ТЕМА 6

Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода. Уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма.

Основные определения и теоремы

Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$.

Сопряженным (союзным) интегральным уравнением называется уравнение с ядром $K^*(x,s) = K(s,x)$. Если ядро симметрическое, то союзное уравнение совпадает с исходным.

Наряду с уравнением $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$ или, в операторной форме $y = \lambda A y + f$, будем рассматривать союзное с ним интегральное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K^*(x,s)\psi(s)\, ds + g(x)$$

(в операторной форме $\Leftrightarrow$ $\psi = \lambda A^* \psi + g$), $g(x)$ - непрерывная функция.

Сформулируем *4 **теоремы Фредгольма***.

Теорема 1. Однородное уравнение

$$(1) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\, ds = 0$$

и союзное с ним однородное уравнение

$$(2) \qquad \psi(x) - \lambda \int_a^b K^*(x,s)\psi(s)\, ds = 0$$

($K^*(x, s)=K(s, x)$) при любом фиксированном λ имеют либо только тривиальные решения, либо одинаковое конечное число линейно независимых решений: $\varphi_1,...,\varphi_n$; $\psi_1,...,\psi_n$.

В курсе лекций теорема была доказана для интегральных уравнений с вырожденными и симметрическими ядрами.

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного уравнения

$$(3) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\, ds = f(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения (2) ($f(x) \perp \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$, если λ - характеристическое число).

В курсе лекций теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер.

Теорема 3 (**альтернатива Фредгольма**).

Либо неоднородное уравнение (3) разрешимо при любой неоднородности - непрерывной функции $f(x)$, либо однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение.

В курсе лекций теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер.

Теорема 4. Множество характеристических чисел однородного уравнения (1) не более, чем счетно, с единственной возможной предельной точкой ∞.

Этот результат справедлив для любого вполне непрерывного оператора. В курсе лекций он был получен для вполне непрерывных самосопряженных операторов и, тем самым, доказан для случая симметрических ядер. Для интегральных операторов с вырожденными ядрами результат тривиален.

Замечание. В курсе лекций теоремы Фредгольма были доказаны для уравнений с симметрическими непрерывными ядрами и уравнений с непрерывными вырожденными ядрами. Они справедливы и для общего случая произвольного непрерывного ядра, так как имеет место следующая

Теорема. Интегральное уравнение Фредгольма 2 рода $y = \lambda Ay + f$ с невырожденным ядром при фиксированном λ можно заменить эквивалентным интегральным уравнением с вырожденным ядром.

Опишем процедуру решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x) \equiv \lambda Ay + f$ в случаях вырожденного ядра и симметричного ядра.

Напомним, что ядро $K(x,s)$ интегрального оператора Фредгольма называется <u>вырожденным</u>, если оно представимо в виде $K(x,s) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s)$, где функции $a_j(x),\ b_j(s),\quad j = 1,2,...,n$ непрерывны по своим аргументам на $[a,b]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1(x),...,a_n(x)$ – линейно независимы, и $b_1(s),...,b_n(s)$ – также линейно независимы.

Рассмотрим уравнения Фредгольма 2 рода $y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$ с вырожденным ядром $K(x,s) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s)$, где $f(x)$ – заданная непрерывная функция.

Обозначив $c_j = \int\limits_a^b b_j(s)\, y(s)\, ds$, будем иметь $y(x) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\, a_j(x) + f(x)$. Для нахождения c_j получим эквивалентную систему алгебраических уравнений $c_i = \int\limits_a^b y(x) b_i(x)\, dx = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\int\limits_a^b a_j(x) b_i(x)\, dx}_{k_{ij}} + \underbrace{\int\limits_a^b f(x) b_i(x)\, dx}_{f_i}$, или $c_i - \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} k_{ij}\, c_j = f_i,\ \ i = 1,...,n$.

Обозначим определитель этой системы $D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & ... & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & ... & -\lambda k_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & ... & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}$.

Теорема. Если λ не является характеристическим числом (т.е. $D(\lambda) \neq 0$), то интегральное уравнение Фредгольма 2 рода имеет решение при любой непрерывной неоднородности $f(x)$, причем это решение единственно для каждой функции $f(x)$.

Решение алгебраической системы для c_j в этом случае может быть найдено, например, по формулам Крамера: $c_i = \dfrac{1}{D(\lambda)} \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\, f_k$, где $D_{ki}(\lambda)$ - алгебраические дополнения i-го столбца определителя $D(\lambda)$ ($D(\lambda)$ и $D_{ki}(\lambda)$ называются определителями Фредгольма). Подставляя c_j в формулу $y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\, a_j(x) + f(x)$, получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\, a_i(x) \int_a^b f(s)\, b_k(s)\, ds,$$

или $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda)\, f(s)\, ds$, где $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\, a_i(x)\, b_k(s)$ – резольвента интегрального оператора.

Теперь рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода в случае симметрического ядра.

Пусть ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных, симметрическое и $K(x,s) \not\equiv 0$; λ - вещественное число; $f(x)$- заданная непрерывная функция. Пусть $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n| \le \ldots$ - последовательность характеристических чисел интегрального оператора, которым соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ (каждое характеристическое число повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность!!!).

Возможны два случая:

а) $\lambda \ne \lambda_k$, $k = 1,2,\ldots$ Тогда решение можно записать в следующем виде $y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} f_k\, \varphi_k(x)$, где $f_k = \int_a^b f(s)\varphi_k(s)\, ds$ - коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по ортонормированной системе собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, или

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\ \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} \right)}_{R(x,s,\lambda)} f(s)\ ds = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda)\, f(s)\, ds,$$

где $R(x,s,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_k(x)\ \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}$ - резольвента интегрального оператора Фредгольма.

б) $\lambda = \lambda_{ko}$, где λ_{ko} - характеристическое число интегрального оператора, имеющее кратность r, т.е. ему отвечают r ортонормированных собственных функций $\varphi_{ko}(x)$,..., $\varphi_{ko+r-1}(x)$. В этом случае решение не единственно и определяется формулой

$$y(x) = f(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne k_o \\ \ldots \\ k \ne k_0 + r - 1}}^{\infty} \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda}\ \varphi_k(x) + c_{ko}\, \varphi_{ko}(x) + \ldots + c_{ko+r-1}\, \varphi_{ko+r-1}(x),$$

где c_{ko} , ..., c_{ko+r-1} - произвольные константы, причем решение существует при условии ортогональности $f(x)$ всем собственным функциям $\varphi_{ko}(x)$,..., $\varphi_{ko+r-1}(x)$, соответствующим характеристическому числу λ_{ko}. Бесконечный ряд, записанный в данном выражении, сходится абсолютно и равномерно.

Заметим, что решения отличаются одно от другого на функции, являющиеся элементами $Ker(I - \lambda A)$ (нуль-пространства) оператора $I - \lambda A$.

Теорема. А) Если однородное уравнение Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром имеет только тривиальное решение (т.е. $\lambda \ne \lambda_k$, $k = 1,2,\ldots$), то неоднородное уравнение имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$.

Б) Если же однородное уравнение имеет нетривиальные решения (т.е. $\lambda=\lambda_k$ – совпадает с одним из характеристических чисел), то неоднородное уравнение разрешимо в том и только том случае, когда неоднородность – непрерывная функция $f(x)$ – ортогональна всем собственным функциям, соответствующим данному λ (ортогональна всем решениям однородного уравнения).

В) В последнем случае, если решение есть, то оно не единственно.

Теорема. (Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическими ядрами):

Либо неоднородное уравнение имеет решение при любой непрерывной функции $f(x)$, либо однородное уравнение имеет нетривиальное решение.

Примеры решения задач

Пример 6.1. Показать, что характеристические числа однородного уравнения Фредгольма $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(s^2+sx)y(s)ds$ и соответствующего однородного союзного уравнения $z(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(x^2+sx)z(s)ds$ совпадают, и при этих λ указанные уравнения имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Решение. Обозначим $\int\limits_{-1}^{1}s^2y(s)\,ds=a_1$, $\int\limits_{-1}^{1}s\,y(s)\,ds=a_2$, $\int\limits_{-1}^{1}z(s)\,ds=b_1$ $\int\limits_{-1}^{1}s\,z(s)\,ds=b_2$. Тогда решения указанных уравнений примут вид $y(x)=\lambda a_1+\lambda a_2x$, $z(x)=\lambda b_1x^2+\lambda b_2x$, и для определения коэффициентов получим

$$a_1=\lambda\int\limits_{-1}^{1}s^2(a_1+a_2s)ds=\frac{2\lambda}{3}a_1,\quad a_2=\lambda\int\limits_{-1}^{1}s\,(a_1+a_2s)\,ds=\frac{2\lambda}{3}a_2,$$

$$b_1=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(b_1s^2+b_2s)\,ds=\frac{2\lambda}{3}b_1,\quad b_2=\lambda\int\limits_{0}^{1}s\,(b_1s^2+b_2s)\,ds=\frac{2\lambda}{3}b_2.$$

Итак, при $\lambda\neq\frac{3}{2}$ имеем $a_1=a_2=0\ \Rightarrow\ y(x)\equiv 0$, $b_1=b_2=0\ \Rightarrow\ z(x)\equiv 0$; при $\lambda=\frac{3}{2}$ a_2, a_1, b_1, b_2 остаются произвольными. Поэтому $\lambda=\frac{3}{2}$ является характеристическим числом для обоих рассматриваемые уравнений, и при этом λ они имеют по два линейно независимых решения: $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x$ и $z_1(x)=x,\ z_2(x)=x^2$.

Пример 6.2. Для каждого λ исследовать разрешимость и построить решение неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным несимметрическим ядром $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(s^2-sx)y(s)ds+x^3$.

Решение. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(s^2-sx)y(s)ds$.

Обозначим $\int\limits_{-1}^{1}s^2y(s)\,ds=a_1$, $\int\limits_{-1}^{1}s\,y(s)\,ds=a_2$, тогда решение его имеет вид $y(x)=\lambda a_1-\lambda a_2x$,

где $a_1=\lambda\int\limits_{-1}^{1}s^2(a_1-a_2s)ds=\dfrac{2\lambda}{3}a_1$, $a_2=\lambda\int\limits_{-1}^{1}s\,(a_1-a_2s)\,ds=-\dfrac{2\lambda}{3}a_2$. Итак, при $\lambda\neq\pm\dfrac{3}{2}$ $a_1=a_2=0$, однородное уравнение имеет только тривиальное решение, а значит исходное неоднородное уравнение имеет единственное решение.

При $\lambda=\pm\dfrac{3}{2}$ (характеристические числа) однородное уравнение имеет нетривиальные решения: если $\lambda=+\dfrac{3}{2}$, то $y_1(x)=C$, если $\lambda=-\dfrac{3}{2}$, то $y_2(x)=Cx$. Поэтому, для указанных значений λ вопрос о разрешимости неоднородного уравнения сводится к проверке ортогональности функции $f(x)=x^3$ собственным функциям однородного союзного уравнения $z(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(x^2-sx)z(s)ds$.

Найдем собственные функции однородного союзного уравнения. Обозначим $\int\limits_{-1}^{1}z(s)\,ds=b_1$, $\int\limits_{-1}^{1}s\,z(s)\,ds=b_2$, тогда решение его имеет вид $z(x)=\lambda b_1x^2-\lambda b_2x$, где $b_1=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(b_1s^2-b_2s)\,ds=\dfrac{2\lambda}{3}b_1$, $b_2=\lambda\int\limits_{0}^{1}s\,(b_1s^2-b_2s)\,ds=-\dfrac{2\lambda}{3}b_2$.

При $\lambda=+\dfrac{3}{2}$ получаем $b_2=0$, b_1 - произвольно, откуда $z_1(x)\equiv Cx^2$ и $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\cdot z_1(x)\,dx=C\int\limits_{-1}^{1}x^3\cdot x^2\,dx=0$, т.е. исследуемое уравнение разрешимо и решение его не единственно;

при $\lambda=-\dfrac{3}{2}$ имеем $b_1=0$, b_2 - произвольно, откуда $z_2(x)\equiv Cx$ и $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\cdot z_2(x)\,dx=C\int\limits_{-1}^{1}x^3\cdot x\,dx\neq 0$, т.е. у исследуемого неоднородного уравнения решений нет.

Чтобы решить уравнения $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(s^2-sx)y(s)ds+x^3$ снова обозначим $\int\limits_{-1}^{1}s^2y(s)\,ds=a_1$, $\int\limits_{-1}^{1}s\,y(s)\,ds=a_2$, тогда решение представимо в виде $y(x)=\lambda a_1-\lambda a_2x+x^3$,

где $a_1=\int\limits_{-1}^{1}s^2(\lambda a_1-\lambda a_2s+s^3)ds=\dfrac{2\lambda}{3}a_1$, $a_2=\int\limits_{-1}^{1}s\,(\lambda a_1-\lambda a_2s+s^3)\,ds=-\dfrac{2\lambda}{3}a_2+\dfrac{2}{5}$.

При $\lambda = -\dfrac{3}{2}$ имеем $a_1 = 0, \quad 0 \cdot a_2 = \dfrac{2}{5}$, следовательно, решений нет, как и было установлено ранее;

при $\lambda = +\dfrac{3}{2}$ получим $a_2 = \dfrac{1}{5}, \quad a_1 = C$ - произвольная постоянная, поэтому $y(x) \equiv C - \dfrac{3}{10}x + x^3$, т.е. решение не единственно, и определяется с точностью до собственной функции ядра $y_1(x) = C$, отвечающей $\lambda = +\dfrac{3}{2}$.

Если $\lambda \neq \pm\dfrac{3}{2}$, то $a_1 = 0, \; a_2 = \dfrac{6}{5(3+2\lambda)}$, и единственное решение дается формулой $y(x) = -\dfrac{6\lambda x}{5(3+2\lambda)} + x^3$.

Пример 6.3. Построить резольвенту уравнения Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)\, y(s)\, ds + f(x)$$

а) вычислив определители Фредгольма;

б) в виде разложения по собственным функциям однородного уравнения.

Решение.

а) Ядро исследуемого оператора $K(x,s) = \sin(x+s) = \sin x \cos s + \cos x \sin s$ является вырожденным. Обозначим $a_1(x) = \sin x$, $a_2(x) = \cos x$, $b_1(s) = \cos s$, $b_2(s) = \sin s$ и найдем элементы определителей Фредгольма $k_{ij} = \int_a^b a_j(x) b_i(x)\, dx$:

$$k_{11} = \int_0^{\pi} a_1(x) b_1(x)\, dx = \int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx = 0, \quad k_{12} = \int_0^{\pi} a_2(x) b_1(x)\, dx = \int_0^{\pi} \cos x \cos x\, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$k_{21} = \int_0^{\pi} a_1(x) b_2(x)\, dx = \int_0^{\pi} \sin x \sin x\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad k_{22} = \int_0^{\pi} a_2(x) b_2(x)\, dx = \int_0^{\pi} \cos x \sin x\, dx = 0.$$

Вычислим определители Фредгольма: $D_{11}(\lambda) = 1, \quad D_{12}(\lambda) = D_{21}(\lambda) = -\lambda\dfrac{\pi}{2}, \quad D_{22}(\lambda) = 1$,

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \dots & -\lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \dots & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\dfrac{\pi}{2} \\ -\lambda\dfrac{\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Искомая резольвента $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{D(\lambda)} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\, a_i(x)\, b_k(s)$ в случае $D(\lambda) \neq 0$, т.е. $\lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}$, примет вид $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{D(\lambda)} \sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{k=1}^{2} D_{ki}(\lambda)\, a_i(x)\, b_k(s) =$

$$= \frac{1\cdot \sin x \cos s + \lambda\dfrac{\pi}{2}\cdot \sin x \sin s + \lambda\dfrac{\pi}{2}\cdot \cos x \cos s + 1\cdot \cos x \sin s}{1 - \left(\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\sin(x+s) + \lambda\dfrac{\pi}{2}\cos(x-s)}{1 - \left(\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)^2}.$$

б) Характеристические числа и собственные функции однородного уравнения $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi}\sin(x+s)\,y(s)\,ds$ были получены в примере 3.8: $\lambda_1=\dfrac{2}{\pi}$ и нормированная собственная функция $y_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x+\cos x)$, $\lambda_2=-\dfrac{2}{\pi}$ и нормированная собственная функция $y_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x-\cos x)$. Подставляя их в формулу для резольвенты в случае симметрического непрерывного ядра $R(x,s,\lambda)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_k(x)\ \varphi_k(s)}{\lambda_k-\lambda}$, имеем

$$R(x,s,\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{(\sin x+\cos x)(\sin s+\cos s)}{\frac{2}{\pi}-\lambda}+\frac{1}{\pi}\frac{(\sin x-\cos x)(\sin s-\cos s)}{-\frac{2}{\pi}-\lambda}=\frac{\sin(x+s)+\lambda\frac{\pi}{2}\cos(x-s)}{1-\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Заметим, что этот же результат был получен ранее методом последовательных приближений для "малого" λ (см. пример 4.7).

Пример 6.4. Решить уравнение $y(x)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sin x\sin s+s\right)y(s)\,ds+\sin 2x$.

Решение. Обозначим $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin s\,y(s)\,ds=C_1$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}sy(s)ds=C_2$, тогда решение примет вид $y(x)=\dfrac{1}{\pi}(C_1\sin x+C_2)+\sin 2x$. Постоянные C_1, C_2 могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} C_1=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin s\cdot(\frac{C_1}{\pi}\sin s+\frac{C_2}{\pi}+\sin 2s)ds=C_1 \\ C_2=\int\limits_{-\pi}^{\pi}s\cdot(\frac{C_1}{\pi}\sin s+\frac{C_2}{\pi}+\sin 2s)ds=2C_1-\pi \end{cases}.$$

Итак, $C_1=C$ - остается произвольным, $C_2=2C-\pi$, и искомое решение определяется неоднозначно: $y(x)=\sin 2x-1+\dfrac{C}{\pi}(\sin x+2)$.

Замечание. В рассматриваемом случае $\lambda=\dfrac{1}{\pi}$ совпадает с характеристическим числом однородного уравнения $y(x)=\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sin x\sin s+s\right)y(s)\,ds$. Поэтому решение неоднородного уравнения оказалось не единственно, и определилось с точностью до собственной функции соответствующего однородного уравнения, отвечающей характеристическому числу $\lambda_0=\dfrac{1}{\pi}$.

Действительно, используя введенные выше обозначения, решение однородного уравнения представим в виде $y(x)=\lambda(C_1\sin x+C_2)$. Постоянные C_1, C_2 найдем из системы

$$\begin{cases} C_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot \lambda(C_1 \sin s + C_2)ds = \lambda\pi C_1 \\ C_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} s \cdot \lambda(C_1 \sin s + C_2)ds = 2\pi\lambda C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(1-\lambda\pi) = 0 \\ C_1 2\lambda\pi - C_2 = 0 \end{cases},$$

нетривиальное решение которой $C_1 = C$, $C_2 = 2C$ существует при $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$.

Таким образом, $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}$ - характеристическое число, а $y_0(x) = \tilde{C}(\sin x + 2)$ - отвечающие ему собственные функции.

Рекомендуем самостоятельно найти собственные функции однородного союзного уравнения $z(x) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sin x \sin s + x\right) z(s)\,ds$ и убедиться в выполнении условия разрешимости, т.е. ортогональности неоднородности $f(x) = \sin 2x$ всем собственным функциям однородного союзного уравнения, отвечающим характеристическому числу $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}$.

Пример 6.5. Решить уравнение $y(x) = 2\int\limits_0^1 \sqrt{xs}\, y(s)\,ds + x$.

Решение. Обозначим $C = \int\limits_0^1 \sqrt{s}\, y(s)ds$, тогда решение, если оно существует, можно записать в виде $y(x) = 2C\sqrt{x} + x$. Подставляя это выражение в предыдущую формулу, для определения постоянной C получим уравнение $C = \int\limits_0^1 \sqrt{s} \cdot (2C\sqrt{s} + s)ds = C + \dfrac{2}{5}$, которое решений не имеет. Поэтому исследуемое интегральное уравнение Фредгольма $y(x) = 2\int\limits_0^1 \sqrt{xs}\, y(s)\,ds + x$ решений также не имеет.

Замечание. Элементарно устанавливается, что $\lambda_0 = 2$ является характеристическим числом однородного уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 \sqrt{xs}\, y(s)\,ds$ с собственной функцией $y_0(x) = C\sqrt{x}$. Так как ядро симметрическое, то $\lambda_0 = 2$ является также характеристическим числом однородного союзного уравнения с той же собственной функцией $z_0(x) = C\sqrt{x}$.

В рассматриваемом случае имеем $\lambda = 2 = \lambda_0$, т.е. λ совпадает с характеристическим числом однородного уравнения. При этом условие разрешимости (ортогональность неоднородности $f(x) = x$ всем собственным функциям однородного союзного уравнения) не выполнено.

Пример 6.6. Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$ с симметрическим непрерывным (невырожденным) ядром

$$K(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \le x \le s \\ s(1-x), & s \le x \le 1 \end{cases}, \qquad x,s \in [0;1].$$

1) При $\lambda \ne \lambda_n$, где $\lambda_n = n^2\pi^2$ $(n \in \mathbb{N})$ - собственные значения исследуемого интегрального оператора Фредгольма (см. пример 7.7), построить резольвенту интегрального оператора и записать решение неоднородного уравнения.

2) Исследовать разрешимость уравнения при различных значениях λ и найти решение, если оно существует, в следующих случаях:

а) $f(x) = \sin 2\pi x$;

б) $f(x) = x$.

Решение. 1) Если $\lambda \ne \lambda_n = n^2\pi^2$ $(n \in \mathbb{N})$, то используя построенную в примере 7.7 ортонормированную систему $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\, \sin \pi n x$, запишем соответствующую формулу для резольвенты интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\ \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\sin \pi n x \cdot \sqrt{2} \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda}.$$

Тогда решение неоднородного уравнения примет вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^1 R(x,s,\lambda)\, f(s)\, ds = f(x) + \lambda \int\limits_0^1 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x\ \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot f(s)\, ds.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования в последней формуле, получим решение в виде разложения в ряд по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\sin \pi n x}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{2} \sin \pi n s \cdot f(s)\, ds = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \cdot \sqrt{2} \sin \pi n x}{\pi^2 n^2 - \lambda},$$

где $f_n = \sqrt{2} \int\limits_0^1 \sin \pi n s \cdot f(s)\, ds$ - коэффициенты Фурье по соответствующей ортонормированной системе $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\, \sin \pi n x$.

2) Если $\lambda \ne \lambda_n = n^2\pi^2$ $(n \in \mathbb{N})$, то неоднородное уравнение разрешимо при любой непрерывной функции $f(x)$. Используя полученные выше формулы и вычисляя соответствующие интегралы, имеем:

а) $y(x) = \sin 2\pi x + \lambda \int\limits_0^1 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x\ \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot \sin 2\pi s\, ds = \sin 2\pi x + \lambda \frac{\sin 2\pi x}{4\pi^2 - \lambda} = \frac{4\pi^2 \sin 2\pi x}{4\pi^2 - \lambda}$;

б) $y(x) = x + \lambda \int\limits_0^1 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x\ \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot s\ ds = x + 2\lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ \sin \pi n x}{\pi n (\pi^2 n^2 - \lambda)}$.

Если же $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2$, т.е. λ совпадает с одним из характеристических чисел, то ответ на вопрос о разрешимости уравнения зависит от конкретного вида функции $f(x)$.

В случае б) решение не существует ни при каких $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2$ $(n \in \mathbb{N})$, так как $f(x) = x$ при любом n не ортогональна соответствующей собственной функции

$\varphi_n(x)=\sqrt{2}\,\sin\pi nx$ однородного союзного уравнения (ядро симметрично, поэтому однородное союзное уравнение совпадает с исследуемым при $f(x)\equiv 0$).

В случае а) необходимо рассмотреть два варианта.

При $\lambda=4\pi^2$ решение не существует, так как неоднородность $f(x)=\sin 2\pi x$ не ортогональна собственной функции $\varphi_2(x)=\sqrt{2}\,\sin 2\pi x$ однородного союзного уравнения, отвечающей заданному значению $\lambda=\lambda_2=4\pi^2$.

При $\lambda=\lambda_n=n^2\pi^2\neq 4\pi^2$ функция $f(x)=\sin 2\pi x$ ортогональна собственной функции $\varphi_n(x)=\sqrt{2}\,\sin\pi nx$ $(n\neq 2)$ однородного союзного уравнения, отвечающей рассматриваемому $\lambda=\lambda_n=n^2\pi^2$, $n\neq 2$, т.е. решение существует, но не единственно и представимо в виде $y(x)=\sin 2\pi x+\underbrace{\pi^2n^2}_{\lambda}\int\limits_0^1 2\sum\limits_{k=1,k\neq n}^{\infty}\dfrac{\sin\pi kx\,\sin\pi ks}{\pi^2k^2-\underbrace{\pi^2n^2}_{\lambda}}\cdot\sin 2\pi s\,ds+C\sin\pi nx$, где

C - произвольная постоянная. Меняя порядок суммирования и интегрирования, заметим, что все слагаемые в сумме при $k\neq 2$ равны нулю, т.к. $\int\limits_0^1\sin\pi ks\cdot\sin 2\pi s\,dx=0\quad(k\neq 2)$.

Поэтому, учитывая что $\int\limits_0^1\sin\pi 2s\cdot\sin 2\pi s\,ds=\dfrac{1}{2}\quad(k=2)$, окончательно получим $y(x)=\sin 2\pi x+\dfrac{\pi^2n^2}{4\pi^2-\pi^2n^2}\sin 2\pi x+C\sin\pi nx=\dfrac{4\sin 2\pi x}{4-n^2}+C\sin\pi nx$, где C - произвольно.

Задачи для самостоятельного решения

6.1 Построить резольвенту уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическим вырожденным ядром при значениях λ, не совпадающих ни с одним их характеристических чисел:

- через определители Фредгольма;
- в виде разложения по собственным функциям ядра:

а) $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 xs\;y(s)\,ds+f(x)$;

б) $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^1(x+s)\;y(s)\,ds+f(x)$;

в) $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi}y(s)\,ds+f(x)$;

г) $y(x)=\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(x-s))y(s)\,ds+f(x)$;

д) $y(x)=\lambda\int\limits_0^{2\pi}(\sin x\sin s+\sin 2x\sin 2s)y(s)\,ds+f(x)$.

6.2 Исследовать разрешимость при различных значениях λ и решить интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода:

а) $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 x(1+s)\,y(s)\,ds+x^2$;

б) $y(x)=\lambda\int_0^1 x\,y(s)\,ds+\sin 2\pi x$;

в) $y(x)=\lambda\int_0^1 (1+2x)\,s\,y(s)\,ds+1-\frac{3}{2}x$;

г) $y(x)=\lambda\int_0^1 x\sin 2\pi s\,y(s)\,ds+x$;

д) $y(x)=\lambda\int_0^1 \arccos s\cdot y(s)\,ds+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

е) $y(x)=\lambda\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg\,s\cdot y(s)\,ds+ctg\,x$;

ж) $y(x)=\lambda\int_0^{\pi} \sin x\cos s\,y(s)\,ds+\cos x$;

з) $y(x)=\lambda\int_0^{\pi} \cos(x+s)\,y(s)\,ds+1$;

и) $y(x)=\lambda\int_{-1}^{1} (1+xs)\,y(s)\,ds+\sin \pi x$;

к) $y(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x-s)\,y(s)\,ds+\sin 2x$;

л) $y(x)=\lambda\int_{-1}^{1} (2xs^3+5x^2s^2)\,y(s)\,ds+7x^4+3$;

м) $y(x)=\lambda\int_0^1 K(x,s)\,y(s)\,ds+\cos \pi x$, где $K(x,s)=\begin{cases}(x+1)\,s, & 0\le x\le s\\ (s+1)\,x, & s\le x\le 1\end{cases}$.

Ответы к задачам

6.1 а) $R(x,s,\lambda)=\frac{xs}{1-\frac{1}{3}\lambda}=\frac{3xs}{3-\lambda}$;

б) $R(x,s,\lambda)=\frac{2\lambda(1+3xs)+3(x+s)}{3-4\lambda^2}$;

в) $R(x,s,\lambda)=\frac{1}{1-\lambda\pi}$;

г) $R(x,s,\lambda)=\frac{1}{1-2\pi\lambda}+\frac{\cos(x-s)}{1-\lambda\pi}$;

д) $R(x,s,\lambda)=\frac{\sin x\sin s+\sin 2x\sin 2s}{1-\lambda\pi}$.

6.2 а) При $\lambda\ne\frac{6}{5}$ - единственное решение $y(x)=x^2+\frac{x}{2}\cdot\frac{7\lambda}{6-5\lambda}$; при $\lambda=\frac{6}{5}$ - решений нет.

б) При $\lambda \neq 2$ - единственное решение $y(x) = \sin 2\pi x$;

при $\lambda = 2$ - $y(x) = Cx + \sin 2\pi x$ - решение не единственно.

в) При $\lambda \neq \dfrac{6}{7}$ - единственное решение $y(x) = 1 - \dfrac{3}{2}x$;

при $\lambda = \dfrac{6}{7}$ - $y(x) = 1 - \dfrac{3}{2}x + C(1+2x)$ - решение не единственно.

г) При $\lambda \neq -2\pi$ - единственное решение $y(x) = \dfrac{2\pi x}{\lambda + 2\pi}$; при $\lambda = -2\pi$ - решений нет.

д) При $\lambda \neq 1$ - единственное решение $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\pi^2 \lambda}{8(1-\lambda)}$; при $\lambda = 1$ - решений нет.

е) При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ - единственное решение $y(x) = ctg\, x + \dfrac{\pi\lambda}{2}$.

ж) При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ - единственное решение $y(x) = \cos x + \dfrac{\pi\lambda}{2}\sin x$.

з) При $\lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}$ - единственное решение $y(x) = 1 - \dfrac{4\lambda \sin x}{2 + \lambda\pi}$; при $\lambda = -\dfrac{2}{\pi}$ - решений нет;

при $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$ - $y(x) = C\cos x - \dfrac{2}{\pi}\sin x + 1$ - решение не единственно.

и) При $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$, $\lambda \neq \dfrac{3}{2}$ - единственное решение $y(x) = \sin \pi x + \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{3\lambda}{3 - 2\lambda} x$;

при $\lambda = \dfrac{3}{2}$ - решений нет;

при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ - $y(x) = C + \sin \pi x + \dfrac{3x}{2\pi}$ - решение не единственно.

к) При $\lambda \neq \dfrac{1}{\pi}$, $\lambda \neq \dfrac{2}{\pi}$ - единственное решение $y(x) = \dfrac{2\sin 2x}{2 - \lambda\pi}$;

при $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$ - решений нет; при $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$ - $y(x) = 2\sin 2x + C$ - решение не единственно.

л) При $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$, $\lambda \neq \dfrac{5}{4}$ - единственное решение $y(x) = 3 + \dfrac{20\lambda}{1 - 2\lambda}x^2 + 7x^4$;

при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ - решений нет;

при $\lambda = \dfrac{5}{4}$ - $y(x) = 3 + Cx - \dfrac{50}{3}x^2 + 7x^4$ - решение не единственно.

м) При $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -\pi^2 n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ - единственное решение

$$y(x) = \cos \pi x + \lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \cdot \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi(\sin \pi x + \pi \cos \pi x)}{2(\lambda + \pi^2)}\right];$$

при $\lambda = 1$, $\lambda = -\pi^2$ - решений нет;

при $\lambda = -\pi^2 n^2$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ - решение не единственно

$$y(x) = \cos \pi x + \lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \cdot \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi(\sin \pi x + \pi \cos \pi x)}{2(\lambda + \pi^2)}\right] + C(\sin \pi x + n\pi \cos \pi x).$$