ТЕМА 5

Линейное уравнение Вольтерра 2-го рода.

Основные определения и теоремы.

Уравнение $y = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$, $x, s \in [a,b]$, или в операторной форме $y = \lambda B y + f$, называется уравнением Вольтерра 2-го рода.

Пусть ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных на своей треугольной области определения $\Delta = \{x, s : a \le s \le x \le b\}$ и не равно нулю тождественно, $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция.

Теорема. Уравнение Вольтерра 2-го рода при любом значении λ имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений $y_{n+1} = \lambda B y_n + f$, $\forall y_0 \in C[a,b]$, $f(x) \in C[a,b]$.

Следствие 1. При любом λ однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. Оператор Вольтерра, действующий $C[a,b] \to C[a,b]$, не имеет характеристических чисел. Таким образом, оператор Вольтерра является примером вполне непрерывного оператора, не имеющего ни одного характеристического числа.

Метод последовательных приближений для уравнения Вольтерра 2-го рода называется методом Пикара и выглядит так: для любого начального приближения $y_0 \in C[a,b]$ определим $y_{n+1} = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y_n(s)\, ds + f(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$, или $y_{n+1} = \lambda B y_n + f$, причем $y_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(x)$.

Полагая $y_0 = 0$, получаем ряд Неймана $y = f + \lambda B f + \lambda^2 B^2 f + \ldots + \lambda^n B^n f + \ldots$.

Если записать уравнение Вольтерра 2-го рода в операторной форме $y = \lambda A y + f$ или $(I - \lambda A) y = f$, то так как решение существует и единственно при любой непрерывной функции $f(x)$ и любом λ, его (решение) можно представить в виде $y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda R_\lambda) f = f + \lambda R_\lambda f$, где R_λ - интегральный оператор с непрерывным по x, s ядром $R(x,s,\lambda)$, т.е. $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,s,\lambda) f(s) ds$.

Ядро $R(x,s,\lambda)$ оператора R_λ называется <u>резольвентой</u>.

Функции $K_1(x,s) \equiv K(x,s)$, $K_n(x,s) = \int_s^x K(x,t)\, K_{n-1}(t,s)\, dt$, $n = 2,3,\ldots$ называются <u>повторными</u> (итерированными) ядрами. Ряд $\underbrace{K_1(x,s)}_{=K(x,s)} + \lambda K_2(x,s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \ldots$ сходится равномерно по $x, s \in [a,b]$ <u>при любых λ</u>, в отличие от аналогичного ряда для уравнения Фредгольма, сходимость которого гарантировалась лишь при $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0\,(b-a)}$, и резольвента $R(x,s,\lambda)$ может быть получена по формуле $R(x,s,\lambda) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$.

Уравнения Вольтерра с ядрами специального вида могут также решаться путем сведения к дифференциальному уравнению, либо с использованием преобразования Лапласа (примеры 5.4 и 5.5).

Примеры решения задач.

Пример 5.1. Методом последовательных приближений построить резольвенту интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода $y(x) = \lambda \int\limits_0^x e^{-(x-s)}\, y(s)\, ds + x e^{\frac{x^2}{2}}$ и найти решение этого уравнения при $\lambda = 1$.

Решение. Вычислим повторные ядра этого уравнения: $K_1(x,s) = K(x,s) = e^{-(x-s)}$,

$$K_2(x,s) = \int\limits_s^x K(x,t)\, K_1(t,s)\, dt = \int\limits_s^x e^{-(x-t)}\, e^{-(t-s)}\, dt = (x-s)\cdot e^{-(x-s)},$$

$$K_3(x,s) = \int\limits_s^x K(x,t)\, K_2(t,s)\, dt = \int\limits_s^x e^{-(x-t)} \cdot (t-s)\, e^{-(t-s)}\, dt = \frac{(x-s)^2}{2} \cdot e^{-(x-s)},$$

…………

$$K_{m+1}(x,s) = \int\limits_s^x K(x,t)\, K_m(t,s)\, dt = \frac{(x-s)^m}{m!} \cdot e^{-(x-s)}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для резольвенты, получим $R(x,s,\lambda) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s) = e^{-(x-s)} \cdot e^{\lambda(x-s)} = e^{(\lambda-1)(x-s)}$. Заметим, что ряд сходится при любых λ, что обеспечивается не малостью λ, как было в случае уравнения Фредгольма, а наличием множителя $m!$ в знаменателях повторных ядер.

Далее, положив $\lambda = 1$, получим $R(x,s,\lambda) = R(x,s,1) = 1$ и запишем решение уравнения при $f(x) = x e^{\frac{x^2}{2}}$ в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x R(x,s,\lambda)\, f(s)\, ds = x e^{\frac{x^2}{2}} + 1 \cdot \int\limits_0^x s\, e^{\frac{s^2}{2}}\, ds = (x+1)\cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Пример 5.2. Методом последовательных приближений решить уравнение Вольтерра

$$y(x) = \int\limits_0^x (s-x)\, y(s)\, ds + 1.$$

Решение. Итерационный процесс для данного уравнения выглядит так: $y_{n+1}(x) = \int\limits_0^x (s-x)\, y_n(s)\, ds + 1$. Выберем в качестве начального приближения $y_0(x) \equiv 0$, тогда последовательно найдем:

$$y_1(x)=\int_0^x (s-x)\cdot 0\,ds+1=1,$$
$$y_2(x)=\int_0^x (s-x)\,y_1(s)\,ds+1=\int_0^x (s-x)\cdot 1\;ds+1=1-\frac{x^2}{2},$$
$$y_3(x)=\int_0^x (s-x)\,y_2(s)\,ds+1=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!},$$
……………..
$$y_{n+1}(x)=\int_0^x (s-x)\,y_n(s)\,ds+1=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим функцию $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)=\cos x$, которая и является решением рассматриваемого уравнения.

Пример 5.3. Доказать, что если ядро уравнения Вольтерра $y(x)=\lambda\int_0^x K(x,s)\,y(s)\,ds+f(x)$ зависит только от разности аргументов, т.е. $K(x,s)=K(x-s)$, то все повторные ядра, а следовательно и резольвента, также являются функциями лишь от разности $(x-s)$.

Решение. Пусть $K(x,s)=K(x-s)$, тогда $K_2(x,s)=\int_s^x K(x-t)\,K(t-s)\,dt$. Произведя замену переменной интегрирования по формуле $t-s=\xi$, получим $K_2(x,s)=\int_0^{x-s} K(x-s-\xi)\,K(\xi)\,d\xi=\int_0^{x-s} F_2(x-s,\xi)\;d\xi=\Phi_2(x-s)$.

Действуя далее аналогичным путем, найдем, $K_m(x,s)=\int_s^x K(x,t)\,K_{m-1}(t,s)\,dt=\int_s^x K(x-t)\,K_{m-1}(t-s)\,dt=\int_0^{x-s} K(x-s-\xi)\,K_{m-1}(\xi)\,d\xi=\Phi_m(x-s)$, что и требовалось доказать.

Пример 5.4. С помощью преобразования Лапласа найти резольвенту и записать решение уравнения Вольтерра $y(x)=\int_0^x \sin(x-s)\,y(s)\,ds+f(x)$.

Решение. Поставим в соответствие функциям, входящим в уравнение, их изображения: $y(x)\div Y(p)$, $f(x)\div F(p)$, $\sin x\div\frac{1}{p^2+1}\equiv K(p)$. Учитывая, что изображение свертки двух функций есть произведение их изображений, получим $Y(p)=K(p)\cdot Y(p)+F(p)$, откуда $Y(p)=\frac{F(p)}{1-K(p)}=F(p)+\frac{K(p)}{1-K(p)}\cdot F(p)$.

Используя результат предыдущей задачи, можно сделать вывод, что резольвента зависит лишь от разности $(x-s)$, следовательно, решение исходного уравнения представимо в виде $y(x)=f(x)+\int_a^x R(x-s,1)\,f(s)\,ds$. Сравнивая последние две формулы, легко видеть, что изображение искомой резольвенты есть $\tilde{R}(p)=\dfrac{K(p)}{1-K(p)}$. Подставив сюда $K(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$, получим $\tilde{R}(p)=\dfrac{1}{p^2}$, откуда найдем $R(x,s,1)=R(x-s,1)=\ x-s$.

Решение уравнения теперь можно записать так: $y(x)=f(x)+\int\limits_0^x (x-s)\,f(s)\,ds$.

Пример 5.5. Решить интегральное уравнение Вольтерра $y(x)=\sin x+\int\limits_0^x \sin(x-s)\,y(s)\,ds$, сведя его к задаче Коши для дифференциального уравнения.

Решение. Легко видеть, что решение уравнения удовлетворяет условию $y(0)=0$.

Последовательно продифференцируем интегральное уравнение и найдем

$$y'(x)=\cos x+\int\limits_0^x \cos(x-s)\,y(s)\,ds+\sin(x-x)y(x)=\cos x+\int\limits_0^x \cos(x-s)\,y(s)\,ds\,,\qquad y'(0)=1,$$

$$y''(x)=-\sin x-\int\limits_0^x \sin(x-s)\,y(s)\,ds+\cos(x-x)y(x)=-\sin x+y(x)-\int\limits_0^x \sin(x-s)\,y(s)\,ds\,.$$

Складывая последнее равенство с исходным, получим $y''=0$. Решение задачи Коши с начальными условиями $y(0)=0$, $y'(0)=1$ дает $y(x)=x$.

Замечание. Этот же результат можно получить, используя формулу решения предыдущего примера, полагая в ней $f(x)=\sin x$:

$$y(x)=\sin x+\int\limits_0^x (x-s)\ \sin s\ ds=\sin x+x-\sin x=x\ .$$

Задачи для самостоятельного решения.

5.1 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в $C[a,b]$, не имеет характеристических чисел.

5.2 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в $h[a,b]$, не имеет характеристических чисел.

5.3 Доказать, что задача решения уравнения Вольтерра 2-рода $y(x)=\int\limits_a^x K(x,s)\ y(s)\ ds+f(x)$ корректно поставлена

а) в пространстве $C[a,b]$;

б) в пространстве $h[a,b]$.

5.4 Решить интегральное уравнение, сведя его к задаче Коши:

а) $y(x)=e^x+\int\limits_0^x y(s)\,ds$;

б) $y(x)=4e^x+3x-4-\int\limits_0^x (x-s)\,y(s)\,ds$;

в) $y(x)=\sin x+2\int\limits_0^x e^{-s}\ y(x-s)\,ds$ (Указание: сделать в интеграле замену переменной $x-s=\xi$).

5.5 Методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение интегрального уравнения:

а) $y(x) = 1 + \int\limits_0^x s\, y(s)\, ds$;

б) $y(x) = x - \int\limits_0^x (x-s)\, y(s)\, ds$;

в) $y(x) = x + \dfrac{x^2}{2} - \int\limits_0^x y(s)\, ds$.

5.6 Решить интегральное уравнение, используя преобразование Лапласа:

а) $y(x) = x - \int\limits_0^x e^{x-s} y(s)\, ds$;

б) $y(x) = \cos x - \int\limits_0^x (x-s) \cos(x-s)\; y(s)\, ds$;

в) $y(x) = 2 + \dfrac{1}{6}\int\limits_0^x (x-s)^3\; y(s)\, ds$.

5.7 Решить уравнение Вольтерра 1-го рода $\int\limits_0^x e^{x-s} y(s)\, ds = \sin x$

а) применив преобразование Лапласа;

б) продифференцировав уравнение и сведя его к уравнению Вольтерра 2-го рода.

Ответы к задачам.

5.4 а) $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$; $y(x) = (x+1)\cdot e^x$;

б) $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 7$; $y(x) = 2e^x - 2\cos x + 5\sin x$;

в) $y' - y = \sin x + \cos x$, $y(0) = 0$; $y(x) = e^x - \cos x$.

5.5 а) $R(x,s,\lambda) = s e^{\frac{x^2 - s^2}{2}}$, $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$;

б) $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}(s-x)$, $y(x) = \sin x$;

в) $R(x,s,\lambda) = e^{\lambda(x-s)}$, $y(x) = x$.

5.6 а) $y(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$;

б) $y(x) = \dfrac{2}{3}\cos x\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}$;

в) $y(x) = \cos x + ch\, x$.

5.7 $y(x) = \cos x - \sin x$