.



Тогда

$$\begin{cases} \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 = 1 \\ \mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_1 = 1/2,$$

что дает квадратурную формулу трапеции

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = (x_1 - x_0)\cdot\left(\frac{1}{2}\,y_0 + \frac{1}{2}\,y_1\right) + R_{\text{тр}}; \tag{6}$$

Оценим остаточный член формулы трапеции $R_{\text{тр}}$ как функцию h, в предположении достаточной гладкости $f(x)$. (Это общая техника оценки остаточного члена для

[*1)] 1. и 2. самостоятельно доказать!

интерполяционных квадратурных формул):
Пусть $f(x) \in C^{(2)}[a,b]$. Тогда

$$R \equiv R(h) = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} y\,dx - \frac{h}{2}(y_0 + y(x_0+h)), \qquad R(0) = 0. \tag{$*$}$$

Дифференцируя (*) по h, найдем

$$R'(h) = y(x_0+h) - \frac{1}{2}(y_0 + y(x_0+h)) - \frac{h}{2}\,y'(x_0+h), \qquad R'(0) = 0.$$

Анологично

$$R''(h) = y'(x_0+h) - \frac{1}{2}\,y'(x_0+h) - \frac{1}{2}\,y'(x_0+h) - \frac{h}{2}\,y''(x_0+h); \qquad R''(0) = 0.$$

Теперь, интегрируя полученное уравнение с соответствующими начальными условиями, найдем

$$R'(h) - R'(0) = \int\limits_0^h R''(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^h t y''(x_0+t)\,dt = \left|{\text{теорема о} \atop \text{среднем}}\right| =$$
$$= -\frac{1}{2}\,y''(\xi)\int\limits_0^h t\,dt = -\frac{h^2}{4}\,y''(\xi); \qquad \xi \in (x_0, h)$$

И окончательно

$$R(h) - R(0) = \int\limits_0^h R'(t)\,dt = -\frac{y''(\xi)}{4}\int\limits_0^h t^2 dt = -\frac{y''(\xi)}{12}\,h^3; \qquad \xi \in (x_0, x_1).$$

Итак,

$$R_{\text{тр}}(h) = -\frac{h^3}{12}\,y''(\xi); \qquad \xi \in (x_o, x_1) \tag{7}$$

Таким образом, мы видим, что (6) формула $1^{\underline{\text{й}}}$ степени, с остаточным членом порядка $O(h^3)$.

3.2 Квадратурная формула Симпсона (формула парабол) ($n = 2$)

Рассмотрим (5) для случая $n = 2$. Сетка $\overline{\omega}_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$ содержит три узла. У нас три коэффициента Котесса

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_2; \quad \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = 1$$

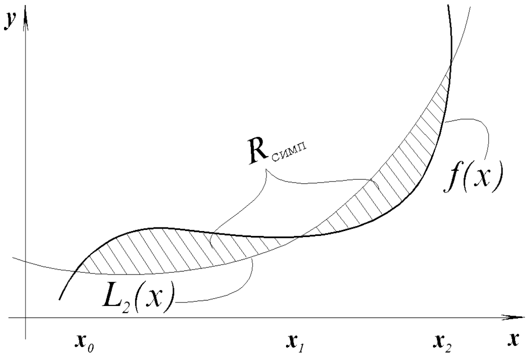
$$\mathcal{K}_0 = \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{2-0}}{0!\,(2-0)!}\int\limits_0^2 \frac{\cancel{q}(q-1)(q-2)}{\cancel{q}}\,dq = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 (q^2 - 3q + 2)\,dq = \frac{1}{4}\left(\frac{q^3}{3} - \frac{3q^2}{2} + 2q\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{6}$$

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_2 = 1/6\,; \qquad \mathcal{K}_1 = 1 - 2/6 = 4/6$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \overbrace{(x_2 - x_0)}^{2h}\left\{\frac{1}{6}\,y_0 + \frac{4}{6}\,y_1 + \frac{1}{6}\,y_2\right\} + R_{\text{симп.}} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + R_{\text{симп.}} \quad (8)$$

Оценка погрешности формулы Симпсона (8) как функции h строится анологично и при $f \in C^{(4)}[a,b]$ можно получить, что

(9) $R_{\text{симп.}} = -\dfrac{h^5}{90}y^{(4)}(\xi);\,^{*0)} \quad \xi \in (x_0, x_2);$



Замечания:

1. Формула Симпсона имеет повышенную *степень* при данном числе узлов. Согласно (9) она точна для многочлена до 3$^{\underline{\text{го}}}$ порядка включительно.

2. Случай $n = 3$ дает квадратурную формулу Ньютона. Получить её вид.

3. В общем случае ошибка квадратурной формулы (5) на равномерной сетке для достаточно гладких функций есть

$$R_n[f] = O\left(h^{2[\frac{n}{2}]+3}\right) \quad (10)$$

для формулы с $(n+1)$ узлом интерполяции. Таким образом выгодны формулы с нечетным числом узлов n на сетке.

3.3 Составные квадратурные формулы

Поскольку коэффициенты Котесса K_i громоздки для достаточно больших n, а сам интеграл (1) I обладает свойством аддитивности, то, с практической точки зрения, выгодно использовать составные формулы приближенного интегрирования, разбив отрезок $[a,b]$ на N частичных отрезков и применив на каждом из них квадратурную формулу Ньютона-Котесса (5) невысокого порядка.

а) Общая формула трапеций:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b; \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Тогда

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + ... \quad (11)$$

$$+\frac{h}{2}(y_{N-1} + y_N) + R_1 + ... + R_N = \frac{b-a}{N}\left(\frac{1}{2}y_0 + [y_1 + ... + y_{N-1}] + \frac{1}{2}y_N\right) + R_{tr}.$$

Оценка (7) остаточного члена квадратурной формулы интерполяционного типа, позволяет получить и общую оценку :

$$R_{tr} = \sum_{i=1}^{N} R_i = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{N} y''(\xi_i); \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Рассмотрим среднее арифметическое

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y''(\xi_i).$$

Очевидно, что

$$m_2 = \min_{[a,b]} y''(x) \le \mu \le \max_{[a,b]} y''(x) = M_2.$$

В силу непрерывности $y''(x)$ на $[a, b]$ теорема Вейерштрасса позволяет утверждать, что

$$\exists\, \xi \in [a, b] : \mu = y''(\xi).$$

Итак :

$$R_{tr} = -\frac{h^3}{12} N \cdot y''(\xi) = -\frac{h^2}{12}(b-a)\, y''(\xi). \tag{12}$$

б) Составная формула Симпсона: Пусть $N = 2m$; $\quad i = \overline{0, 2m}$, т.е. на отрезке интегрирования находится (2m+1) узел. Применим формулу Симпсона по каждому частичному сдвоенному промежутку :

$$[x_0, x_2], \quad [x_2, x_4], \ldots, [x_{2m-2}, x_{2m}].$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) + \sum_{k=1}^{N} R_{trk}(x) = \frac{h}{3}(y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \ldots$$

$$+ y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})) + R_{sim}. \tag{13}$$

Если $y \in C^{(4)}[a, b]$, то для оценки остаточного члена формулы (13) получаем :

$$R_{sim} = -\frac{h^5}{90}\sum_{k=1}^{m} y^{(4)}(\xi_k), \xi_k \in (x_{2k-2}, x_{2k}).$$

Из аналогичных соображений, использованных при получении формулы (12), найдем, что $\exists\, \xi \in [a, b]$ и

$$y^{(4)}(\xi) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y^{(4)}(\xi_k),$$

что дает представление

$$R_{sim}(h) = -\frac{h^5}{90} \cdot m \cdot y^{(4)}(\xi) = -\frac{h^4}{180}(b-a)y^{(4)}(\xi). \qquad (14)$$

Что обеспечивает четвертый порядок точности и третью степень квадратурной формулы Симпсона.
Замечания: Оценки (12) и (14) позволяют правильно подобрать шаг квадратурной формулы для достижения заданной точности ε при вычислении интеграла в случае достаточно гладких функций, когда известна оценка на $[a, b]$ соответствующей производной. Например, имея оценку для максимума модуля четвертой производной $f(x)$ в области интегрирования — $M_4 = \max_{[a,b]} \left| y^{(4)}(x) \right|$, получим

$$|R_{sim}| \le \frac{b-a}{180} \cdot h^4 \cdot M_4 < \varepsilon \leftrightarrow h \le \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)\cdot M_4}} = O\left(\sqrt[4]{\varepsilon}\right). \qquad (15)$$

§4.Апостериорная оценка погрешности квадратурной формулы. Метод Рунге. Метод Эйткена

Во многих случаях вычислений с использованием равномерных сеток (необязательно в задачах вычисления квадратур) погрешности полученных расчетных формул могут быть представлены в виде разложения по степеням шага сетки h. В таком случае можно воспользоваться приемом *повышения точности результата при расчете по формулам фиксированной точности на различных сетках.* Поясним сказанное.

4.1 Метод Рунге (апостериорной оценки точности расчетных формул)

Пусть для вычисления величины $z(x)$ имеется расчетная формула формула $\xi(x, h)$, использующая равномерную сетку с шагом h. И пусть погрешность (остаточный член) этой формулы имеет следующую структуру

$$z(x) - \xi(x, h) = \varphi(x) \cdot h^p + O\left(h^{p+1}\right), \qquad (*)$$

т.е. погрешность формулы имеет известный порядок p, хотя главный член $\varphi(x)$ асимптотики нам неизвестен. Проведем расчет по той же формуле $\xi(x, h)$, но используя равномерную сетку с другим шагом qh. Получим (с тем же порядком точности) :

$$z(x) - \xi(x, qh) = \varphi(x) \cdot (qh)^p + O\left((qh)^{p+1}\right) = \varphi(x) \cdot q^p h^p + O\left(h^{p+1}\right).$$

Имея теперь два расчета $\xi(x, h)$ и $\xi(x, qh)$, нетрудно оценить величину главного члена асимптотического разложения погрешности (*):

$$\varphi(x)\, h^p = \frac{\xi(x, h) - \xi(x, qh)}{q^p - 1} + O\left(h^{p+1}\right), \quad \text{1-я формула Рунге.}$$

Мы видим, что расчет тогоже порядка точности на второй сетке позволяет апостериори оценить погрешность расчета на первой сетке с точностью до членов более высокого порядка по h, т.е. учесть неизвестный порядок $O(h^p)$

$$z\left(x\right)=\xi(x,h)+\frac{\xi\left(x,h\right)-\xi\left(x,qh\right)}{q^{p}-1}+O\left(h^{p+1}\right),\quad \text{2-я формула Рунге.}$$

Обычно берут $q = 2$ (что означает сгущение сетки вдвое). Проиллюстрируем применение полученных формул на примере формулы Симпсона (13). Пусть $y^{(4)}(x)$ медленно меняющаяся функция на [a,b]. Тогда можно записать :

$$R_{sim}=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}\left(b-a\right)h^{4}\approx Ah^{4}.$$

Если использовать две сетки с шагом $h_1 = h$ и $h_2 = 2h$, то

$$I\approx I_{h}+Ah^{4}=I_{2h}+A(2h)^{4}+O\left(h^{5}\right)\Longleftrightarrow$$

откуда

$$Ah^{4}=\frac{I_{h}-I_{2h}}{2^{4}-1}=\frac{I_{1}-I_{2h}}{15}$$

с тойже точностью $O\left(h^5\right)$. Окончательно

$$\widetilde{I}=I_{h}+\frac{I_{h}-I_{2h}}{15}+O\left(h^{5}\right).$$

4.2 Метод Эйткена (повышения апостериорной оценки точности расчетных формул)

Как способ повышения порядка точности расчетных формул в случае, когда порядок остаточного члена существует, но априори не известен, используют следующий приём.

Рассмотрим, для простоты, три равномерные сетки с шагами $h_1 = h$; $h_2 = qh$; $h_3 = q^2h$. Пусть квадратурная формула такова, что при расчете на сетке h имеем

$$I=I_{h}+\alpha h^{p}+O\left(h^{p+1}\right),\qquad (*)$$

т.е. существует асимптотическое разложение остаточного члена $R(h)$ квадратурной формулы.

С точностью до членов более высокого чем $O(h^p)$ порядка по h из отношений (*) можно найти I, α и p:

$$\begin{array}{rcccl} I-I_{1} & = & \alpha h^{p}+O\left(h^{p+1}\right) & = & A\\ I-I_{2} & = & \alpha q^{p}h^{p}+O\left(h^{p+1}\right) & = & AB\\ I-I_{3} & = & \alpha q^{2p}h^{p}+O\left(h^{p+1}\right) & = & AB^{2}.\end{array}$$

Тогда

$$\left(I-I_{1}\right)\left(I-I_{3}\right)=\left(AB\right)^{2}=\left(I-I_{2}\right)^{2}\Longleftrightarrow$$

$$I^{2}-I\left(I_{1}+I_{3}\right)+I_{1}I_{3}=I^{2}-2II_{2}+I_{2}^{2}.$$

Окончательно

$$I = \frac{I_2^2 - I_1 I_3}{2I_2 - (I_1 + I_3)} + O(h^{p+1}) \quad \text{— 2-я формула Эйткена.}$$

Оценим эффективный порядок p точности формулы $(*)$, для этого рассмотрим отношение разностей уравнений $(*)$

$$\frac{I_2 - I_1}{I_3 - I_2} = \frac{A\,(1-B)}{AB\,(1-B)} = \frac{1}{B} = \frac{1}{q^p}.$$

Найдем

$$p = \frac{\ln \frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1}}{\ln q} \quad \text{— 3-я формула Эйткена.}$$

Возможно построение и более сложных формул повышения точности выполненных расчётов[*1)].

§5. Квадратурные формулы Гаусса- Кристоффеля

На построение квадратурных формул интерполяционного типа (2') можно посмотреть несколько иначе

$$I = \int_a^b f\,(x)\,\rho\,(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot f\,(x_i) + R_n\,(f) \qquad (2')$$

(здесь удобно суммировать именно с $i = 1$ до n).
Будем считать параметрами квадратурной формулы $(2')$ узлы $\{x_i\}$ и веса $\{C_i\}$ — в нашем распоряжении всего $2n$ парметров. Поставим вопрос *о таком выборе параметров* $\{x_i\}$, $\{C_i\}$ *, при которых квадратурная формула* $(2')$ *точна для многочленов максимально возможного порядка, по крайней мере до* $(2n-1)$ *включительно*[*2)].
Покажем как это сделать.

5.1 Выбор узлов квадратурной формулы $\{x_i\}$

Будем считать что вес $\rho(x)$ непрерывен на $[a, b]$. Он может обратиться в ноль или $+\infty$ лишь в граничных точках отрезка. Известно, что

1) Для такого веса $\rho(x)$ существует полная в $L_{2,p}[a, b]$ система алгебраических полиномов $\{P_k(x)\}_{k=\overline{0,\infty}}$, ортоганальная на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_a^b P_k\,(x)\,P_m\,(x)\,\rho\,(x)\,dx = \delta_{k,m}\,\|P_k\,(x)\|^2_{L_{2p}[a,b]}\,;$$

2) Все нули многочлена $P_k\,(\mu) = 0 \Longleftrightarrow \left\{\mu_i^{(k)}\right\}_{i=\overline{1,k}}$ — действительны и расположены на интервале (a, b).

[*1)]см.[2 (Бахвалов и др.)] *метод Ричардсона*
[*2)]т.е. имеет максимальную *степень*