<u>Лекция №10</u>

§4. Задачи на условный экстремум.

Рассмотрим задачу об отыскании экстремума функционала

$$V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx\,,$$

где $y=y(x),\quad z=z(x)$, с граничными условиями

$$y(a)=y_0,\quad z(a)=z_0;$$
$$y(b)=y_1,\quad z(b)=z_1.$$

Кроме того, предположим, что функции $y=y(x),\ z=z(x)$ удовлетворяют уравнению связи

$$\Phi(x,y,z,y',z')=0\,.$$

Поскольку Φ зависит не только от функций $y=y(x),\ z=z(x)$, а и от их первых производных, такая связь называется неголономной.

Теорема (Необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами и неголономной связью).

Пусть:

1) $y(x), z(x)$ осуществляют экстремум $V[y,z]$ в задаче с закрепленными концами и неголономной связью и дважды непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$;
2) F,Φ непрерывны с частными производными до второго порядка включительно, причем $\Phi_{z'}\neq 0$.

Тогда существует дифференцируемая функция $\lambda(x)$, такая, что $y(x),\ z(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера для функционала $\int_a^b H(x,y,z,y',z')dx$, где $H=F+\lambda(x)\Phi$:

$$\begin{cases} F_y+\lambda\ \ \Phi_y-\dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}+\lambda\ \ \Phi_{y'}\right)=0;\\ F_z+\lambda\ \ \Phi_z-\dfrac{d}{dx}\left(F_{z'}+\lambda\ \ \Phi_{z'}\right)=0;\\ \Phi(x,y,z,y',z')=0\ ;\\ y(a)=y_0,\quad y(b)=y_1;\\ z(a)=z_0,\quad z(b)=z_1\ . \end{cases}$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим функционал $V\left[y+th_1(x),\ z+th_2(x)\right]$, где $h_1(x),\ h_2(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$h_1(a)=h_1(b)=0;$$
$$h_2(a)=h_2(b)=0.$$

Вычислим вариацию функционала $V[y,z]$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{d}{dt}V\left[y+th_1(x),\ z+th_2(x)\right]\Big|_{t=0}=\delta V\left(y,z,h_1,h_2\right)=0.$$

Так же, как в предыдущем параграфе, после интегрирования по частям (подстановки обращаются в нуль в силу граничных условий для $h_1(x),\ h_2(x)$) получаем:

$$\delta V=\int_a^b\left(F_yh_1+F_{y'}h_1'+F_zh_2+F_{z'}h_2'\right)dx=\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)h_1dx+\int_a^b\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)h_2dx=0.$$

Если бы $h_1(x)$, $h_2(x)$ были бы независимыми, то мы получили бы систему уравнений Эйлера. Однако $h_1(x)$, $h_2(x)$ подчиняются (по крайней мере, для малых t) уравнению связи

$$\Phi\left[x, y + th_1, z + th_2, y' + th_1', z' + th_2'\right] = 0 .$$

Получим уравнение, решая которое, мы сможем выразить $h_2(x)$ через $h_1(x)$. Продифференцируем записанное выше равенство по t и положим $t = 0$. Тогда

$$\left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

или

$$\Phi_y h_1 + \Phi_{y'} h_1' + \Phi_z h_2 + \Phi_{z'} h_2' = 0 .$$

Так как $\Phi_{z'} \neq 0$, то

$$h_2' = -\frac{\Phi_z}{\Phi_{z'}} h_2 - \frac{\Phi_y}{\Phi_{z'}} h_1 - \frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{z'}} h_1' .$$

Обозначив $a_2 = -\frac{\Phi_z}{\Phi_{z'}}$, $a_1 = -\frac{\Phi_y}{\Phi_{z'}}$, $b_1 = -\frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{z'}}$, получим следующую задачу Коши для отыскания $h_2(x)$ при условии, что $h_1(x)$ задано:

$$\begin{cases} h_2' = a_2 h_2 + \left(a_1 h_1 + b_1 h_1'\right); \\ h_2(a) = 0. \end{cases}$$

Уравнение, которому удовлетворяет $h_2(x)$, является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Общее решение этого уравнения хорошо известно из курса дифференциальных уравнений и может быть найдено, например, методом вариации постоянной. Получите самостоятельно это общее решение и покажите, что решение задачи Коши имеет вид

$$h_2 = \int_a^x \left(a_1 h_1 + b_1 h_1'\right) \exp\left(\int_\xi^x a_2 d\eta\right) d\xi.$$

Итак, мы выразили $h_2(x)$ через $h_1(x)$. Подставляя это выражение во второй интеграл в формуле для вариации, после простых преобразований (изменение порядка интегрирования по x и ξ) получаем

$$\int_b^a \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}\right) dx \int_a^x \left(a_1 h_1 + b_1 h_1'\right) \exp\left(\int_\xi^x a_2 d\eta\right) d\xi = \int_b^a \left(a_1 h_1 + b_1 h_1'\right) d\xi \int_\xi^b \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}\right) \exp\left(\int_\xi^x a_2 d\eta\right) dx$$

$$= \int_a^b \left(a_1 h_1 + b_1 h_1'\right) \gamma(\xi) d\xi = \int_a^b \left[a_1 \gamma - \frac{d}{dx}\left(b_1 \gamma\right)\right] h_1 d\xi,$$

где $$\gamma(\xi) = \int_\xi^b \left(F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}\right) \exp\left(\int_\xi^x a_2 d\eta\right) dx .$$

Переобозначив переменную интегрирования (x вместо ξ), окончательно получим

$$\delta V = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + a_1 \gamma - \frac{d}{dx}(b_1 \gamma)\right] h_1(x)\, dx = 0 .$$

Здесь $$\gamma(x) = \int_x^b \left(F_z - \frac{d}{d\xi} F_{z'}\right) \exp\left(\int_\xi^x \frac{\Phi_z}{\Phi_{z'}} d\eta\right) d\xi .$$

По основной лемме вариационного исчисления:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+a_1\gamma-\frac{d}{dx}(b_1\gamma)=0.$$

Вспомнив, что $a_1=-\frac{\Phi_y}{\Phi_{z'}},\quad b_1=-\frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{z'}}$, получим

$$a_1\gamma-\frac{d}{dx}(b_1\gamma)=-\frac{\Phi_y}{\Phi_{z'}}\gamma-\frac{d}{dx}\left(-\frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{z'}}\gamma\right).$$

Обозначим $\lambda(x)=-\frac{\gamma(x)}{\Phi_{z'}}$. Очевидно, что $\lambda(x)$ - дифференцируемая функция.

Тогда

$$a_1\gamma-\frac{d}{dx}(b_1\gamma)=\lambda\Phi_y-\frac{d}{dx}(\lambda\Phi_{y'}),$$

и равенство нулю вариации приводит к уравнению

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\lambda\Phi_y-\frac{d}{dx}(\lambda\Phi_{y'})=0,$$

или

$$F_y+\lambda\Phi_y-\frac{d}{dx}(F_{y'}+\lambda\Phi_{y'})=0.$$

Мы получили первое из уравнений Эйлера, фигурирующих в условиях теоремы.

Перепишем второе уравнение таким образом:

$$\frac{d}{dx}(\lambda\Phi_{z'})=\left(\frac{\Phi_z}{\Phi_{z'}}\right)(\lambda\Phi_{z'})+\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)$$

Рассмотрим это уравнение как уравнение относительно $\lambda\Phi_{z'}$. Тогда

$$\lambda\Phi_{z'}=\int_b^x\left(F_z-\frac{d}{d\xi}F_{z'}\right)\exp\left(\int_\xi^x\frac{\Phi_z}{\Phi_{z'}}d\eta\right)d\xi$$

является его решением. Сравнивая полученное выражение с выведенной ранее формулой $\gamma(x)=-\lambda\Phi_{z'}$, получаем, что второе уравнение из системы уравнений Эйлера тоже выполнено. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу с голономной связью. Требуется найти экстремум функционала

$$V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$$

при выполнении граничных условий

$$y(a)=y_0,\quad y(b)=y_1;$$
$$z(a)=z_0,\quad z(b)=z_1$$

и уравнения связи $\Phi(x,y,z)=0$.

Граничные условия нельзя считать независимыми, поскольку $\Phi(a,y_0,z_0)=0$ и $\Phi(b,y_1,z_1)=0$.

Как и ранее, введем функцию $H=F+\lambda(x)\Phi$ и функционал

$$\int_a^b H(x,y,z,y',z')\,dx.$$

В отличие от задачи с неголономной связью, теперь $\Phi_{z'}\equiv 0$. Поэтому предположим, что $\Phi_z\neq 0$. Система уравнений Эйлера в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} (F_y + \lambda \Phi_y) - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0; \\ (F_z + \lambda \Phi_z) - \dfrac{d}{dx} F_{z'} = 0. \end{cases}$$

Теорема (Необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами и голономной связью).

Пусть:

1) функции $y(x)$ и $z(x)$ реализуют экстремум в поставленной выше задаче с голономной связью и дважды непрерывно дифференцируемы;
2) функция F непрерывна со своими частными производными до второго порядка включительно;
3) функция Φ непрерывна со своими частными производными, причем $\Phi_z \neq 0$.

Тогда существует непрерывная функция $\lambda(x)$ такая, что $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют системе уравнений, записанной выше.

Доказательство. Выражение для вариации функционала получено при доказательстве предыдущей теоремы и имеет следующий вид:

$$\delta V = \int_a^b [(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) h_1 + (F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}) h_2] \, dx = 0 .$$

Выражая теперь h_2 через h_1 из соотношения $\Phi_y h_1 + \Phi_z h_2 = 0,$ полученного также, как и в предыдущей теореме, и используя условие $\Phi_z \neq 0$, находим

$$h_2 = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z} h_1 .$$

Далее, подставляя h_2 в выражение для вариации и применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем уравнение

$$(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}) - (F_z - \frac{d}{dx} F_{z'}) \frac{\Phi_y}{\Phi_z} = 0 .$$

Полагая $\lambda = -\dfrac{F_z - \dfrac{d}{dx} F_{z'}}{\Phi_z}$, получаем первое уравнение из системы уравнений Эйлера. Второе уравнение системы – это записанное выше определение λ.

Очевидно, что $\lambda = \lambda(x)$ - непрерывная функция. Теорема доказана.

В качестве простого примера рассмотрим задачу об отыскании так называемых геодезических линий. Пусть уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ задаёт некоторую поверхность в трёхмерном пространстве, на которой фиксированы две точки. Поставим задачу отыскания геодезической линии, т.е. кривой минимальной длины, соединяющей эти точки.

Если предположить, что уравнение кривой допускает введение параметризации с помощью параметра x, то данная задача сводится к минимизации функционала

$$V[y, z] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} \, dx$$

с соответствующими граничными условиями.

В заключение параграфа рассмотрим так называемую изопериметрическую задачу. Пусть требуется найти экстремум функционала

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

при выполнении граничных условий

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

и дополнительного условия связи

$$I[y] = \int_a^b G(x, y, y')\, dx = l$$

(функционал $I[y]$ имеет заданное значение).

Задача называется изопериметрической, т.к. если положить

$$I[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = l ,$$

то требуется найти кривую, на которой достигается экстремум функционала $V[y]$, проходящую через заданные точки, причем длина кривой (ее периметр) задана.

Для того, чтобы применить полученные в данном параграфе результаты, введем новую функцию

$$z(x) = \int_a^x G(x, y, y')\ dx .$$

Очевидно, что $z(a) = 0,\ z(b) = l$. Перепишем изопериметрическую задачу в следующем виде: найти экстремум функционала

$$V[y, z] = \int_a^b F(x, y, y')\ dx$$

при выполнении граничных условий $y(a) = A,\ y(b) = B,\ z(a) = 0,\ z(b) = l$ и уравнения неголономной связи

$$\Phi(x, y, z, y', z') \equiv -z' + G(x, y, y') = 0 .$$

Запишем систему уравнений Эйлера для функционала $\int_a^b H\, dx$, где $H = F + \lambda\Phi$:

$$\begin{cases} (F_y + \lambda G_y) - \dfrac{d}{dx}(F_{y'} + \lambda G_{y'}) = 0; \\ \dfrac{d\lambda}{dx} = 0. \end{cases}$$

Обратите внимание на второе уравнение, из которого следует, что $\lambda = const$.

Теорема (Необходимое условие экстремума для изопериметрической задачи с закрепленными концами).

Пусть:

1) функция $y(x)$ реализует экстремум функционала $V[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$ и дважды непрерывно дифференцируема;
2) функции F и G непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

Тогда существует число λ такое, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала $\int_a^b H\, dx$, где $H = F + \lambda G$.

Доказательство следует немедленно из теоремы о необходимом условии для задачи с закрепленными концами и неголономной связью.

Рассмотрим теперь задачу отыскания кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь. В этом случае, $F = y$, $V[y] = \int_a^b y\,dx$, $G = \sqrt{1+(y')^2}$, $H = y + \lambda\sqrt{1+(y')^2}$, $\lambda = const$.

Первый интеграл для уравнения Эйлера имеет вид $H - y'H_{y'} = C_1$, или

$$y + \lambda\sqrt{1+(y')^2} - y'\lambda\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

Приводя подобные члены, получим

$$y - C_1 = -\lambda\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Введём вспомогательный параметр t по формуле $y' = \operatorname{tg} t$. Тогда $y - C_1 = -\lambda\cos t$.

Найдем $x(t)$. Имеем

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\lambda\sin t}{tgt}dt = \lambda\cos t dt \quad \Rightarrow \quad x - C_2 = \lambda\sin t.$$

Исключая параметр t, получим уравнение окружности

$$(x-C_2)^2 + (y-C_1)^2 = \lambda^2.$$

Параметры C_1, C_2 и λ можно определить из системы:

$$\begin{cases} (x-C_2)^2 + (y-C_1)^2 = \lambda^2; \\ y(a) = A, \qquad y(b) = B; \\ \int_a^b G dx = l \ . \end{cases}$$

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')dx$ при условии, что концы закреплены, и имеется неголономная связь. Записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
2. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')dx$ при условии, что концы закреплены, и имеется голономная связь. Записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
3. Сформулировать определение геодезической линии.
4. Сформулировать изопериметрическую задачу с закрепленными концами и необходимые условия экстремума в этой задаче.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Получить необходимые условия экстремума функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')dx$, если концы закреплены, и имеется неголономная связь.
2. Получить необходимые условия экстремума функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')dx$, если что концы закреплены, и имеется голономная связь.
3. Получить необходимые условия экстремума в изопериметрической задаче с закрепленными концами.
4. Записать постановку и привести решение задачи об отыскании кривой заданной длины, площадь под которой максимальна (задача Дидоны).