ТЕМА 7

Задача Штурма-Лиувилля.
Собственные значения и собственные функции.
Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению.

Основные определения и теоремы

Оператором Штурма-Лиувилля называется дифференциальный оператор 2-го порядка $Ly = \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y$, где коэффициенты $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ удовлетворяют условиям: $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, а $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции, причем $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ ($x \in [a,b]$).

Поставим вопрос: найти такие числа λ, при которых существует нетривиальное решение следующей краевой задачи ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$):

$$\begin{cases} Ly + \lambda\rho(x)y = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Эта задача называется краевой задачей на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля (сокращенно - <u>задача Штурма-Лиувилля</u>); числа λ_n, при которых существуют нетривиальные решения, - <u>собственными значениями</u>, а соответствующие нетривиальные решения - <u>собственными функциями</u>.

Замечание. Возможны и другие типы дополнительных условий (см. пример 7.5 и задачу 7.3).

Обозначим $G(x,s)$ функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Функция $G(x,s)$ непрерывна по совокупности аргументов и симметрична, т.е. $G(x,s) = G(s,x)$; она существует, если однородная краевая задача

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

имеет только тривиальное решение, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L.

При этих условиях задача Штурма-Лиувилля может быть сведена к эквивалентной задаче на характеристические числа и собственные функции

$$y(x) = -\lambda \int_a^b G(x,s)\,\rho(s)\,y(s)\,ds$$

для интегрального оператора с непрерывным ядром $G(x,s)\rho(s)$. Если $\rho(s) \not\equiv 1$, то ядро интегрального оператора не является симметрическим. Однако ядро

$$K(x,s) = \sqrt{\rho(x)}\;G(x,s)\;\sqrt{\rho(s)}$$

уже является непрерывным и симметрическим.

В курсе лекций для первой краевой задачи $\begin{cases} Ly + \lambda\rho(x)y = 0 \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \end{cases}$ доказано существование функции Грина при условиях $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ и получены следующие свойства собственных значений и собственных функций.

Теорема. Задача Штурма-Лиувилля эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds$ для интегрального оператора с непрерывным симметрическим замкнутым ядром $K(x,s) = -\sqrt{\rho(x)}\; G(x,s)\; \sqrt{\rho(s)}$, где $\varphi(x) = y(x)\sqrt{\rho(x)}$.

Теорема. Собственные значения λ_n задачи Штурма-Лиувилля вещественны и образуют бесконечную последовательность, причем $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Теорема. Каждое собственное значение задачи Штурма-Лиувилля имеет кратность единица.

Теорема. Собственные функции $y_i(x)$, $y_k(x)$ задачи Штурма-Лиувилля, отвечающие различным собственным значениям λ_i, λ_k, ортогональны на отрезке $[a,b]$ с весом $\rho(x)$, т.е. $\int_a^b y_i(x)\, y_k(x)\, \rho(x)\, dx = 0$ при $\lambda_i \neq \lambda_k$, и могут быть нормированы с весом $\rho(x)$: $\int_a^b y_k^2(x)\, \rho(x)\, dx = 1$.

Теорема. (Стеклова). Любая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющая однородным краевым условиям на его концах функция $f(x)$ представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье по ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)$, где коэффициенты Фурье равны $f_n = \int_a^b f(x)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx$.

Теорема. Собственные значения первой краевой задачи Штурма-Лиувилля положительны. Имеет место следующая оценка снизу для наименьшего собственного значения:

$$\lambda_1 = \int_a^b \left[q\, y_1^2 + p\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 \right] dx \; > \min_{x\in[a,b]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \; \geq 0 .$$

Заметим, что перечисленные результаты остаются справедливыми и для второй краевой задачи (граничные условия имеют вид $y'(a) = 0$, $y'(b) = 0$), если $q(x) \not\equiv 0$, для третьей краевой задачи (граничные условия имеют вид $y'(a) - h_1 y(a) = 0$, $y'(b) + h_2 y(b) = 0$), если h_1, h_2 – положительные постоянные, а также для смешанных краевых задач, когда левом конце задается условие одного вида, а на правом другого.

Необходимо помнить, что в случае второй краевой задачи при $q(x) \equiv 0$ существует нулевое собственное значение, а остальные собственные значения положительны.

В некоторых случаях задача построения последовательности характеристических чисел и собственных функций интегрального оператора Фредгольма с непрерывным невырожденным ядром специального вида может быть сведена к задаче Штурма-Лиувилля (примеры 7.7 и 7.8)

Примеры решения задач

Пример 7.1. Доказать, что оператор $Ly = \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)$, рассматриваемый на подпространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций из $h[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям $y'(a) = 2y(a),\quad y'(b) = 0$, является симметрическим.

Решение. Требуется доказать, для любых двух функций $y(x),\ z(x)$ из указанного подпространства имеет место равенство $(Ly,z) = (y,Lz)$, где скалярное произведение в $h[a,b]$ введено обычным образом: $(y,z) = \int\limits_a^b y(x)z(x)dx$.

Рассмотрим произвольные дважды непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$ функции $y(x),\ z(x)$ такие, что $y'(a) = 2y(a),\ \ y'(b) = 0$ и $z'(a) = 2z(a),\ \ z'(b) = 0$. Тогда, интегрируя по частям и учитывая граничные условия, будем иметь:

$$(Ly,z) = \int\limits_a^b [(p(x)y'(x)]'\,z(x)dx = [py']z\Big|_a^b - \int\limits_a^b p(x)y'(x)\,z'(x)dx = -2p(a)y(a)z(a) - \int\limits_a^b p(x)y'(x)\,z'(x)dx,$$

$$(y,Lz) = \int\limits_a^b y(x)[(p(x)z'(x)]'dx = y[pz']\Big|_a^b - \int\limits_a^b y'(x)\,p(x)z'(x)dx = -2p(a)y(a)z(a) - \int\limits_a^b p(x)y'(x)\,z'(x)dx.$$

Сравнивая полученные выражения, заключаем, что для любых элементов рассматриваемого подпространства выполнено соотношение $(Ly,z) = (y,Lz)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Из полученного результата вытекает, что все собственные значения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля вещественны.

Пример 7.2. Доказать, что все собственные значения третьей краевой задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} Ly + \lambda\rho(x)y = 0 \\ y'(a) - y(a) = 0, \quad y'(b) + 3y(b) = 0 \end{cases}$$

положительны, если оператор $Ly = \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y$, причем $\rho(x) > 0,\ p(x) > 0$, $q(x) \ge 0 \quad x \in [a,b]$.

Решение. Заметим, что все собственные значения - вещественны. Это следует из симметричности оператора при заданных граничных условиях, которая может быть установлена аналогично примеру 7.1.

Пусть λ - собственное значение задачи, а $y(x) \not\equiv 0$ - соответствующая собственная функция, т.е. $y(x)$ является решением уравнения $\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$.

Умножим это уравнение на $y(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[a,b]$ (первое слагаемое в левой части формулы интегрируется по частям):

$$\int\limits_a^b \left([(p(x)y']' - q(x)y\right)y(x)dx \equiv p(x)y'y\Big|_a^b - \int\limits_a^b p(x)y'^2(x)\,dx - \int\limits_a^b q(x)y^2(x)\,dx = -\lambda\int\limits_a^b \rho(x)y^2(x)\,dx\,.$$

Учитывая граничные условия $y'(a)=y(a),\ y'(b)=-3y(b)$, и то, что $y(x)\not\equiv 0$, получим

$$\lambda\underbrace{\int_a^b \rho(x)y^2(x)\,dx}_{>0,\ т.к.\ \rho(x)>0}=\underbrace{p(b)3y^2(b)}_{\ge 0}+\underbrace{p(a)y^2(a)}_{\ge 0}+\underbrace{\int_a^b p(x)y'^2(x)\,dx}_{\substack{>0,\ если\ y(x)\ne const\\ =0,\ если\ y(x)\equiv const}}+\underbrace{\int_a^b q(x)y^2(x)\,dx}_{\ge 0}.$$

Если $y(x)\ne const$, то правая часть равенства положительна, следовательно $\lambda>0$; если же считать $y(x)\equiv const$, то из граничных условий следует $y(x)\equiv 0$, что противоречит сделанному выше предположению. Итак, $\lambda>0$, что и требовалось.

Пример 7.3. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=0, \quad y'(l)=0 \end{cases}.$$

Решение. В рассматриваемом случае имеем $\rho(x)=1>0,\ p(x)=1>0$, $q(x)\equiv 0$ $x\in[0,l]$, поэтому можно, действуя как в примере 7.2, установить, что все собственные значения действительны, причем одно из них $\lambda_0=0$, а остальные - положительны.

В случае $\lambda=\lambda_0=0$ имеем $y(x)=C_1x+C_2$ и, учитывая граничные условия, получаем $y_0(x)=C$.

Пусть $\lambda>0$, тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$.

Дополнительные условия дают $y'(0)=0 \ \Rightarrow\ C_1=0$, $y'(l)=0\ \Rightarrow\ C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l=0$, откуда получаем $\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$. Следовательно, искомые собственные значения $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$, $n=1,2,3...$, а отвечающие им собственные функции $y_n(x)=C\cos\dfrac{\pi n}{l}x$.

Пример 7.4. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)-y(0)=0, \quad y(1)=0 \end{cases}.$$

Решение. Так как $\rho(x)=1>0,\ p(x)=1>0$, $q(x)\equiv 0$ $x\in[0,l]$, то все собственные значения действительны и положительны.

Общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$, и из граничных условий вытекает $y'(0)-y(0)=C_1\sqrt{\lambda}-C_2=0$, $y(1)=C_1\sin\sqrt{\lambda}+C_2\cos\sqrt{\lambda}=0$. Нетривиальное решение этой системы, т.е. $C_1^2+C_2^2\ne 0$, существует, если

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda} & -1 \\ \sin\sqrt{\lambda} & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}=\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}+\sin\sqrt{\lambda}=0,\quad \lambda>0.$$

Поэтому λ определяется из трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}=-\sqrt{\lambda}$, положительные решения которого и будут искомыми собственными значениями.

Далее, рассмотрев любое из уравнений системы для C_1, C_2, имеем $C_2 = C_1\sqrt{\lambda_n} = -C_1 \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}$, откуда получим

$$y_n(x) = C_1(\sin\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x) = C_1(\sin\sqrt{\lambda_n}x - tg\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x).$$

Итак, собственные значения λ_n $(n = 1,2,3...)$ рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля есть положительные решения уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$, а соответствующие им собственные функции могут быть после несложных преобразований записаны в виде $y_n(x) = C\sin\sqrt{\lambda_n}(x-1)$.

Пример 7.5. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}.$$

Решение. Действуя как в примере 7.2, нетрудно показать, что в рассматриваемом случае все собственные значения неотрицательны.

Пусть $\lambda = 0$, тогда $y(x) = C_1x + C_2$ и, учитывая дополнительные условия, имеем $y(x) = C$. Поэтому $\lambda_0 = 0$ - собственное значение задачи с собственной функцией $y_0(x) = 1$.

Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\cos\sqrt{\lambda}x$, и из граничных условий вытекает

$$y(0) - y(2\pi) = C_2 - C_2\cos\sqrt{\lambda}2\pi - C_1\sin\sqrt{\lambda}2\pi = 0,$$

$$y'(0) - y'(2\pi) = \sqrt{\lambda}(C_1 - C_1\cos\sqrt{\lambda}2\pi + C_2\sin\sqrt{\lambda}2\pi) = 0.$$

Нетривиальное решение этой системы, т.е. $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, существует, если

$$\begin{vmatrix} -\sin\sqrt{\lambda}2\pi & 1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi \\ 1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi & \sin\sqrt{\lambda}2\pi \end{vmatrix} = 2\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 2 = 0.$$

Поэтому $\lambda_n = n^2$, $n = 1,2,3,...$, и при найденных значениях λ существуют по два линейно независимых решения $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, которые при каждом $\lambda_n = n^2$, $n = 1,2,3,...$ определяют две линейно независимых собственные функции $y_n^{(1)}(x) = \sin nx$ и $y_n^{(2)}(x) = \cos nx$.

Итак, собственное значение $\lambda_0 = 0$ имеет кратность 1, и ему соответствует собственная функция $y_0(x) = 1$; собственные значения $\lambda_n = n^2$, $n = 1,2,3,...$ имеют кратность 2, и им отвечает по 2 линейно независимые функции $y_n^{(1)}(x) = \sin nx$ и $y_n^{(2)}(x) = \cos nx$.

Замечание. Дополнительные условия, поставленные в этом примере, возникают при рассмотрении периодических задач, т.е. $y(x) = y(x+2\pi)$.

Пример 7.6. Проверить возможность сведения к интегральному уравнению и свести задачу Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda \cdot (1+x^2) y = 0$, $y(0)=0,\quad y(1)=0$ к интегральному уравнению Фредгольма с симметрическим ядром.

Решение. В нашем случае $Ly \equiv y''$, $p(x)=1>0,\; q(x)\equiv 0,\; \rho(x)=1+x^2>0$, $x\in[0,1]$.

Докажем, что $\lambda=0$ не является собственным значением рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля, т.е. однородное уравнение $Ly \equiv y''=0$ с условиями $y(0)=0,\quad y(1)=0$ имеет только тривиальное решение. Действительно, $y(x)=C_1x+C_2$, откуда с учетом дополнительных условий получаем $y(x)\equiv 0$. Это означает, что функция Грина оператора $Ly\equiv y''$ при условиях $y(0)=0,\quad y(1)=0$ существует и, следовательно, задача Штурма-Лиувилля может быть сведена к интегральному уравнению.

Построив функцию Грина $G(x,s)=\begin{cases} x(s-1), & 0\le x\le s \\ s(x-1), & s\le x\le 1\end{cases}$ и рассматривая выражение $-\lambda(1+x^2)y$ как неоднородность, приведем уравнение к виду $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 -G(x,s)(1+s^2)y(s)ds$.

Чтобы симметризовать ядро, умножим последнее соотношение на $\sqrt{1+x^2}$ и введем в рассмотрение функцию $\varphi(x)=y(x)\sqrt{1+x^2}$. Тогда получим $\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^1 K(x,s)\varphi(s)ds$ - интегральное уравнение Фредгольма с непрерывным симметрическим ядром $K(x,s)=-\sqrt{1+x^2}\cdot G(x,s)\cdot\sqrt{1+s^2}$ для функции $\varphi(x)$.

Пример 7.7. Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 K(x,s)\,y(s)\,ds$ с симметрическим непрерывным (невырожденным) ядром

$$K(x,s)=\begin{cases} x(1-s), & 0\le x\le s \\ s(1-x), & s\le x\le 1\end{cases}, \qquad x,s\in[0;1].$$

Найти характеристические числа и ортонормированные собственные функции этого ядра.

Решение. Чтобы определить характеристические числа, нужно найти те значения λ, при которых уравнение $y(x)-\lambda\int\limits_0^1 K(x,s)\,y(s)\,ds=0$ имеет нетривиальные решения; соответствующие решения $y(x)\not\equiv 0$ и есть искомые собственные функции.

Заметим, что ядро $K(x,s)$ в рассматриваемом случае имеет специфическую структуру, напоминающую функцию Грина некоторой краевой задачи. Поэтому следует ожидать, что процедура построения характеристических чисел и собственных функций может быть сведена к решению задачи Штурма-Лиувилля.

Запишем уравнение в виде $y(x)=\lambda(1-x)\int\limits_0^x s\,y(s)\,ds+\lambda x\int\limits_x^1(1-s)\,y(s)\,ds$, откуда следует, что $y(0)=y(1)=0$. После двукратного дифференцирования обеих частей этого соотношения по x приходим к дифференциальному уравнению $y''+\lambda y=0$.

Итак, характеристические числа и собственные функции являются решениями задачи Штурма-Лиувилля для уравнения $y''+\lambda y=0$ с граничными условиями $y(0)=y(1)=0$.

Нетрудно показать, что если $\lambda \le 0$, то имеется только нулевое решение $y(x)\equiv 0$.

При $\lambda>0$ получим $y(x)=c_1\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x$, следовательно, нетривиальные решения существуют тогда и только тогда, если $\lambda=\lambda_n=n^2\pi^2 \quad (n\in\mathbb{N})$. При этом ранг каждого характеристического числа равен единице, так как им отвечают одномерные собственные подпространства вида $y_n(x)=C\sin\pi nx$.

Так как ядро оператора симметрическое, то собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны. Нормируя их, получим ортонормированную систему собственных функций $\varphi_n(x)=\sqrt{2}\,\sin\pi nx$.

Замечание. Приведенный здесь алгоритм нахождения характеристических чисел и собственных функций учитывает специфику структуры ядра $K(x,s)$, которое представляет собой функцию Грина некоторой краевой задачи. Другие способы построения характеристических чисел и собственных функций были рассмотрены в примерах и задачах к темам 3 и 6.

Пример 7.8. Найти характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма $y(x)=\lambda\int_0^1 K(x,s)\,y(s)\,ds$ с симметрическим непрерывным (невырожденным) ядром

$$K(x,s)=\begin{cases} s\,(x+1), & 0\le x\le s\\ x(s+1), & s\le x\le 1\end{cases}, \qquad x,s\in[0;1].$$

Решение. Действуя как в предыдущем примере, сведем интегральное уравнение к краевой задаче Штурма-Лиувилля.

Запишем уравнение в виде $y(x)=\lambda\, x\int_0^x (s+1)\,y(s)\,ds+\lambda(x+1)\int_x^1 s\,y(s)\,ds$.

Дифференцируя это соотношение, найдем

$$y'(x)=\lambda\int_0^x (s+1)\,y(s)\,ds+\lambda x(x+1)y(x)+\lambda\int_x^1 s\,y(s)\,ds-\lambda(x+1)xy(x).$$

Заметим, что

$$y(0)=\lambda\int_0^1 sy(s)ds,\quad y(1)=\lambda\int_0^1 (s+1)y(s)ds,\qquad y'(0)=\lambda\int_0^1 sy(s)ds,\quad y'(1)=\lambda\int_0^1 (s+1)y(s)ds.$$

Дифференцируя уравнение еще раз, получим $y''(x)=\lambda(x+1)y(x)-\lambda xy(x)=\lambda y(x)$.

Итак, характеристические числа и собственные функции являются решениями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} y''-\lambda y=0\\ y(0)=y'(0),\quad y(1)=y'(1)\end{cases}.$$

Так как ядро симметрическое, то все характеристические числа - вещественные. Однако в данном случае знак характеристических чисел заранее неизвестен, поэтому для решения задачи необходимо рассмотреть обе возможности: $\lambda>0$ и $\lambda<0$ (случай $\lambda=0$, как следует из определения характеристического числа, невозможен).

1. Пусть $\lambda>0$. Тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1e^{x\sqrt{\lambda}}+C_2e^{-x\sqrt{\lambda}}$. Граничные условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}}) \end{cases},$$

которая имеет нетривиальные решения при условии $(1-\lambda)\cdot sh\sqrt{\lambda} = 0$. Таким образом, $\lambda_0 = 1$ - характеристическое число; ранг его равен 1, и ему отвечает собственное подпространство вида $y_0(x) = Ce^x$.

2. Пусть $\lambda = -\omega^2 < 0$. Тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x$. Граничные условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 = \omega C_2 \\ C_1 \cos\omega + C_2 \sin\omega = \omega(-C_1 \sin\omega + C_2 \cos\omega) \end{cases},$$

условием нетривиальной совместности которой является $(1+\omega^2)\cdot\sin\omega = 0$, т.е. $\omega_n = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Итак, характеристические числа $\lambda_n = -\pi^2 n^2 < 0,\quad n \in \mathbb{N}$. Ранг каждого характеристического числа равен единице, и им отвечают собственные функции вида $y_n(x) = C(\pi n \cos\pi n x + \sin\pi n x),\quad n \in \mathbb{N}$.

Задачи для самостоятельного решения

7.1 Доказать, что все собственные значения λ задачи Штурма-Лиувилля

$$\left(p(x)y'\right)' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad x \in (a,b), \qquad p(x) > 0,\quad q(x) \ge 0,\quad \rho(x) > 0$$

<u>положительны</u> при следующих граничных условиях:

а) $y'(a) = 0$, $y(b) = 0$;

б) $y(a) = 0$, $y'(b) = 0$;

в) $y(a) - 2y'(a) = 0$, $y(b) + y'(b) = 0$;

г) $y(a) - y'(a) = 0$, $y(b) + 2y'(b) = 0$.

7.2 Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0,\ \ y(l) = 0$;

б) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0,\ \ y'(l) = 0$;

в) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0,\ \ y'(1) + hy(1) = 0 \quad (h > 0)$;

г) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0,\ \ y'(l) + hy(l) = 0 \quad (h > 0)$;

д) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) - hy(0) = 0,\ \ y'(l) = 0 \quad (h > 0)$;

е) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) - h_1 y(0) = 0,\ \ y'(l) + h_2 y(l) = 0 \quad (h_1, h_2 > 0)$

ж) $(xy')' + \lambda \dfrac{y}{x} = 0$, $y(1) = 0,\ \ y(2) = 0$.

7.3 Проверить возможность сведения к интегральному уравнению и свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению Фредгольма с симметрическим ядром:

а) $y'' + \lambda\cdot(1+x^2)y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$;

б) $y'' + \lambda\cdot e^{2x} y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$;

в) $y'' + \lambda\cdot e^{2x} y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$;

г) $y'' + \lambda\cdot y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) + hy'(1) = 0$;

д) $(1+x^2)y'' + 2xy' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$;

е) $x^2y'' + 2xy' + \lambda x^2 y = 0$, $y'(1) = 0$, $y(2) = 0$;

ж) $(xy')' + \lambda xy = 0$, $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$;

з) $(xy')' + (\lambda x - \frac{n^2}{x}) \cdot y = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$.

7.4 Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения Фредгольма с непрерывным <u>симметрическим</u> невырожденным ядром, в следующих случаях:

а) $y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s)\, y(s)\, ds$, где $K(x,s) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le s \\ s, & s \le x \le 1 \end{cases}$;

б) $y(x) = \lambda \int_0^\pi K(x,s)\, y(s)\, ds$, где $K(x,s) = \begin{cases} \cos x \sin s, & 0 \le x \le s \\ \cos s \sin x, & s \le x \le \pi \end{cases}$;

в) $y(x) = \lambda \int_0^\pi K(x,s)\, y(s)\, ds$, где $K(x,s) = \begin{cases} \sin x \cos s, & 0 \le x \le s \\ \sin s \cos x, & s \le x \le \pi \end{cases}$.

Указание. Свести интегральное уравнение к задаче Штурма-Лиувилля.

Ответы к задачам

7.2 а) $\lambda_n = \left[\frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2$, $n = 0,1,2,\ldots$; $y_n(x) = C\cos\frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)x$;

б) $\lambda_n = \left[\frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2$, $n = 0,1,2,\ldots$; $y_n(x) = C\sin\frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)x$;

в) λ_n, $n = 1,2,3,\ldots$ - положительные решения уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$; $y_n(x) = C\sin x\sqrt{\lambda_n}$;

г) λ_n, $n = 1,2,3,\ldots$ - положительные решения уравнения $\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}$; $y_n(x) = C\cos x\sqrt{\lambda_n}$;

д) λ_n, $n = 1,2,3,\ldots$ - положительные решения уравнения $\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}$; $y_n(x) = C\cos\sqrt{\lambda_n}(l - x)$;

е) λ_n, $n = 1,2,3,\ldots$ - корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l = \sqrt{\lambda}\,\frac{h_1 + h_2}{\lambda - h_1 h_2}$;

$y_n(x) = C(h_1 \sin\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)$;

ж) $\lambda_n = \left[\frac{\pi n}{\ln 2}\right]^2$, $n = 1,2,3,\ldots$; $y_n(x) = C\sin\frac{\pi n}{\ln 2}\ln x$.

7.3 а) $G(x,s) = \begin{cases} s-1, & 0 \le x \le s \\ x-1, & s \le x \le 1 \end{cases}$, $K(x,s) = -\sqrt{1+x^2} \cdot G(x,s) \cdot \sqrt{1+s^2}$;

б) $G(x,s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \le x \le s \\ s(x-1), & s \le x \le 1 \end{cases}$, $K(x,s) = -e^x \cdot G(x,s) \cdot e^s$;

в) $G(x,s)=\begin{cases}-x, & 0\le x\le s\\ -s, & s\le x\le 1\end{cases}$, $K(x,s)=-e^x\cdot G(x,s)\cdot e^s$;

г) $G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{s-(h+1)}{h+1}x, & 0\le x\le s\\ \dfrac{x-(h+1)}{h+1}s, & s\le x\le 1\end{cases}$, $K(x,s)=-G(x,s)$;

д) $G(x,s)=\begin{cases}-arctg\,x, & 0\le x\le s\\ -arctg\,s, & s\le x\le 1\end{cases}$, $K(x,s)=-G(x,s)$;

е) $G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{2}, & 1\le x\le s\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}, & s\le x\le 2\end{cases}$, $K(x,s)=-x\cdot G(x,s)\cdot s$;

ж) $G(x,s)=\begin{cases}\ln s, & 0\le x\le s\\ \ln x, & s\le x\le 1\end{cases}$, $K(x,s)=-\sqrt{x}\cdot G(x,s)\cdot\sqrt{s}$;

з) $G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}\left[(xs)^n-\left(\dfrac{x}{s}\right)^n\right], & 0\le x\le s\\ \dfrac{1}{2n}\left[(xs)^n-\left(\dfrac{s}{x}\right)^n\right], & s\le x\le 1\end{cases}$, $K(x,s)=-\sqrt{x}\cdot G(x,s)\cdot\sqrt{s}$.

7.4 а) $\lambda_n=\pi^2(n+1/2)^2$, $y_n=C\sin\pi(n+1/2)x$, $n=0,1,2,\ldots$;

б) $\lambda_n=1-(n+1/2)^2$, $y_n=C\cos(n+1/2)x$, $n=0,1,2,\ldots$;

в) $\lambda_n=(n+1/2)^2-1$, $y_n=C\sin(n+1/2)x$, $n=0,1,2,\ldots$.