В. Т. Волков, А. Г. Ягола

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

(курс лекций)

Предисловие

Учебное пособие "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление (курс лекций)." написано на основе опыта чтения авторами одноименного курса для студентов физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Лекционный курс "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление." включает 14 лекций и разбит на 3 части: интегральные уравнения, вариационное исчисление и введение в методы решения некорректно поставленных задач. Первые две лекции носят вводный характер и содержат изложение ряда вопросов функционального анализа, необходимых для понимания последующего лекционного материала. Затем (6 лекций) подробно рассмотрены линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и некоторые связанные с ними вопросы, например, задача Штурма-Лиувилля и основы вариационного исчисления (4 лекции). Две заключительные лекции посвящены изучению основ методов регуляризации некорректно поставленных задач на примере интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. По каждой теме приведено подробное изложение теоретического материала, сопровождаемое примерами с подробными решениями и упражнениями для самостоятельной работы. В конце каждой лекции приводится список вопросов и теоретических задач, разъясняющих и углубляющих некоторые аспекты читаемого курса и включенных в экзаменационные билеты.

Курс "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление." является достаточно сложным и включает ряд вопросов, трудных для понимания студентами. Главной проблемой является то, что к началу чтения курса студенты еще не знакомы с основами функционального анализа в объеме, который требуется для понимания теорем, доказываемых на лекциях. Чтобы помочь студентам максимально быстро освоить необходимый материал, две первые лекции посвящены изучению ряда вопросов теории линейных операторов в бесконечномерных нормированных пространствах. Обращаем внимание читателя на то, что в книге рассмотрены лишь некоторые вопросы функционального анализа, а желающие получить более основательную и глубокую подготовку по этому предмету могут обратиться к хорошо известным учебникам и задачникам, например, изданиям [1-3] из списка дополнительной литературы.

Лекционный курс "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление." читается на физическом факультете МГУ в 4-ом семестре и сопровождается практическими занятиями. Материал для решения задач можно найти, например, в учебном пособии тех же авторов (Волков В.Т., Ягола А.Г. "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление (методы решения задач)". М.: КДУ, 2007), изданном одновременно с настоящей книгой.

Авторы выражают глубокую благодарность А.Б. Васильевой, Н.А. Тихонову, Г.Н. Медведеву и другим преподавателям кафедры математики физического факультета МГУ за полезные обсуждения и замечания.

Программа курса

1. Классификация линейных интегральных уравнений.

   Уравнения Фредгольма и Вольтерра первого и второго рода. Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям.
2. Линейные пространства. Линейные операторы в бесконечномерных нормированных пространствах. Вполне непрерывный оператор.
3. Теорема существования собственного значения и собственного вектора у вполне непрерывного самосопряженного оператора. Построение последовательности собственных значений и собственных векторов.
4. Однородное уравнение Фредгольма второго рода.

   Существование собственных значений и собственных функций у интегрального оператора с симметричным ядром. Вырожденные ядра. Теорема Гильберта-Шмидта.
5. Принцип сжимающих отображений. Уравнение Фредгольма с “малым λ”. Метод последовательных приближений.
6. Линейное уравнение Вольтерра. Метод последовательных приближений.
7. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода.

   Уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами. Уравнение Фредгольма с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма.
8. Краевая задача на собственные значения и собственные функции (задача Штурма-Лиувилля).

   Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова.
9. Понятие функционала. Первая вариация функционала. Необходимое условие экстремума.
10. Вариационная задача с закрепленными концами. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера, необходимое условие экстремума..
11. Поле экстремалей, функция Вейерштрасса, достаточные условия экстремума.
12. Задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача и задача Лагранжа (постановки задач, необходимое условие экстремума).
13. Задачи с подвижными границами. Постановки задач, условие трансверсальности, необходимое условие экстремума.
14. Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах.

    Уравнение Фредгольма первого рода как пример некорректно поставленной задачи. Метод А.Н. Тихонова регуляризации решения уравнения Фредгольма первого рода.

Глава 1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция №1

§1. Введение.

Уравнение называется интегральным, если неизвестная функция входит в уравнение под знаком интеграла. Разумеется, мы не будем рассматривать интегральные уравнения в такой общей постановке, а ограничимся изучением только одномерных линейных интегральных уравнений следующих типов.

1) Уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x), \qquad x,s \in [a,b],$$

где $K(x,s)$ – заданная непрерывная по совокупности аргументов функция, называемая ядром интегрального уравнения; $f(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая неоднородностью уравнения (если $f \equiv 0$, то уравнение называется однородным); λ – вещественный параметр; $y(x)$ – неизвестная функция, которую мы будем считать непрерывной.

Если это специально не оговаривается, все входящие в интегральные уравнения функции предполагаются вещественными. Кроме того, будет кратко рассмотрено обобщение на многомерный случай (важное для курса методов математической физики, который будет читаться в следующем семестре).

2) Уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$\int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x), \; x,s \in [a,b],$$

где, как и выше, $K(x,s)$ – ядро интегрального уравнения, заданная непрерывная по совокупности аргументов функция; $f(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая неоднородностью уравнения (если $f \equiv 0$, то уравнение называется однородным); $y(x)$ – неизвестная непрерывная функция.

3) Уравнение Вольтерра 2-го рода:

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s) y(s) ds + f(x), \; x,s \in [a,b],$$

Здесь использованы те же обозначения, что и для уравнения Фредгольма 2-го рода, $K(x,s)$ – функция, непрерывная по совокупности аргументов в треугольной области $\Delta = (x,s : a \le s \le x \le b)$. Если доопределить нулем $K(x,s)$ вне указанной треугольной области, то можно рассматривать уравнение Вольтерра 2-го рода как частный случай уравнения Фредгольма 2-го рода (возможно с ядром, терпящим разрыв в точках отрезка прямой $x = s$, $x,s \in [a,b]$). Тем не менее, уравнение Вольтерра обладает рядом интересных свойств, благодаря которым мы будем его изучать специально.

4) Уравнение Вольтерра 1-го рода:

$$\int_a^x K(x,s) y(s) ds = f(x), \; x,s \in [a,b],$$

где использованы те же обозначения, что и выше.

Примеры интегральных уравнений, возникающих при исследовании дифференциальных уравнений, будут приведены позже после введения понятий функции Коши и функции Грина в параллельно читаемом курсе обыкновенных дифференциальных уравнений. Очень большое количество интегральных уравнений 1-го рода появляется при рассмотрении так называемых обратных задач, возникающих в физике в тех случаях, когда непосредственное измерение физических характеристик невозможно или, по крайней мере, затруднительно. Например, все суждения об удаленных астрофизических объектах делаются на основании измерений на поверхности Земли или на искусственных спутниках. Аналогично, при геофизических исследованиях проще и дешевле проводить измерения на земной поверхности, чем непосредственное исследование глубоко залегающих объектов. Еще один пример – компьютерная томография, позволяющая производить «неразрушающий контроль» состояния мозга человека.

Некоторые примеры интегральных уравнений встречались в математических курсах и ранее. Например, интегральное уравнение

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(ixs)y(s)ds, \qquad x\in(-\infty,\ +\infty),$$

не являющееся интегральным уравнением Фредгольма, решается с помощью интегрального преобразования Фурье:

$$y(s) = 1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ixs)f(x)dx, s\in(-\infty, +\infty).$$

Сформулируем основные вопросы, которые будут интересовать нас в дальнейшем при исследовании интегральных уравнений и рассмотрим их на примере простейшего уравнения Вольтерра 1-го рода

$$\int_a^x y(s)ds = f(x), x, s\in[a,b].$$

Здесь $K(x,s)\equiv 1$. Будем предполагать, что его решение $y(s)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция.

Во-первых, существование решения. Казалось бы, что решение существует в случае, если $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, и тогда $y(x) = f'(x)$. Однако непрерывной дифференцируемости недостаточно! На самом деле, интеграл в левой части уравнения обращается в нуль при $x = a$. Поэтому для разрешимости нужно потребовать дополнительно выполнение условия $f(a) = 0$.

Во-вторых, нас будет интересовать единственность решения. Очевидно, что при сформулированных выше условиях решение не только существует, но и единственно.

В-третьих, нас будет интересовать вопрос об устойчивости решения, т.е. будут ли изменения решения «малыми» при «малых» изменениях неоднородности $f(x)$. Для того, чтобы говорить о «малости» изменений неоднородности или о близости функций, необходимо сначала познакомиться с некоторыми понятиями теории линейных нормированных пространств.

§2. Метрические, нормированные и евклидовы пространства.

Множество L называется (вещественным) <u>линейным пространством</u>, если для любых двух его элементов x, y определен элемент $x+y\in L$ (называемый суммой x и y), и для любого элемента $x\in L$ и любого (вещественного) числа α определен элемент $\alpha x\in L$, причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y\in L$ $x+y=y+x$ (коммутативность сложения);
2) для любых элементов $x, y, z\in L$ $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность сложения);
3) существует элемент $0\in L$ (называемый нулевым элементом, или нулем пространства L) такой, что для любого элемента $x\in L$ $x+0=x$ (существование нулевого элемента);

4) для любого элемента $x \in L$ существует элемент $(-x) \in L$ (называемый обратным к x) такой, что $x+(-x)=0$ (существование обратного элемента);
5) для любых элементов $x,y \in L$ и любого (вещественного) числа α $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (дистрибутивность умножения суммы элементов на число);
6) для любых (вещественных) чисел α и β и любого элемента $x \in L$ $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (дистрибутивность умножения суммы чисел на элемент);
7) для любых (вещественных) чисел α, β и любого элемента $x \in L$ $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ (ассоциативность умножения на число);
8) для любого элемента $x \in L$ $1x=x$ (свойство единицы).

Элементы линейного пространства называются векторами, поэтому линейное пространство иногда называется векторным.

Элементы линейного пространства L (векторы) $y_1, \ldots, y_n$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация $\alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_n y_n \neq 0$ для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, кроме $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$. Векторы $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависимы в том и только в том случае, когда по крайней мере один из них является линейной комбинацией остальных. Если максимальное число линейно независимых векторов пространства L конечно, то это число называется размерностью пространства L, а само линейное пространство называется конечномерным. В противном случае пространство L бесконечномерно.

В качестве примера линейного пространства можно привести изучаемое в курсе линейной алгебры конечномерное векторное пространство R^n. Еще один пример – пространство (вещественных) функций, определенных на отрезке $[a,b]$. Очевидно, что это пространство можно рассматривать как линейное, если определить сумму элементов и умножение на вещественное число обычным образом (как сумму функций и умножение функции на число). Нулевым элементом этого пространства является функция, тождественно равная нулю.

Подмножество L_1 линейного пространства L называется (линейным) подпространством L, если любая линейная комбинация элементов L_1 принадлежит L_1 (т.е. L_1 само является линейным пространством).

Множество M называется метрическим пространством, если для любых двух его элементов $x, y \in M$ определено вещественное число $\rho(x,y)$ (называемое метрикой, или расстоянием), причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y \in M$ $\rho(x,y) \geq 0$, и $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда элементы x и y совпадают $(x=y)$ (неотрицательность метрики);
2) для любых элементов $x, y \in M$ $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (симметричность метрики);
3) для любых элементов $x, y, z \in M$ $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

В метрическом пространстве можно определить понятие сходимости последовательности элементов. А именно, последовательность элементов $x_n \in M$, $n=1, 2, \ldots$, сходится к элементу $x_0 \in M$ (обозначается $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$), если $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что метрическое пространство не обязательно является линейным.

Линейное пространство N называется нормированным, если для любого элемента $x \in N$ определено вещественное число $\|x\|$ (называемое нормой), причем выполнены следующие условия:

1) для любого элемента $x \in N$ $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\|=0$ тогда и только тогда, если $x=0$;
2) для любого элемента $x \in N$ и любого (вещественного) числа α имеет место $\|\alpha x\|=|\alpha| \cdot \|x\|$ (неотрицательная однородность нормы);
3) для любых элементов $x, y \in N$ верно $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника).

Нормированное пространство является метрическим, если положить $\rho(x,y)=\|x-y\|$.

В нормированном и метрическом пространствах можно ввести понятия открытого и замкнутого множества. В качестве упражнения предлагаем читателю сформулировать эти определения самостоятельно, аналогично тому, как это было сделано в курсе математического анализа.

Введем понятие сходимости последовательности в нормированном пространстве. Последовательность элементов $x_n \in N$, $n=1,2,3,...$ сходится (по норме пространства N) к элементу $x_0 \in N$ (обозначается $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$), если $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Докажем теперь, что из сходимости по норме следует сходимость норм элементов последовательности к норме предельного элемента. Заметим сразу, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно (приведите пример).

Лемма. Если $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Доказательство. Докажем сначала, что для любых элементов $x,\ y \in N$ справедливо неравенство $\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\|$.

Действительно, из неравенства треугольника следует $\|x\| = \|x-y+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$, откуда $\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$. Меняя местами x и y, получаем $\|y\| = \|y-x+x\| \le \|y-x\| + \|x\|$, или $\|y\| - \|x\| \le \|x-y\|$. Из этих двух неравенств вытекает, что $\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\|$.

Пусть теперь $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Тогда $\big|\|x_n\|-\|x_0\|\big| \le \|x_n - x_0\| \to 0$, из чего и следует утверждение леммы.

Примеры нормированных пространств.

1) Конечномерное евклидово пространство R^n, изучавшееся в курсе линейной алгебры.
2) Пространство $C[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Норма в пространстве $C[a,b]$ определяется так: $\|y\|_{C[a,b]} = \max\limits_{s\in[a,b]} |y(s)|$. В качестве упражнения предлагаем читателю самостоятельно проверить выполнение аксиом линейного пространства и доказать корректность указанного определения нормы в $C[a,b]$.

Сходимость по норме пространства $C[a,b]$ называется равномерной сходимостью. Свойства равномерно сходящихся последовательностей непрерывных функций изучались в курсе математического анализа. В частности, был доказан критерий Коши равномерной сходимости, а именно, необходимым и достаточным условие равномерной сходимости функциональной последовательности является ее фундаментальность.

Определение. Последовательность x_n, $n=1,2,3,...$ элементов нормированного пространства N называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K такой, что для любого $n > K$ и любого натурального p выполнено $\|x_{n+p} - x_n\| \le \varepsilon$.

Если последовательность сходится, то она фундаментальна. Доказательство этого факта практически дословно повторяет доказательство аналогичного факта из курса математического анализа и предоставляется читателю.

Если же любая фундаментальная последовательность сходится, то нормированное пространство называется полным.

Определение. Полное нормированное пространство называется банаховым.

Поскольку в курсе математического анализа было доказано, что критерий Коши является не только необходимым, но и достаточным условием равномерной сходимости, то, тем самым, было доказано, что пространство $C[a,b]$ является банаховым. Очевидно, свойством полноты обладает и пространство R^n (докажите это самостоятельно).

В дальнейшем нам потребуется также пространство функций, непрерывных с производными до p-го порядка включительно на сегменте $[a,b]$, сходимость в котором является равномерной со всеми производными до p-го порядка ($p \geq 0$ - целое число). Такое пространство обозначается $C^{(p)}[a,b]$ (очевидно, $C^{(0)}[a,b] = C[a,b]$). Можно ввести много различных норм в этом пространстве, порождающих указанный выше тип сходимости. Из всех таких (эквивалентных) норм для нас удобнее всего будет следующая:

$$\| y \|_{C^{(p)}[a,b]} = \sum_{k=0}^{p} \max_{s\in[a,b]} | y^{(k)}(s) | .$$

В качестве упражнения предлагаем проверить корректность указанного определения нормы и доказать, что пространство $C^{(p)}[a,b]$ является банаховым.

Определение. Линейное пространство E называется евклидовым, если для любых двух элементов $x,\, y \in E$ определено вещественное число (x, y), называемое скалярным произведением, причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x,\, y \in E$ верно $(x, y) = (y, x)$ (симметричность);
2) для любых элементов $x_1,\, x_2,\, y \in E$ выполняется равенство $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (аддитивность по первому аргументу);
3) для любых элементов $x,\, y \in E$ и любого вещественного числа α имеет место $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ (однородность по первому аргументу).

Заметим, что в силу условий 1)-3) скалярное произведение обладает свойством линейности как по первому, так и по второму аргументу.

4) для любого $x \in E$ выполнено неравенство $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, если $x = 0$ (неотрицательность скалярного квадрата).

Скалярное произведение порождает норму: $\| x \|_E = \sqrt{(x, x)}$. Проверьте самостоятельно справедливость аксиом нормы при таком ее определении.

В курсе линейной алгебры было доказано неравенство Коши-Буняковского: $|(x, y)| \leq \| x \| \cdot \| y \|$, где равенство выполняется в том и только том случае, когда элементы x и y линейно зависимы. Аналогично доказывается, что неравенство Коши-Буняковского справедливо в любом евклидовом пространстве.

Примером конечномерного евклидова пространства является пространство n-мерных векторов R^n, изучавшееся в курсе линейной алгебры. Это пространство состоит из векторов-столбцов, а скалярное произведение в нем определяется как $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - компоненты векторов x и y соответственно. Отметим еще раз, что пространство R^n является полным.

Еще один пример евклидова, но уже бесконечномерного пространства встречался в курсе математического анализа. А именно, рассмотрим снова линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, но введем норму с помощью скалярного произведения, а именно для любых непрерывных на $[a,b]$ функций $y_1(s),\ y_2(s)$ положим

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(s) y_2(s)\, ds.$$

Проверьте самостоятельно корректность такого определения, т.е. справедливость аксиом скалярного произведения.

Пространство непрерывных функций с нормой, порожденной введенным скалярным произведением, обозначим $h[a,b]$. Итак,

$$\| y \|_{h[a,b]} = \sqrt{\int_a^b y^2(s)\, ds} .$$

Сходимость по норме $h[a,b]$ называется сходимостью в среднем. В курсе математического анализа было доказано, что из равномерной сходимости следует сходимость в среднем. Из сходимости же в среднем не следует не только равномерная, но даже поточечная сходимость (рекомендуем построить соответствующий пример).

Очевидно, что евклидово пространство $h[a,b]$ является бесконечномерным (приведите пример бесконечной последовательности линейно независимых непрерывных на $[a,b]$ функций). К сожалению, это пространство не является полным. На самом деле, легко построить последовательность функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ (например, кусочно-линейных), которая сходится в среднем к разрывной функции

$$y(x)=\left[\begin{array}{ll} 0, \text{ при } & x\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right) \\ 1, \text{ при } & x\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right] \end{array}\right.$$

В качестве упражнения докажите, что такая функциональная последовательность является фундаментальной в $h[a,b]$, но не имеет предела в $h[a,b]$.

В курсе функционального анализа доказывается, что любое неполное нормированное пространство можно пополнить. Полное бесконечномерное евклидово пространство называется гильбертовым. Если пополнить пространство $h[a,b]$, то мы получим гильбертово пространство $L_2[a,b]$. Однако для того, чтобы описать, из каких элементов состоит это пространство, нужно знать не только интеграл Римана (который изучался в курсе математического анализа), но и интеграл Лебега. При изложении курса интегральных уравнений мы будем рассматривать пространство $h[a,b]$, понимая, что это пространство неполно. Но в этом пространстве легко определить, что такое ортогональность, поскольку в этом пространстве задано скалярное произведение.

Если же нам потребуется свойство полноты пространства, то будем рассматривать пространство $C[a,b]$. К сожалению, (и это доказывается в курсе функционального анализа) в пространстве $C[a,b]$ нельзя ввести эквивалентную норму, порожденную скалярным произведением, превратив таким образом это пространство в гильбертово, но сохранив в качестве сходимости по норме равномерную сходимость.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Записать уравнение Фредгольма 2-го рода. Какое уравнение называется однородным?
2. Записать уравнение Вольтерра 2-го рода. Какое уравнение называется однородным?
3. Записать уравнение Фредгольма 1-го рода. Какое уравнение называется однородным?
4. Записать уравнение Вольтерра 1-го рода. Какое уравнение называется однородным?
5. Сформулировать определение линейного пространства.
6. Сформулировать определение метрического пространства.
7. Сформулировать определение нормированного пространства.
8. Сформулировать определение евклидова пространства.
9. Сформулировать определение сходимости последовательности элементов метрического пространства.
10. Сформулировать определение сходимости последовательности элементов нормированного пространства.
11. Сформулировать определение фундаментальной последовательности элементов нормированного пространства.
12. Сформулировать определение банахова пространства.
13. Сформулировать определение пространства $C[a,b]$. Как называется сходимость по норме этого пространства?
14. Сформулировать определение пространства $C^{(p)}[a,b]$. Как называется сходимость по норме этого пространства?
15. Как определяется скалярное произведение в пространстве $h[a,b]$? Почему это пространство является бесконечномерным евклидовым пространством? Как называется сходимость по норме этого пространства?
16. Записать неравенство Коши-Буняковского.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что для любых двух элементов x, y нормированного пространства N справедливо неравенство: $\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|$.
2. Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится, то эта последовательность является фундаментальной. В каких нормированных пространствах справедливо и обратное утверждение.
3. Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится, то эта последовательность ограничена.
4. Построить пример, показывающий, что из сходимости в среднем на отрезке *[a,b]* функциональной последовательности не следует равномерная (и даже поточечная) сходимость.
5. Доказать, что пространство $C[a,b]$ является линейным.
6. Записать определение нормы в пространстве $C[a,b]$. Доказать корректность этого определения.
7. Доказать, что пространство $C^{(p)}[a,b]$ является линейным.
8. Записать определение нормы в пространстве $C^{(p)}[a,b]$. Доказать корректность этого определения.
9. Доказать, что пространство $h[a,b]$ является линейным.
10. Записать определение нормы в пространстве $h[a,b]$. Доказать корректность этого определения.
11. Доказать, что пространство $h[a,b]$ не является полным.
12. Доказать неравенство Коши-Буняковского для пространства $h[a,b]$.

Лекция №2

§3. Элементы теории линейных операторов.

Перейдем теперь к определению линейного оператора. Оператор A, действующий из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 называется линейным, если для любых элементов y_1 и y_2 из L_1 и любых вещественных чисел α_1 и α_2 выполнено равенство $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A y_1 + \alpha_2 A y_2$.

Будем обозначать область определения оператора A как $D(A)$. Для простоты будем считать $D(A) = L_1$. Множество значений оператора A обозначим $R(A)$. В данном случае $R(A) \subseteq L_2$ - линейное подпространство пространства L_2.

Будем называть нуль-пространством оператора A множество $Ker\, A = \{x \in L_1 : \; Ax = 0\}$. Очевидно, что $Ker\, A$ – линейное подпространство L_1, причем $0 \in Ker\, A$. Если $Ker\, A \neq \{0\}$ (в этом случае говорят, что нуль-пространство нетривиально), то оператор A называется вырожденным.

Если оператор A взаимно однозначный, то можно ввести обратный оператор A^{-1} с областью определения $D(A^{-1}) = R(A)$ и множеством значений $R(A^{-1}) = D(A) = L_1$. Для линейного оператора вопрос о существовании обратного решается следующим образом: обратный оператор существует тогда и только тогда, когда оператор A не является вырожденным (докажите это самостоятельно).

В качестве основного примера линейного оператора рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Ay \equiv \int_a^b K(x,s) y(s) ds, \qquad x, s \in [a,b].$$

Если ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности аргументов, что мы будем предполагать в течение всего курса, то в соответствии с теоремой о непрерывной зависимости от параметра собственного интеграла, доказанной в курсе математического анализа, оператор A действует в линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ и, очевидно, является линейным.

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные операторы, действующие в нормированных пространствах. Пусть оператор A отображает нормированное пространство N_1 в нормированное пространство N_2 (для простоты будем считать, что $D(A) = N_1$).

Определение А. Оператор A называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $y \in D(A)$ и удовлетворяющих неравенству $\| y - y_0 \| \le \delta$ выполняется неравенство $\| Ay - Ay_0 \| \le \varepsilon$.

Как и в курсе математического анализа можно сформулировать второе определение непрерывности оператора в точке.

Определение Б. Оператор A называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A)$, если для любой последовательности $y_n \in D(A),\; n = 1,2,3,\ldots,\; y_n \to y_0$, последовательность Ay_n сходится к Ay_0.

Доказательство эквивалентности этих определений практически дословно повторяет аналогичное из курса математического анализа и предоставляется читателю.

Оператор A называется непрерывным на множестве $D(A)$ (на пространстве N_1), если он непрерывен в каждой точке этого множества. Оказывается, что линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле. В самом деле, если $y_n \to y_0$, то $y_n - y_0 \to 0$, а из линейности оператора вытекает, что $Ay_n \to Ay_0$ тогда и только тогда, когда $A(y_n - y_0) \to 0$.

Определение. Нормой оператора A называется

$$\|A\|_{N_1 \to N_2} = \sup_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2}$$

Если это не будет вызывать разночтений, то для сокращения записи будем обозначать $\|A\|_{N_1 \to N_2} = \|A\|$.

Если $\|A\| < +\infty$, то оператор A называется ограниченным. Докажите самостоятельно, что в конечномерных пространствах любой линейный оператор является ограниченным.

Пример линейного неограниченного оператора. Рассмотрим пространство $C[0,1]$, которое, очевидно, является бесконечномерным пространством, и оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{ds}$, определенный на линейном подпространстве непрерывно дифференцируемых функций из $C[0,1]$.

Покажем, что A - неограниченный линейный оператор. Возьмем последовательность функций $y_n = \cos ns$. Тогда $\|y_n\| = \max\limits_{s\in[0,1]} |\cos\ ns| = 1$, но $\|Ay_n(s)\| = \|n \cdot \sin\ ns\| \to \infty$ при $n \to \infty$, что противоречит определению ограниченного оператора.

Теорема. Для любого $y \in N_1$ выполнено неравенство $\|Ay\| \le \|A\| \|y\|$, где A – линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

Доказательство. 1). Для $y = 0$ (нулевой элемент пространства) теорема верна, так как $\|Ay\| = \|A0\| = 0 = \|A\| \cdot \|y\| = \|A\| \cdot 0$.

2). Рассмотрим теперь случай $y \ne 0$. Возьмем элемент $z = \dfrac{y}{\|y\|}$ - единичный вектор, т.к. $\|z\| = 1$. Тогда $\|Az\| = \left\| A \dfrac{y}{\|y\|} \right\| \le \|A\|$, из чего и следует утверждение теоремы.

Теорема. Линейный оператор $A : N_1 \to N_2$ является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен.

Доказательство. Поскольку оператор A линейный мы будем исследовать непрерывность только в точке *0*.

1) Докажем, что из ограниченности следует непрерывность. Возьмем последовательность $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\|Ay_n\| \le \|A\| \cdot \|y_n\| \to 0$ и, следовательно, оператор A является непрерывным.

2) Докажем, что из непрерывности следует ограниченность. Предположим, что оператор A неограниченный. Тогда существует последовательность y_n, $n = 1,2,3,...$ такая, что $\|y_n\| = 1$, а $\|Ay_n\| \ge n$. Следовательно, при $n \to \infty$ имеем $\left\| \dfrac{Ay_n}{n} \right\| \ge 1$, в то время как $\dfrac{y_n}{n} \to 0$, что противоречит определению непрерывности оператора *A*.

Покажем теперь, что интегральный оператор Фредгольма $Ay \equiv \int_a^b K(x,s)\cdot y(s)\,ds$, $x \in [a,b]$, является ограниченным из $h[a,b]$ в $h[a,b]$. Действительно, пусть $\|y\| = \sqrt{\int_a^b y^2(s)\,ds} = 1$ и $z = Ay$, тогда $|z(x)|^2 = |Ay|^2 = \left|\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds\right|^2$.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что для каждого фиксированного $x \in [a,b]$ верно $\left|\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds\right|^2 \le \int_a^b K^2(x,s)\,ds \cdot \int_a^b y^2(s)\,ds = \int_a^b K^2(x,s)\,ds.$

Интегрируя по x, получим $\|Ay\|^2 \le \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,dx\,ds$. Поскольку правая часть неравенства не зависит от y, то

$$\|A\| \le \sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,dx\,ds} < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Докажите самостоятельно, что интегральный оператор Фредгольма является ограниченным также и при действии из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, из $h[a,b]$ в $C[a,b]$ и из $C[a,b]$ в $h[a,b]$. Найдите оценки сверху для нормы оператора в каждом из этих случаев.

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма. Пусть линейный ограниченный оператор A действует из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2, а линейный ограниченный оператор B действует из нормированного пространства N_2 в нормированное пространство N_3.

Тогда $\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|$.

Доказательство. Для любого элемента $y \in N_1$ такого, что $\|y\| = 1$, имеет место неравенство $\|BAy\| \le \|B\| \cdot \|Ay\| \le \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|y\| = \|B\| \cdot \|A\|$. Отсюда, с учетом определения нормы линейного оператора следует утверждение леммы.

Определение. Последовательность y_n, $n = 1,2,3,...$ элементов нормированного пространства N называется ограниченной, если существует константа C такая, что $\|y_n\| \le C$ для всех $n = 1,2,3,...$.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной, и любая фундаментальная последовательность также является ограниченной.

Определение. Последовательность y_n, $n = 1,2,3,...$ элементов нормированного пространства N, обладающая тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся, называется компактной.

Легко доказать, что любая компактная последовательность является ограниченной. На самом деле, если последовательность y_n, $n = 1,2,3,...$ не является ограниченной, то найдется подпоследовательность y_{n_k} такая, что $\|y_{n_k}\| \ge k$, $k = 1,2,...$, из которой нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

Замечание. В пространстве R^1 критерий компактности последовательности определяется теоремой Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Аналогичное утверждение имеет место и в пространстве R^n. Для бесконечномерных пространств это не так.

Примеры некомпактных последовательностей.

1) Последовательности вещественных чисел $x_n = n, \quad n = 1, 2, 3, ...$ является некомпактной, так как ясно, что из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.
2) Числовая последовательность 1, 1, 2, 1, 3, 1, … также некомпактна. Несмотря на то, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, однако нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность из *любой ее подпоследовательности*.

Примеры ограниченных некомпактных последовательностей в бесконечномерном пространстве.
3) Рассмотрим пространство $h[a,b]$. В курсе математического анализа было доказано существование в $h[a,b]$ ортонормированной системы, состоящей из бесконечного числа элементов (например, тригонометрической системы функций):

$$e_n, \ n = 1,2,... \ , \ \left\| e_j \right\| = 1, \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \ i \neq j \\ 1, \ i = j \end{cases}.$$

Покажем, что из последовательности членов ортонормированной системы (эта последовательность, очевидно, является ограниченной) нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. В самом деле, $\left\| e_i - e_j \right\|^2 = (e_i - e_j, e_i - e_j) = 2, \quad i \neq j$ $\Rightarrow \left\| e_i - e_j \right\| = \sqrt{2}$, если $i \neq j$. Поэтому никакая подпоследовательность этой последовательности не может быть фундаментальной, а, следовательно, и сходящейся.
4) Рассмотрим теперь последовательность $e_1, c, e_2, c, e_3, c, ...$ (c – фиксированный вектор из $h[a,b]$). Эта последовательность также некомпактна – из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, но нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность из любой ее подпоследовательности.

В качестве упражнения постройте самостоятельно пример ограниченной, но некомпактной последовательности элементов пространства $C[a,b]$.

Сформулируем теперь определение вполне непрерывного линейного оператора, действующего из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

Определение. Линейный оператор A называется вполне непрерывным, если для любой ограниченной последовательности элементов y_n из N_1 последовательность $z_n = Ay_n$ элементов N_2 такова, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Таким образом, вполне непрерывный оператор преобразует любую ограниченную последовательность в компактную.

Теорема. Вполне непрерывный оператор является ограниченным (а, следовательно, непрерывным).

Доказательство. Предположим, что вполне непрерывный оператор A не является ограниченным. Тогда найдется последовательность $y_n \in N_1, \ n = 1, 2, 3, ... , \quad \left\| y_n \right\| = 1$, такая, что $\left\| Ay_n \right\| \geq n$. Но тогда из последовательности $z_n = Ay_n$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, что противоречит тому, что A – вполне непрерывный оператор.

Заметим, что не любой непрерывный линейный оператор является вполне непрерывным.

Пример. Рассмотрим единичный оператор $I : h[a,b] \to h[a,b]$, т.е. такой, что $Iy = y$ для любого $y \in h[a,b]$. Очевидно, указанный оператор является ограниченным.

Докажем, что он не является вполне непрерывным. Для этого достаточно рассмотреть последовательность членов ортонормированной системы из разобранного выше примера 3) и заметить, что последовательность $Ie_n = e_n$ некомпактна.

Теорема. Пусть A - оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$. Тогда A - вполне непрерывный оператор.

Доказательство. Докажем сначала, что A - вполне непрерывный оператор при действии $h[a,b]\to C[a,b]$.

Критерий компактности последовательности элементов пространства $C[a,b]$ определяется теоремой Арцела, доказанной в курсе математического анализа: если последовательность элементов $C[a,b]$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, то из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Рассмотрим последовательность $y_n \in h[a,b]$ такую, что $\|y_n\| \le M$, $n=1,2,3,\ldots$, и последовательность $z_n(x) = Ay_n = \int_a^b K(x,\ s)\cdot y_n(s)\,ds$. Доказательство сформулированной нами теоремы состоит в проверке условий теоремы Арцела, т.е. нужно показать, что последовательность $z_n(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна.

1) Докажем сначала равномерную ограниченность. Обозначим $K_0 = \sup\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$. Поскольку функция $K(x,s)$ непрерывна по совокупности аргументов $x,\ s$ на замкнутом ограниченном множестве (квадрате) $[a,b]\times[a,b]$, то $K_0 < +\infty$. Более того, $K_0 = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$. Тогда

$$|z_n(x)| = \left|\int_a^b K(x,s)\,y_n(s)\,ds\right| \le \sqrt{\underbrace{\int_a^b K^2(x,s)\,ds}_{\le K_o^2\cdot(b-a)}\cdot\underbrace{\int_a^b y_n^2(s)\,ds}_{\le M^2}} \le M\cdot K_0\cdot\sqrt{b-a}$$

для всех $x\in[a,b]$ и всех $n=1,2,3,\ldots$, а это и есть равномерная ограниченность.

2) Докажем теперь равностепенную непрерывность последовательности $z_n(x)$. Выберем произвольные точки $x_1, x_2 \in [a,b]$. Имеем

$$|z_n(x_1)-z_n(x_2)| = \left|\int_a^b [K(x_1,s)-K(x_2,s)]\cdot y_n(s)\,ds\right| \le \sqrt{\int_a^b [\ K(x_1,s)-K(x_2,s)]^2\,ds\ \cdot\ \int_a^b y_n^2(s)\,ds}\ .$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Функция $K(x,s)$ непрерывна по совокупности аргументов $x,\ s$ на замкнутом ограниченном множестве $[a,b]\times[a,b]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на этом множестве. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех $s\in[a,b]$ имеет место оценка $|K(x_1,s)-K(x_2,s)| \le \dfrac{\varepsilon}{M\sqrt{b-a}}$, если $|x_1-x_2|\le\delta$. Тем самым, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $|z_n(x_1)-z_n(x_2)|\le\varepsilon$ для всех $n=1,2,3,\ldots$ и всех $x_1,x_2\in[a,b]$, удовлетворяющих условию $|x_1-x_2|\le\delta$, т.е. последовательность $z_n(x)$ равностепенно непрерывна.

Итак, последовательность функций $z_n(x)$, непрерывных на сегменте $[a,b]$, равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Согласно теореме Арцела, из последовательности $z_n(x)$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность непрерывных функций которая, как было доказано в курсе математического анализа, сходится к непрерывной функции.

Очевидно, что этим же свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности $z_n(x)$, т.е. из любой из них можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, оператор A является вполне непрерывным при действии $h[a,b]\to C[a,b]$. Но, т.к. из равномерной сходимости следует сходимость в среднем, то та же самая подпоследовательность непрерывных функций, которая сходится равномерно к некоторой непрерывной функции, сходится и в среднем к той же функции. Тем самым, оператор Фредгольма является вполне непрерывным и при действии $h[a,b] \to h[a,b]$. Теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуется аналогичное утверждение и для интегрального оператора типа Вольтерра. Читателям предлагается доказать его самостоятельно.

Пусть линейный оператор A действует $A: E \to E$ (E - бесконечномерное евклидово пространство).

Определение. Оператор $A^*: E \to E$ будем называть сопряженным к оператору A, если для любых y_1, $y_2 \in E$ имеет место $(Ay_1, y_2) = (y_1, A^* y_2)$.

В качестве упражнения докажите, что A^* также является линейным оператором.

Пусть A - ограниченный оператор. Покажем, что $\|A\| = \|A^*\|$. Пусть y - любой элемент из E такой, что $\|y\| = 1$. Тогда

$$\|Ay\|^2 = (Ay, Ay) = (A^* Ay, y) \le \|A^* Ay\| \cdot \|y\| \le \|A^*\| \cdot \|Ay\| \le \|A^*\| \cdot \|A\| \cdot \|y\| = \|A^*\| \|A\|.$$

Поэтому для любого $y \in E$, такого, что $\|y\| = 1$, выполнено неравенство $\|Ay\|^2 \le \|A^*\| \cdot \|A\|$. Отсюда $\|A\|^2 \le \|A^*\| \cdot \|A\|$.

Проведя аналогичные рассуждения для оператора A^*, получим $\|A^*\|^2 \le \|A^*\| \cdot \|A\|$. Из этих двух неравенств получаем, что $\|A\| = \|A^*\|$.

Определение. Если $A = A^*$, то оператор A называется самосопряженным (или симметрическим).

Рассмотрим оператор Фредгольма $Ay \equiv \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$, действующий из $E = h[a,b]$ в $E = h[a,b]$. Для любых y_1, $y_2 \in E$ имеем

$$(Ay_1, y_2) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,s)\, y_1(s)\, ds \right) y_2(x)\; dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,s)\, y_2(x)\, dx \right) y_1(s)\; ds = (y_1, A^* y_2).$$

В то же время $(y_1, A^* y_2) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K^*(s,x)\, y_2(x)\, dx \right) y_1(s)\, ds$, поэтому $K^*(s,x) = K(x,s)$.

Итак, A^*- оператор, сопряженный к оператору Фредгольма с ядром $K(x,s)$, также является оператором Фредгольма с ядром $K^*(x,s) = K(s,x)$, $x, s \in [a,b]$.

Если $K(x,s) = K(s,x)$ для любых $x, s \in [a,b]$, то ядро $K(x,s)$ называется симметрическим. В этом случае интегральный оператор является самосопряженным (при действии из E в E). Докажите сами, что если ядро интегрального оператора не является симметрическим, то оператор не является самосопряженным. Напомним, что ядра рассматриваемых нами интегральных операторов непрерывны по совокупности аргументов.

<u>Экзаменационные вопросы</u>

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение линейного оператора.
2. Сформулировать два определения непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.
3. Сформулировать определение нормы линейного оператора, действующего в нормированных пространствах.
4. Сформулировать определение ограниченного линейного оператора.
5. Сформулировать определение ограниченной последовательности элементов нормированного пространства.
6. Сформулировать определение компактной последовательности элементов нормированного пространства.
7. Сформулировать определение вполне непрерывного оператора.
8. Сформулировать необходимое и достаточное условие компактности последовательности векторов конечномерного евклидового пространства R^n.
9. Сформулировать теорему Арцела.
10. Сформулировать определение оператора, сопряженного к линейному оператору, действующему в евклидовом пространстве.
11. Сформулировать определение самосопряженного (симметрического) оператора, действующего в евклидовом пространстве.
12. Сформулировать определение интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что оператор, обратный к линейному оператору, является линейным оператором.
2. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма отображает линейное пространство $h[a,b]$ в себя и является линейным оператором.
3. Доказать, что интегральный оператор Вольтерра отображает линейное пространство $h[a,b]$ в себя и является линейным оператором.
4. Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле.
5. Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.
6. Доказать эквивалентность двух определений непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.
7. Доказать, что оператор дифференцирования, действующий из $C^{(1)}[a,b]$ в $C[a,b]$, является ограниченным.
8. Доказать, что оператор дифференцирования, определенный на подпространстве непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a,b]$ и действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, является неограниченным.
9. Доказать, что если A - линейный ограниченный оператор, $A: N_1 \to N_2$, N_1 и N_2 – нормированные пространства, $A \neq 0$, то $\|A\| > 0$.
10. Доказать, что для любого $y \in N_1$ выполнено неравенство $\| Ay \| \leq \| A \| \| y \|$, где A – линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

11. Доказать, что если $B: N_2 \to N_3$ является непрерывным оператором, а оператор $A: N_1 \to N_2$ – вполне непрерывный, то $BA: N_1 \to N_3$ – вполне непрерывный оператор (N_1, N_2, N_3 – нормированные пространства).
12. Доказать следующее утверждение: пусть линейный ограниченный оператор A действует из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2, линейный ограниченный оператор B действует из нормированного пространства N_2 в нормированное пространство N_3. Тогда $\| BA \| \le \| B \| \cdot \| A \|$.
13. Построить пример бесконечной ортонормированной системы в пространстве $h[a,b]$.
14. Доказать существование ограниченных некомпактных последовательностей в пространстве $h[a,b]$.
15. Доказать, что если взаимно однозначный оператор, действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, является вполне непрерывным, то обратный оператор неограничен.
16. Доказать, что единичный оператор, действующий в пространстве $h[a,b]$, не является вполне непрерывным.
17. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, ограничен, и найти оценку сверху нормы оператора.
18. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, ограничен, и найти оценку сверху нормы оператора.
19. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $C[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.
20. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.
21. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с симметрическим ядром, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, является самосопряженным оператором.

<u>Лекция №3</u>

§4. Существование собственного значения вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве L. Число Λ называется <u>собственным значением</u> оператора A, если существует элемент $y \neq 0$ такой, что $Ay = \Lambda y$. Элемент y называется <u>собственным вектором</u>. Множество собственных векторов, соответствующих собственному значению Λ, является подпространством пространства L (докажите это самостоятельно).

Если $\Lambda \neq 0$, то число $\lambda = \dfrac{1}{\Lambda}$ называется <u>характеристическим</u> числом оператора A.

Пусть выполнены следующие условия для оператора A:

1) $A: E \to E$ (E – бесконечномерное евклидово пространство, например, $h[a,b]$);
2) $A = A^*$;
3) A – вполне непрерывный оператор.

Далее будет показано, что при этих условиях оператор A имеет по крайней мере одно собственное значение.

Предварительно сформулируем и докажем ряд утверждений, из которых и будет следовать этот важный результат.

Лемма 1. Пусть A - самосопряженный оператор, и e – произвольный элемент пространства E такой, что $\|e\| = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\|Ae\|^2 \leq \|A^2 e\|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда e является собственным вектором оператора A^2, отвечающим собственному значению $\Lambda = \|Ae\|^2$.

<u>Доказательство</u>. Из неравенства Коши-Буняковского легко получить

$$\|Ae\|^2 = (Ae, Ae) = \left(A^2 e, e\right) \leq \|A^2 e\| \cdot \|e\| = \|A^2 e\|,$$

причем знак равенства возможен тогда и только тогда, когда элементы $A^2 e$ и e линейно зависимы, т.е. $A^2 e = \Lambda e$. Итак, e – собственный вектор оператора A^2.

Для того чтобы найти Λ, умножим равенство $A^2 e = \Lambda e$ скалярно на e. Учитывая, что $\left(A^2 e, e\right) = (Ae, Ae) = \|Ae\|^2$ и $\|e\| = 1$, получим, что $\Lambda = \|Ae\|^2$.

Пусть теперь e – собственный вектор оператора A^2, соответствующий собственному значению $\Lambda = \|Ae\|^2$. Тогда $A^2 e = \|Ae\|^2 e$ и $\|A^2 e\| = \|Ae\|^2$. Лемма 1 доказана.

Определение. Элемент e называется <u>максимальным элементом</u> (<u>вектором</u>) оператора A, если $\|e\| = 1$ и $\|Ae\| = \|A\|$.

Как было доказано в предыдущем в параграфе, вполне непрерывный оператор является ограниченным.

Лемма 2. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A обладает максимальным вектором.

<u>Доказательство</u>. Обозначим $\|A\| = M$. По определению нормы оператора существует последовательность y_n, $\|y_n\| = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, такая, что $z_n = Ay_n$ обладает свойством $\|z_n\| \to \|A\| = M$. Так как последовательность y_n ограничена, и оператор A – вполне непрерывный, то из последовательности z_n можно выделить сходящуюся

подпоследовательность $z_{n_k} \to z \in E$. Переобозначим $z_{n_k} = z_n$. Из сходимости $z_n \to z$ при $n \to \infty$ следует, что $\|z_n\| \to \|z\| = M$.

Покажем, что элемент $\tilde{z} = \dfrac{z}{M}$ является максимальным вектором оператора A. Рассмотрим последовательность $\tilde{z}_n = \dfrac{z_n}{M}$. На основании леммы 1 имеем

$$\|A\tilde{z}_n\| = \left\|\frac{Az_n}{M}\right\| = \frac{1}{M}\|A^2 y_n\| \ge \frac{1}{M}\|Ay_n\|^2 = \frac{1}{M}\|z_n\|^2.$$

С другой стороны, $\|A\tilde{z}_n\| \le \|A\|\|\tilde{z}_n\| = \|A\|\left\|\dfrac{z_n}{M}\right\| = \|z_n\|$, и этих двух неравенств вытекает

$$\frac{\|z_n\|^2}{M} \le \|A\tilde{z}_n\| \le \|z_n\|.$$

Поскольку $\tilde{z}_n \to \tilde{z}$ и $\|z_n\| \to M$ то, переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем соотношении, получим $M \le \|A\tilde{z}\| \le M$, или $\|A\tilde{z}\| = M$, т.е. $\tilde{z} = \dfrac{z}{M}$ является максимальным вектором для оператора A.

Лемма 3. Если z - максимальный вектор самосопряженного оператора A, то z - собственный вектор оператора A^2, соответствующий собственному значению $\Lambda = \|A\|^2 = M^2$.

<u>Доказательство</u>. Из определения максимального вектора следует

$$M^2 = \|A\|^2 = \|Az\|^2 \le \|A^2 z\| \le \|A^2\|\|z\| = \|A^2\| \le \| A \|^2 = M^2,$$

т.е. $\|Az\|^2 = \|A^2 z\|$. Отсюда, согласно лемме 1, следует, что z - собственный вектор оператора A^2, соответствующий собственному значению $\Lambda = \|Az\|^2 = \|A\|^2 = M^2$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. Если оператор A^2 обладает собственным вектором z, соответствующим собственному значению M^2, то оператор A имеет собственный вектор, отвечающий собственному значению M или $-M$.

<u>Доказательство</u>. Так как z – собственный вектор оператора A^2, то $z \ne 0$ и $A^2 z = M^2 z$. Перепишем это равенство в виде $(A^2 - M^2 I)\, z = 0$, где I – единичный оператор, или $(A - MI)(A + MI)\, z = 0$.

Возможны два случая. Пусть сначала $u = (A + MI)\, z \ne 0$. Тогда $(A - MI)\, u = 0$ или $Au = Mu$, т.е. u – собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению M.

Если же $u = (A + MI)z = 0$, то z – собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению $-M$.

Теорема. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A, действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, обладает собственным вектором, соответствующим собственному значению Λ, причем $|\Lambda| = \|A\|$.

<u>Доказательство</u>. Согласно лемме 2 оператор A обладает максимальным вектором z. Лемма 3 утверждает, что этот вектор z является собственным вектором оператора A^2, соответствующим собственному значению $\|A\|^2$, а из леммы 4 следует, что оператор A имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению $\|A\|$ или $-\|A\|$, т.е. $|\Lambda| = \|A\|$. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема, вообще говоря, не верна, если отказаться от условий самосопряженности или вполне непрерывности оператора.

Пример. Вполне непрерывный оператор, который не имеет ни одного собственного значения, это, например, невырожденный оператор Вольтерра с непрерывным ядром. Этот результат мы получим позднее.

Пример. Рассмотрим оператор умножения на x, а именно такой, что для любого элемента y из $h[a,b]$ (непрерывной функции $y(x)$) $Ay = x\cdot y(x)$ Оператор A самосопряженный, т.к. для любых $y_1(x)$, $y_2(x)$ из $h[a,b]$ верно

$$(Ay_1, y_2) = \int_a^b x y_1(x)\, y_2(x)\, dx = \int_a^b y_1(x)\, x\, y_2(x)\, dx = (y_1, Ay_2).$$

Оператор A не имеет собственных значений, т.к. если Λ - его собственное значение, то $x\cdot y(x) = \Lambda\, y(x)$, из чего следует, что $y(x)\equiv 0$ при $x\in[a,b]$, а это противоречит определению собственного вектора.

Рассмотрим теперь оператор Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$, действующий $h[a,b]\to h[a,b]$. Пусть ядро $K(x,s)$ оператора удовлетворяет следующим условиям:

1) вещественное,
2) непрерывное по совокупности переменных (x,s),
3) не равное тождественно нулю,
4) симметрическое.

Теорема. Пусть выполнены условия 1)-4) для ядра интегрального оператора Фредгольма $A: h[a,b]\to h[a,b]$. Тогда этот оператор обладает собственным значением Λ, $\Lambda\neq 0$: $Ay = \Lambda y$, $y\neq 0$, $y\in h[a,b]$.

Замечание. В теории интегральных уравнений удобнее использовать характеристические числа, а именно $\lambda = \dfrac{1}{\Lambda}$, $\Lambda\neq 0$. Тогда в утверждении теоремы следует записать $\lambda A y = y$.

Доказательство. Ранее было доказано, что оператор Фредгольма является вполне непрерывным, а при условии симметричности ядра и самосопряженным. Тем самым, по доказанной выше теореме оператор Фредгольма имеет хотя бы одно собственное значение. Для того, чтобы проверить, что указанное собственное значение не равно нулю, достаточно доказать следующее утверждение, что рекомендуем проделать читателю самостоятельно:

Утверждение. Пусть A - линейный ограниченный оператор, $A: N_1\to N_2$, где N_1 и N_2 – нормированные пространства, и $A\neq 0$. Тогда $\|A\|>0$.

§5. Построение последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Пусть вполне непрерывный самосопряженный оператор A действует в бесконечномерном евклидовом пространстве $h[a,b]$. В предыдущем параграфе мы доказали, что такой оператор обладает собственным значением Λ: $Az = \Lambda z$, $|\Lambda| = \|A\|$.

Очевидно, что это собственное значение является максимальным по модулю. В самом деле, пусть $\widetilde{\Lambda}$ - другое собственное значение, т.е. $A\widetilde{z} = \widetilde{\Lambda}\widetilde{z}$. Будем считать, что $\|\widetilde{z}\| = 1$ (иначе просто нормируем $\widetilde{z}$). Тогда $|\widetilde{\Lambda}| = \|A\widetilde{z}\| \le \|A\|\|\widetilde{z}\| = \|A\| = |\Lambda|$. Тем самым, любое другое собственное значение, если оно есть, по модулю не превосходит $\|A\|$.

Рассмотрим процедуру построения последовательностей собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного оператора A.

В предыдущем параграфе мы доказали существование собственного значения Λ_1, такого, что $|\Lambda_1| = \|A\|$. Сопоставим Λ_1 собственный вектор φ_1. Будем считать $\|\varphi_1\| = 1$. Обозначим $H_1 = h[a,b]$ - все исходное бесконечномерное евклидово пространство. Пусть оператор $A \neq 0$ (очевидно, что нулевой оператор имеет и притом только нулевое собственное значение).

Рассмотрим множество H_2 векторов y таких, что $(y, \varphi_1) = 0$, $y \in H_1$, (т.е. H_2 - ортогональное дополнение к φ_1). Отметим его следующие свойства.

а) H_2 - линейное пространство. Действительно, для любых вещественных чисел α_1, α_2 и любых элементов y_1 и y_2 таких, что $(y_1, \varphi_1) = 0$ и $(y_2, \varphi_1) = 0$ верно $(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \varphi_1) = 0$.

б) H_2 - замкнуто, т.е. если последовательность $y_n \underset{n\to\infty}{\to} y$ и $(y_n, \varphi_1) = 0$, то $(y, \varphi_1) = 0$ (из того, что $y_n \in H_2$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\to} y$ следует, что $y \in H_2$).

Доказательство. Применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|(y_n, \varphi_1) - (y, \varphi_1)| = |(y_n - y, \varphi_1)| \leq \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0}\|\varphi_1\| \quad \Rightarrow \quad |(y_n, \varphi_1) - (y, \varphi_1)| \to 0.$$

А т.к. $(y_n, \varphi_1) = 0$, то и $(y, \varphi_1) = 0$.

в) H_2 - инвариантное подпространство относительно оператора A, т.е. $AH_2 \subseteq H_2$ (из того, что $y \in H_2$ следует, что $z = Ay \in H_2$).

Доказательство. $(z, \varphi_1) = (Ay, \varphi_1) = (y, A\varphi_1) = (y, \Lambda_1 \varphi_1) = \Lambda_1 (y, \varphi_1) = 0$.

Итак, H_2 - линейное бесконечномерное евклидово пространство. Далее будем рассматривать оператор $A: H_2 \to H_2$.

Очевидно, что оператор A - вполне непрерывный самосопряженный - и $\|A\|_{H_2 \to H_2} \leq \|A\|_{H_1 \to H_1} = \|A\|$. Тогда по теореме предыдущего параграфа оператор A, действующий $H_2 \to H_2$, имеет собственное значение Λ_2, которому соответствует собственный вектор φ_2, причем $|\Lambda_2| = \|A\|_{H_2 \to H_2} = \sup\limits_{\substack{y:\|y\|=1 \\ (y,\varphi_1)=0}} \|Ay\|$. Будем считать, что $\|\varphi_2\| = 1$.

Если Λ_2=0, то процесс построения собственных значений заканчивается. В противном случае введем далее множество H_3, состоящее из векторов y таких, что $(y, \varphi_1) = 0$, $(y, \varphi_2) = 0$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, можно доказать, что оператор A, отображающий $H_3 \to H_3$, вполне непрерывный и самосопряженный, и по теореме предыдущего параграфа имеет собственное значение такое, что $|\Lambda_3| = \|A\|_{H_3 \to H_3} = \sup\limits_{\substack{y:\|y\|=1 \\ (y,\varphi_1)=0 \\ (y,\varphi_2)=0}} \|Ay\|$, которому сопоставим собственный вектор φ_3. Будем считать, что $\|\varphi_3\| = 1$.

Если Λ_3=0, то процесс заканчивается. В противном случае введем пространство H_4 и т.д.

Возможны два случая.

1) для любого $n = 1,2,...$ выполнено $\|A\|_{H_n \to H_n} \neq 0$. Тогда мы получаем бесконечные последовательности Λ_n и φ_n.

2) Для некоторого n $H_{n+1} \neq 0$, но $\|A\|_{H_{n+1} \to H_{n+1}} = 0$, т.е. для некоторого n сужение оператора A на пространство H_{n+1} станет нулевым оператором. Тогда $\Lambda_{n+1} = 0$ и процесс построения прекращается.

Замечание. Очевидно, что $|\Lambda_3| \leq |\Lambda_2| \leq |\Lambda_1|$.

Замечание. Для оператора Фредгольма важна последовательность характеристических чисел $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ...$. Тогда следует рассматривать следующие два варианта:

1) бесконечное число λ_n;

2) конечное число λ_n.

Теорема. Собственные векторы самосопряженного оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть $A\varphi_1 = \Lambda_1\varphi_1$, $A\varphi_2 = \Lambda_2\varphi_2$, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, φ_1 и φ_2 – соответствующие собственные векторы. Тогда

$0 = (A\varphi_1, \varphi_2) - (A\varphi_2, \varphi_1) = \underbrace{(\Lambda_1 - \Lambda_2)}_{\neq 0}(\varphi_1, \varphi_2)$, из чего следует $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$.

Теорема. Число различных собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора A, удовлетворяющих условию $\| A \| \geq |\Lambda| \geq \delta > 0$, где δ - фиксированное положительное число, конечно.

Доказательство. Предположим, что собственных значений бесконечно много. Выберем последовательность (различных) собственных значений $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_n, ...$ и для каждого собственного значения выберем собственные вектора $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$. ($\|\varphi_n\| = 1 \quad \forall n = 1,2,...$), по предыдущей лемме они образуют ортонормированную систему.

Оператор A - вполне непрерывный. Следовательно, из последовательности $A\varphi_n = \Lambda_n\varphi_n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Покажем, что это не так. Возьмем произвольные натуральные числа *i* и *j, i≠j*. Тогда

$$\|A\varphi_i - A\varphi_j\|^2 = \|\Lambda_i\varphi_i - \Lambda_j\varphi_j\|^2 = (\Lambda_i\varphi_i - \Lambda_j\varphi_j, \Lambda_i\varphi_i - \Lambda_j\varphi_j) = \Lambda_i^2 + \Lambda_j^2 \geq 2\delta^2 > 0,$$

т.е. никакая подпоследовательность последовательности $A\varphi_n = \Lambda_n\varphi_n$ не является фундаментальной, а, следовательно, никакая подпоследовательность не может сходиться.

Определение. Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению, называется кратностью собственного значения.

Теорема. Ненулевому собственному значению вполне непрерывного оператора A может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных векторов.

Доказательство. Пусть $\Lambda \neq 0$, и Λ соответствует бесконечно много линейно независимых собственных векторов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$. Применив процедуру Грама-Шмидта, хорошо известную из курса линейной алгебры, мы можем преобразовать $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ в ортонормированную систему. А тогда доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы, если мы обозначим $|\Lambda| = \delta > 0$. А именно, поскольку $\|\varphi_n\| = 1$, $(\varphi_i, \varphi_j) = 0,\ i \neq j$, а $A\varphi_n = \Lambda\varphi_n$, из последовательности $A\varphi_n$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, поскольку $\left\|A\varphi_i - A\varphi_j\right\|^2 = 2\left|\Lambda\right|^2 > 0$ при $i \neq j$. Этот результат противоречит тому, что оператор A является вполне непрерывным.

Замечание. Нулевому собственному значению может соответствовать как конечное, так и бесконечное число линейно независимых собственных векторов.

Если существует последовательность линейно независимых собственных векторов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$, то, используя процедуру Грама-Шмидта, ее можно преобразовать в ортонормированную систему.

Напомним формулы процедуры Грама-Шмидта. По заданной последовательности векторов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ..$ строятся последовательности $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ...$ и $e_1, e_2, ... e_n, ...$ по формулам:

на первом шаге - $\psi_1 = \varphi_1$, $e_1 = \dfrac{\psi_1}{\|\psi_1\|}$;

на n-ом шаге - $\psi_n = \varphi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, e_k)\, e_k$, $e_n = \dfrac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$.

Теперь сформулируем основные результаты о построении последовательности собственных значений, упорядоченных в порядке невозрастания модуля: $\left|\Lambda_1\right| \geq \left|\Lambda_2\right| \geq ... \geq \left|\Lambda_n\right| \geq ...$. Каждое собственное значение повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность.

Каждому собственному значению соответствует собственный вектор, причем можно выбрать собственные векторы так, что они образуют ортонормированную систему. На самом деле, собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям ортогональны, а собственные векторы, соответствующие одному и тому же собственному значению, можно ортогонализовать, используя процедуру Грама-Шмидта.

Если ненулевых собственных значений бесконечно много, то $\left|\Lambda_n\right| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$. Действительно, последовательность $\left|\Lambda_n\right|$ является монотонно невозрастающей и ограниченной снизу (нулем). Поэтому эта последовательность имеет предел. Если этот предел больше нуля, то мы получаем противоречие с доказанным выше утверждением о том, что число собственных значений, модули которых превышают любое фиксированное положительное число, конечно.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение собственного значения линейного оператора.
2. Сформулировать определение собственного вектора линейного оператора.
3. Сформулировать определение максимального вектора линейного оператора.
4. Сформулировать определение инвариантного подпространства линейного оператора.
5. Сформулировать определение кратности собственного значения линейного оператора.
6. Сформулировать определение собственной функции ядра интегрального оператора Фредгольма.
7. Сформулировать определение вырожденного линейного оператора.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать следующее утверждение: пусть A - самосопряженный оператор, действующий в евклидовом пространстве E, и e – произвольный вектор из E, $\|e\| = 1$. Тогда справедливо

неравенство $\|Ae\|^2 \le \|A^2 e\|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда e является собственным вектором оператора A^2, соответствующим собственному значению $\Lambda = \|Ae\|^2$.

2. Доказать следующее утверждение: самосопряженный вполне непрерывный оператор A, действующий в евклидовом пространстве E, обладает максимальным вектором.
3. Доказать следующее утверждение: если z - максимальный вектор самосопряженного оператора A, действующего в евклидовом пространстве E, то z -собственный вектор оператора A^2, соответствующий собственному значению $\Lambda = \|A\|^2 = M^2$.
4. Доказать следующее утверждение: пусть оператор A действует в евклидовом пространстве E, и оператор A^2 обладает собственным вектором z, соответствующим собственному значению M^2. Тогда оператор A имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению M или $-M$.
5. Сформулируйте последовательность утверждений, из которых следует теорема: самосопряженный вполне непрерывный оператор A, действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, обладает собственным вектором, соответствующим собственному значению Λ: $|\Lambda| = \|A\|$.
6. Доказать теорему: оператор Фредгольма с вещественным, непрерывным по совокупности аргументов, не равным тождественно нулю, симметрическим ядром обладает собственным значением Λ, $\Lambda \ne 0$: $Ay = \Lambda y$, $y \ne 0$, $y \in h[a,b]$.
7. Доказать, что собственное значение Λ линейного оператора A такое, что $|\Lambda| = \|A\|$, является максимальным по модулю.
8. Доказать, что число собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора A, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве, удовлетворяющих условию $|\Lambda| \ge \delta > 0$, конечно.
9. Доказать, что ненулевому собственному значению вполне непрерывного оператора A, действующему в бесконечномерном евклидовом пространстве, может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных векторов.
10. Доказать, что если самосопряженный вполне непрерывный оператор A, действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, имеет бесконечную последовательность собственных значений Λ_n, $n = 1,2,3,\ldots$, то $|\Lambda_n| \to 0$ при $n \to \infty$.
11. Описать процесс построения собственных значений и собственных функций вполне непрерывного самосопряженного оператора A, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве.
12. Пусть φ - собственный вектор самосопряженного оператора A, действующего в евклидовом пространстве. Доказать, что множество векторов, ортогональных φ, образуют замкнутое линейное подпространство, инвариантное относительно A.
13. Доказать, что если интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x,s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a,b]$ (комплексном расширении пространства $h[a,b]$), то этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.
14. Приведите пример самосопряженного оператора, действующего в пространстве $h[a,b]$ и не имеющего собственных значений.
15. Приведите пример вполне непрерывного оператора, действующего в пространстве $h[a,b]$ и не имеющего собственных значений.
16. Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.
17. Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора A, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

Лекция №4

§6. Характеристические числа и собственные функции интегрального оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром.

Подытожим результаты, полученные в предыдущем параграфе, в следующей теореме.

Теорема. Пусть оператор A действует из $h[a,b]$ в $h[a,b]$ и является вполне непрерывным и самосопряженным. Рассмотрим следующий процесс построения последовательности собственных значений и собственных векторов оператора A:

1) $H_1 = h[a,b]$, $\qquad |\Lambda_1| = \|A\|_{H_1 \to H_1} \leftrightarrow \varphi_1$;

2) $H_2 = \{y \in h[a,b] : (y, \varphi_1) = 0\}$, $\qquad |\Lambda_2| = \|A\|_{H_2 \to H_2} \leftrightarrow \varphi_2$;

…;

n) $H_n = \{y \in h[a,b] : (y, \varphi_1) = 0, ..., (y, \varphi_{n-1}) = 0\}$, $\qquad |\Lambda_n| = \|A\|_{H_n \to H_n} \leftrightarrow \varphi_n$;

…,

причем можно считать, что собственные векторы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ образуют ортонормированную систему.

Эта процедура приводит к двум возможным результатам (критерий остановки процесса $\|A\|_{H_{n+1} \to H_{n+1}} = 0$):

1) $|\Lambda_1| \geq |\Lambda_2| \geq ... \geq |\Lambda_n| > \Lambda_{n+1} = 0$ - конечная последовательность собственных значений;

2) $|\Lambda_1| \geq |\Lambda_2| \geq ... \geq |\Lambda_n| \geq ...$- бесконечная последовательность собственных значений, $|\Lambda_n| \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

При этом в последовательности собственных значений каждое собственное значение будет повторяться столько раз, какова его кратность. Процесс позволяет найти все собственные значения кроме, быть может, нулевого собственного значения (в случае 2).

<u>Следствия</u>. 1) Характеристические числа вполне непрерывного самосопряженного оператора могут образовывать:

а) $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ... \leq |\lambda_n|$ - конечную последовательность;

б) $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ... \leq |\lambda_n| \leq ...$ - бесконечную последовательность, тогда $\lim\limits_{n \leftarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.

Каждому характеристическому числу λ_n можно сопоставить собственный вектор φ_n, причем векторы образуют ортонормированную систему.

2) Все полученные результаты верны для интегрального оператора с непрерывным, симметрическим и неравным тождественно нулю ядром. В этом случае вместо слов <u>собственные векторы</u> говорят <u>собственные функции</u> интегрального оператора или <u>собственные функции</u> ядра $K(x,s)$.

Рассмотрим множество векторов $y \in h[a,b]$ таких, что $Ay = 0$. Докажите самостоятельно, что указанное множество образует замкнутое линейное пространство в $h[a,b]$. Напомним, что это множество называется (см. §2) <u>нуль-пространством</u> оператора A и обозначается $Ker\,A = \{y : Ay = 0\}$. Очевидно, что нуль-пространство нетривиально (т.е. содержит ненулевые элементы) тогда и только тогда, если оператор A имеет нулевое собственное значение. В этом случае (см. §2) оператор A называется вырожденным).

Определение. Ядро интегрального оператора $K(x,s)$ называется замкнутым, если интегральный оператор является невырожденным.

Пусть A - вполне непрерывный самосопряженный оператор с последовательностью характеристических чисел (конечной или бесконечной) $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$, которым соответствует ортонормированная последовательность собственных векторов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$.

Теорема. Вектор y принадлежит нуль-пространству оператора A ($y \in Ker\, A$) тогда и только тогда, если $(y, \varphi_k) = 0$, $k = 1,2,...$ (φ_k- конечная или бесконечная последовательность).

Доказательство. 1) Необходимость. Нуль-пространство оператора A – это множество векторов, соответствующих нулевому собственному значению, т.е. $Ay = 0 \cdot y$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$- последовательность векторов, соответствующих характеристическим числам (ненулевым собственным значениям). Мы доказали ранее, что векторы, отвечающие различным собственным значениям самосопряженного оператора A, являются ортогональными, поэтому $(y, \varphi_k) = 0 \quad k = 1,2,...$

2) Достаточность. Рассмотрим множество $P \in h[a,b]$, состоящее из векторов y таких, что $(y, \varphi_k) = 0 \quad k = 1,2,...$ Очевидно, что P - линейное пространство (докажите это самостоятельно). Кроме того, P - замкнутое линейное подпространство. Действительно, для любой последовательности $y_n \in P$, $n = 1,2,3,...$ верно $(y_n, \varphi_k) = 0$, $k = 1,2,3,...$, и если $y_n \to y_0$, то в силу непрерывности скалярного произведения получаем $(y_0, \varphi_k) = 0$, $k = 1,2,...$, т.е. y_0 – элемент P.

Далее, P – инвариантное подпространство оператора A, так как если $y \in P$, то $(Ay, \varphi_k) = (y, A\varphi_k) = (y, \dfrac{\varphi_k}{\lambda_k}) = \dfrac{1}{\lambda_k}(y, \varphi_k) = 0$, $k = 1,2,...$. Таким образом, из $y \in P$ следует $Ay \in P$, т.е. P - инвариантное подпространство.

Докажем теперь, что P – нуль-пространство оператора A, т.е. $AP = 0$. Допустим, что это не так. Тогда существует вектор $\tilde{y} \in P$ такой, что $A\tilde{y} \ne 0$, $\|\tilde{y}\| = 1$. Следовательно, $\|A\|_{P \to P} = \sup\limits_{y \in P,\, \|y\|=1} \|Ay\| \ge \|A\tilde{y}\| > 0$ и, как доказано в предыдущем параграфе, оператор A имеет ненулевое собственное значение, а значит, и характеристическое число $|\tilde{\lambda}| > 0$. Этому собственному значению (характеристическому числу) отвечает собственный вектор, не входящий в последовательность φ_n (иначе этот вектор был бы ортогонален сам себе). Мы приходим к противоречию с тем, что в последовательности характеристических чисел перечислены все характеристические числа с учетом кратности. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь следующий процесс для интегрального оператора A с симметрическим непрерывным ядром $K(x,s)$.

Пусть характеристические числа упорядочены в порядке неубывания модуля

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...,$$

и им соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$

1) Обозначим $K^{(1)}(x,s) = K(x,s)$.

2) Определим $K^{(2)}(x,s) = K(x,s) - \dfrac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}$, и рассмотрим интегральный оператор $A^{(2)}$ с ядром $K^{(2)}(x,s)$. Все функции $\varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ остаются собственными

функциями и оператора $A^{(2)}$, соответствующими тем же характеристическим числам $|\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$, поскольку

$$\int_a^b K^{(2)}(x,s)\,\varphi_k(s)\,ds = \int_a^b K(x,s)\,\varphi_k(s)\,ds - \int_a^b \frac{\varphi_1(x)\,\varphi_1(s)}{\lambda_1}\varphi_k(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x) - 0 = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x) \quad k = 2,3,...$$

Функция φ_1 также остается собственной функцией оператора $A^{(2)}$, но отвечающей нулевому собственному значению ядра $K^{(2)}(x,s)$. Поэтому λ_1 отсутствует в последовательности характеристических чисел оператора $A^{(2)}$. Докажите самостоятельно, что оператор $A^{(2)}$ не имеет других характеристических чисел, отличных от указанных.

Продолжая процесс, на $n+1$-ом шаге имеем $K^{(n+1)}(x,s) = K(x,s) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i}$. Оператор $A^{(n+1)}$ с ядром $K^{(n+1)}(x,s)$ имеет те же характеристические числа и те же собственные функции, что и оператор A, кроме первых n характеристических чисел.

Если характеристических чисел бесконечное число, то получаем бесконечный ряд (мы не будем исследовать его сходимость).

Если же характеристических чисел конечное число, то $K^{(n+1)}(x,s) \equiv 0$ и $K(x,s) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i}$, т.е. ядро интегрального уравнения представляет собой конечную сумму.

Определение. Ядро $K(x,s)$ называется <u>вырожденным</u>, если оно представимо в виде $K(x,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,b_j(s)$, где функции $a_j(x), b_j(s)$ непрерывны по своим аргументам при $x,s \in [a,b]$. Очевидно, можно считать, что $a_1(x),...,a_n(x)$ линейно независимы, и $b_1(s),...,b_n(s)$ также линейно независимы. Если это не так, число членов в сумме можно уменьшить (докажите это самостоятельно).

Интегральный оператор с вырожденным ядром, очевидно, является вырожденным, т.е. у него всегда есть нулевое собственное значение, причем кратность нулевого значения равна ∞.

Для отыскания других собственных значений поступим следующим образом. Рассмотрим задачу на собственные значения и собственные функции для интегрального оператора с вырожденным ядром:

$$\Lambda y(x) = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s) y(s) ds.$$

Обозначим $\int_a^b y(s)\,b_j(s)\,ds = c_j$. Умножим левую и правую части на $b_i(x)$ и проинтегрируем от a до b:

$$\Lambda c_i = \sum_{j=1} c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x)\,b_i(x)\,dx}_{k_{ij}}, \quad i = 1,2,...,n.$$

Полагая $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $K = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, получим задачу на собственные значения и собственные векторы для матрицы *K*: $K \cdot C = \Lambda \cdot C$. Как известно, собственные значения матрицы K можно найти, например, решив характеристическое уравнение $\det(K - \Lambda I) = 0$.

Если оператор $A: h[a,b] \to h[a,b]$, т.е. действует в вещественном линейном пространстве $h[a,b]$, он по определению может иметь только вещественные собственные значения. Тем не менее, при решении характеристического уравнения могут находиться и комплексные корни. О чем же идет речь? Могут ли эти корни рассматриваться как комплексные собственные значения?

Дело в том, что мы можем рассматривать тот же оператор в пространстве непрерывных комплекснозначных функций $h^C[a,b]$, состоящем из комплекснозначных функций вещественной переменной x, т.е. $y(x) = u(x) + i\,v(x)$ $x \in [a,b]$, где функции $u(x)$, $v(x)$ – непрерывные на $[a,b]$ вещественные функции. Умножение элементов пространства на комплексное число определяется обычным образом.

В этом пространстве можно ввести скалярное произведение: $(y_1, y_2) = \int\limits_a^b y_1^*(x)\, y_2(x)\, dx$ (здесь * - знак комплексного сопряжения). В качестве упражнения опишите свойства этого скалярного произведения (они отличаются от свойств скалярного произведения в вещественном случае, в частности, $(y_1, y_2) = (y_2, y_1)^*$) и проверьте, что это скалярное произведение порождает норму.

Если же интегральный оператор A имеет симметрическое вещественное непрерывное ядро, то он имеет только вещественные собственные значения и при действии в пространстве $h^C[a,b]$.

Теорема. Пусть интегральный оператор с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x,s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a,b]$. Тогда этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.

Доказательство. Пусть Λ - собственное значение оператора A, $y(x) \neq 0$ - соответствующая собственная функция. Тогда $\Lambda\, y(x) = \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$. Применим операцию комплексного сопряжения к левой и правой части. Тогда $\Lambda^*\, y^*(x) = \int\limits_a^b K(x,s)\, y^*(s)\, ds$, т.е. Λ^* - собственное значение оператора A, а y^* - соответствующая собственная функция.

Умножим первое равенство на $y^*(x)$, а второе на $y(x)$ и проинтегрируем от a до b. Тогда

$$\Lambda \int\limits_a^b |y(x)|^2\, dx = \int\limits_a^b y^*(x) \Big(\int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds \Big)\, dx;$$

$$\Lambda^* \int\limits_a^b |y(x)|^2\, dx = \int\limits_a^b y(x) \Big(\int\limits_a^b K(x,s)\, y^*(s)\, ds \Big)\, dx.$$

Вычитая из первого равенства второе и учитывая симметричность ядра $K(x,s)$, получаем

$$(\Lambda - \Lambda^*) \underbrace{\int_a^b |y(x)|^2\, dx}_{\neq 0} = 0,$$

из чего следует $\Lambda = \Lambda^*$, т.е. Λ - вещественное число. Теорема доказана.

В дальнейшем, как и ранее, мы будем рассматривать интегральные операторы с вещественными ядрами, действующие в пространствах непрерывных вещественных функций. Приведем некоторые полезные для понимания примеры интегральных операторов.

Примеры. Положим $[a,b] = [0,\pi]$ и рассмотрим пространство $h[0,\pi]$.

Как было показано в курсе математического анализа, в этом пространстве функции $\varphi_n(s) = \sin ns$, $n = 1,2,3,...$ образуют ортогональную систему (чтобы получить ортонормированную систему, надо умножить каждую функцию на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$). Эта система замкнутая, т.е. из того, что непрерывная функция $y(s)$ ортогональна всем функциям $\varphi_n(s) = \sin ns$, $n = 1,2,3,...$ следует, что $y(s) \equiv 0$. Эта система полная, т.е. любая непрерывная на $[0,\pi]$ функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье по указанным функциям, причем ряд Фурье сходится к $f(x)$ в среднем.

1) Составим ядро $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx \sin ns}{n^2}$ на $[0,\pi]\times[0,\pi]$. Тогда по признаку Вейерштрасса записанный ряд сходится равномерно, т.к. модуль каждого члена этого ряда мажорируется $\dfrac{1}{n^2}$. Из равномерной сходимости ряда следует, что функция $K(x,s)$ непрерывна по совокупности переменных. Очевидно, что ядро $K(x,s)$ симметрическое. Его собственные функции – $\sin ns$, а характеристические числа – $\lambda_n = n^2$, $n = 1,2,3,...$ (если бы было другое характеристическое число, то соответствующая ему собственная функция была бы ортогональна всем $\sin ns$, а такой функции нет, т.к. $\sin ns$ образуют замкнутую систему). Из замкнутости системы $\sin ns$ следует, что ядро $K(x,s)$ определяет невырожденный интегральный оператор, а, следовательно, замкнуто.

2) Теперь рассмотрим ядро $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx \sin ns}{n^2}$. Появляется собственное значение $\Lambda_0 = 0$ кратности, равной 1, которому соответствует собственная функция $\sin s$. Интегральный оператор A с таким ядром является вырожденным, а его ядро невырожденное, но и незамкнутое.

3) Рассмотрим $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx \sin 2ns}{(2n)^2}$. Интегральный оператор с таким ядром имеет собственное значение $\Lambda_0 = 0$ бесконечной кратности (соответствующие собственные функции $\sin s$, $\sin 3s$, ...). Интегральный оператор вырожденный, имеет бесконечномерное нуль-пространство, а его ядро невырожденное, но и незамкнутое.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение замкнутого ядра интегрального оператора Фредгольма.
2. Сформулировать определение вырожденного ядра интегрального оператора Фредгольма.
3. Сформулировать определение скалярного произведения в комплексном расширении пространства $h[a,b]$.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Описать процесс построения собственных значений и собственных функций интегрального оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве $h[a,b]$.
2. Сформулировать и обосновать необходимые и достаточные условия того, что вектор φ принадлежит нуль-пространству вполне непрерывного самосопряженного оператора A, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве.
3. Доказать, что если интегральный оператор Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром имеет конечное число характеристических чисел, то ядро оператора равно $K(x,s)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$ (λ_i - характеристические числа, φ_i - соответствующие собственные функции).
4. Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет бесконечную кратность.
5. Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет конечную кратность.
6. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с ядром $K(x,s)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx\sin ns}{n^2}$, действующий в пространстве $h[0,\pi]$, является невырожденным.
7. Доказать, что нуль является простым собственным значением интегрального оператора Фредгольма, действующего в пространстве $h[0,\pi]$, с ядром $K(x,s)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx\sin ns}{n^2}$.
8. Доказать, что нулевое собственное значение интегрального оператора Фредгольма, действующего в пространстве $h[0,\pi]$, с ядром $K(x,s)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx\sin 2ns}{(2n)^2}$ имеет бесконечную кратность.
9. Привести пример вырожденного интегрального оператора Фредгольма с невырожденным ядром.
10. Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет кратность 5.

Лекция №5

§7. Теорема Гильберта-Шмидта.

Будем рассматривать интегральный оператор A, ядро которого $K(x,s)$ удовлетворяет следующим условиям: $K(x,s)$ – симметрическое, непрерывное по совокупности переменных на $[a,b]\times[a,b]$ и $K(x,s)\not\equiv 0$. В соответствии с результатами предыдущего параграфа этот оператор обладает конечной или бесконечной последовательностью характеристических чисел $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\ldots\le|\lambda_n|\le\ldots$, которым соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots$, определяемых уравнением $\varphi(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds$.

Определение. Функция $f(x)$ называется <u>истокопредставимой</u> с помощью ядра $K(x,s)$, если существует непрерывная функция $g(s)$ такая, что $f(x)=\int\limits_a^b K(x,s)g(s)ds$ или, что тоже самое, $f=Ag$ (т.е. $f\in R(A)$ - множеству значений оператора A, действующего $h[a,b]\to h[a,b]$).

Любой функции $f(x)\in h[a,b]$ можно формально сопоставить ее ряд Фурье по системе функций $\varphi_k(x)$, т.е. $f(x)\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k\,\varphi_k(x)$

Теорема Гильберта-Шмидта. Если функция $f(x)$ истокопредставима с помощью непрерывного симметрического ядра $K(x,s)$, то она может быть разложена в ряд

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\,\varphi_k(x),\qquad \text{где}\qquad f_k=(f,\varphi_k)=\int_a^b f(s)\varphi_k(s)\,ds,$$

причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[a,b]$.

<u>Доказательство</u>. 1) Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k\,\varphi_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$. Будем рассматривать случай, когда характеристических чисел бесконечно много (в противном случае очевидно, что ряд сходится).

Заметим, что $f_k=(f,\varphi_k)=(Ag,\varphi_k)=(g,A\varphi_k)=(g,\dfrac{\varphi_k}{\lambda_k})=\dfrac{g_k}{\lambda_k}$. Итак, нам надо доказать равномерную и абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k\,\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$.

Для доказательства применим критерий Коши равномерной сходимости. Для нас представляет интерес сумма

$$\sum_{k=n+1}^{k=n+p}\left|g_k\,\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\le\sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p}g_k^2\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}},$$

где n и p – произвольные натуральные числа (здесь мы использовали неравенство Коши-Буняковского для сумм вещественных чисел).

а) Из неравенства Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k^2\le\int\limits_a^b g^2(s)\,ds$ следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k^2$ сходится, т.к. состоит из неотрицательных чисел, и все частичные суммы его ограничены.

б) Заметим, что $\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}=\int\limits_a^b K(x,s)\,\varphi_k(s)\,ds$, т.к. $\varphi_k(x)$ – собственная функция, соответствующая характеристическому числу λ_k. Если фиксировать $x\in[a,b]$, то $\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$ - коэффициент Фурье ядра $K(x,s)$, и можно записать неравенство Бесселя для $K(x,s)$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right)^2\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right)^2\le\int\limits_a^b K^2(x,s)\,ds\le K_o^2\,(b-a),\quad \text{где}\quad K_o=\max_{x,s\in[a,b]}|K(x,s)|.$$

В то же время, из неравенства Бесселя для функции $g(x)$ следует, что числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k^2$ сходится, и выполняется критерий Коши как *необходимое* условие его сходимости, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \ \forall n\ge N\ \ \forall p\ge 1\quad \sum\limits_{k=n+1}^{n+p}g_k^2\le\dfrac{\varepsilon^2}{K_o^2\ \ (b-a)}$. Но тогда при тех же $\varepsilon,\ N,\ n,\ p$ имеет место оценка $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\left|g_k\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\le\varepsilon$, т.е. выполнен критерий Коши как *достаточное* условие равномерной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|g_k\dfrac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|$.

Итак, равномерная и абсолютная сходимость ряда Фурье доказана.

2) Докажем, что ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k\,\varphi_k(x)$ сходится к функции $f(x)$. Так как ряд состоит из непрерывных функций и сходится равномерно на $[a,b]$, то его сумма – непрерывная на $[a,b]$ функция. Обозначим $\omega(x)=f(x)-\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k\,\varphi_k(x)$. Надо доказать, что $\omega(x)\equiv 0$.

Докажем, что $\omega(x)$ ортогональна всем собственным функциям $\varphi_i(x)$. Действительно,

$$(\omega,\varphi_i)=\int\limits_a^b\omega(x)\varphi_i(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx-\int\limits_a^b\sum_{k=1}^{\infty}f_k\,\varphi_k(x)\varphi_i(x)\,dx=f_i-\sum_{k=1}^{\infty}f_k\int\limits_a^b\varphi_k(x)\varphi_i(x)\,dx=$$
$$=f_i-f_i=0\qquad\forall i=1,2,...$$

(возможность изменения порядка интегрирования и суммирования следует из равномерной сходимости ряда).

Так как функция $\omega(x)$ ортогональна всем $\varphi_i(x)$, то (см. предыдущий параграф), $\omega(x)$ принадлежит нуль-пространству оператора A, т.е. $A\omega=0$. Далее

$$\int\limits_a^b\omega^2(x)\,dx=\int\limits_a^b[f(x)-\sum_{k=1}^{\infty}f_k\,\varphi_k(x)]\,\omega(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx=(f,\omega)=(Ag,\omega)=(g,A\omega)=0.$$

Изменение порядка интегрирования и суммирования возможно в силу доказанной выше равномерной сходимости ряда Фурье. Так как $\omega(x)$ – непрерывная функция, то $\omega(x)\equiv 0$. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа сформулируем без доказательства некоторые обобщения полученных результатов.

Можно рассматривать задачу в многомерном случае. Пусть Ω - замкнутая ограниченная область $\Omega\subseteq R^n$, для которой можно определить указанные ниже интегралы. Введем пространство $h[\Omega]$, состоящее из функций, непрерывных в Ω, со скалярным произведением $(y_1, y_2) = \int\limits_{\Omega} y_1(x)\, y_2(x)\, dx, \quad dx = dx_1\, dx_2 ... dx_n$. Рассмотрим многомерное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с ядром $K(x,s)$

$$y(x) = \lambda \int\limits_{\Omega} K(x,s) y(s) ds + f(x), \qquad x, s \in \Omega .$$

Если ядро непрерывно и симметрично по переменным x, s, то все результаты, полученные выше, остаются верными и в многомерном случае.

В курсе методов математической физики рассматриваются ядра $K(x,s) = \dfrac{\Phi(x,s)}{|x-s|^{\alpha}}$, где $\Phi(x,s)$ непрерывная в Ω по совокупности аргументов и симметрическая функция, $|x-s| = r_{xs}$ - расстояние между точками x и s в пространстве R^n.

Если $\alpha < n$, где $n = \dim R^n$, то ядро $K(x,s)$ называется *полярным*. Для таких ядер доказывается, что интегральный оператор A: $h[\Omega] \to h[\Omega]$ является вполне непрерывным. Таким образом, для интегральных операторов с полярными ядрами справедливы теоремы о существовании хотя бы одного собственного значения и теоремы о построении последовательности собственных значений.

Если $\alpha < \dfrac{n}{2}$ ($n = \dim R^n$), то ядро $K(x,s)$ называется *слабополярным*. Для таких ядер справедлива также и теорема Гильберта-Шмидта.

Все результаты могут быть перенесены на случай комплексных пространств $h[a,b]$ и $h[\Omega]$, но вместо требования симметричности ядра, если ядро является комплексным, надо потребовать $K(x,s) = K^*(s,x)$, для любых x, s из Ω, где $*$ - знак комплексного сопряжения.

§8. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x) \equiv \lambda A y + f .$$

Пусть ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных, симметрично и $K(x,s) \not\equiv 0$; $\lambda \neq 0$ - вещественное число (в противном случае решение находится тривиально); $f(x)$ - заданная непрерывная функция; $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$ - последовательность характеристических чисел интегрального оператора, которым соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$.

Допустим, что решение уравнения существует. Преобразуем искомую функцию так, чтобы она стала истокопредставимой. Для этого будем искать решение в виде $y(x) = f(x) + g(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$f(x) + g(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\big(f(s) + g(s)\big) ds + f(x) .$$

Сократив $f(x)$, получим уравнение для $g(x)$, операторная форма которого

$$g = \lambda A (g + f) .$$

Решение этого уравнения, если оно есть, является истокопредставимым. Следовательно, по теореме Гильберта-Шмидта, функция $g(x)$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям ядра $K(x,s)$:

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k\,\varphi_k(x).$$

Вычисляя коэффициенты Фурье функций g и $\lambda A(g+f)$, получаем

$$g_k=\lambda\big(A(g+f),\varphi_k\big)=\lambda\big(g+f,A\varphi_k\big)=\lambda\left(g+f,\frac{\varphi_k}{\lambda_k}\right)=\frac{\lambda}{\lambda_k}\big(g_k+f_k\big)\qquad k=1,2,\dots,$$

Для определения g_k необходимо решить систему уравнений

$$g_k(\lambda_k-\lambda)=\lambda f_k,\quad k=1,2,\dots\ .$$

Возможны два случая.

1) $\lambda\neq\lambda_k,\quad k=1,2,\dots$.

Тогда $g_k=\dfrac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}f_k$, и можно формально записать ряды Фурье $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}f_k\,\varphi_k(x)$ и $y(x)=f(x)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}f_k\,\varphi_k(x)$. Чтобы последний ряд Фурье на самом деле являлся решением, достаточно доказать, что этот ряд сходится равномерно на сегменте $[a,b]$.

Заметим, что $|\lambda_k|\to\infty$, поэтому при любом λ, начиная с некоторого номера k, выполняется оценка

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}\right|=\left|\frac{\lambda}{\lambda_k}\right|\cdot\frac{1}{\left|1-\dfrac{\lambda}{\lambda_k}\right|}\le 5\left|\frac{\lambda}{\lambda_k}\right|.$$

Тогда для достаточно больших n и любого натурального p имеем

$$\sum_{n+1}^{n+p}\left|f_k\,\frac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}\varphi_k(x)\right|\le 5|\lambda|\sum_{n+1}^{n+p}\left|\frac{f_k\,\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|.$$

Далее, как в предыдущем параграфе, доказывается, что выполняется критерий Коши как *достаточное* условие равномерной сходимости, т.е. ряд Фурье сходится равномерно.

Замечание. Запишем решение уравнения в следующем виде:

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int\limits_a^b f(s)\,\varphi_k(s)\,ds}{\lambda_k-\lambda}\cdot\varphi_k(x).$$

Предположим, что можно поменять местами суммирование и интегрирование, тогда

$$y(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k-\lambda}\right)}_{R(x,s,\lambda)}f(s)\,ds,$$

или $y(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b R(x,s,\lambda)\,f(s)\,ds$.

В операторной форме уравнение Фредгольма 2-го рода имеет вид $y=\lambda Ay+f$, или $(I-\lambda A)y=f$. Т.к. решение существует и единственно, то $y=(I-\lambda A)^{-1}f=f+\lambda R_\lambda f$, где R_λ - интегральный оператор с ядром $R(x,s,\lambda)$. В операторном виде полученный результат можно записать так: $\quad (I-\lambda A)^{-1}=I+\lambda R_\lambda$.

Определение. Ядро $R(x,s,\lambda)$ называется резольвентой.

Рассмотрим теперь второй случай.

2) $\lambda = \lambda_n$.

Пусть сначала λ_n – простое характеристическое число. Тогда при $k \neq n$ $(\lambda_k - \lambda)\, g_k = \lambda\, f_k$, $k = 1,2,...;\ k \neq n$, следовательно $g_k = \dfrac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda}$.

При $k = n$ имеем $0 \cdot g_n = \lambda \cdot f_n$, где $\lambda \neq 0$. Если $f_n \neq 0$, $f_n = (f, \varphi_n)$, то последнее уравнение не имеет решения, а значит и исходное уравнение решений не имеет. Если же $f_n = 0$, то получаем $g_n = c_n$, где c_n - произвольная постоянная, т.е. решений бесконечно много.

Наконец, пусть λ_n - характеристическое число кратности r. В этом случае получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot g_n = \lambda\, f_n \\ 0 \cdot g_{n+1} = \lambda\, f_{n+1} \\ \cdots \\ 0 \cdot g_{n+r-1} = \lambda\, f_{n+r-1} \end{cases}.$$

Эта система имеет решение тогда и только тогда, когда все коэффициенты Фурье $f_n,\ f_{n+1},\ \cdots,\ f_{n+r-1}$ равны нулю. Если хотя бы один коэффициент Фурье не равен нулю, то система не имеет решений, а, следовательно, и исходное уравнение не имеет решений. Другими словами, условием разрешимости является ортогональность функции $f(x)$ всем собственными функциям, соответствующим характеристическому числу λ_n. В этом случае решение не единственно и дается формулой

$$y(x) = f(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n \\ \cdots \\ k \neq n+r-1}}^{\infty} \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda}\ \varphi_k(x) + c_n\, \varphi_n(x) + ... + c_{n+r-1}\, \varphi_{n+r-1}(x),$$

где $c_n, ..., c_{n+r-1}$ - произвольные константы. Ряд, записанный в данном представлении, сходится абсолютно и равномерно.

В результате проведенного исследования мы доказали две теоремы.

Теорема.

Если однородное уравнение Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром имеет только тривиальное решение (т.е. $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1,2,...$), то неоднородное уравнение имеет, и притом, единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x)$.

Если однородное уравнение имеет нетривиальное решение, т.е. $\lambda = \lambda_k$ при некотором k, то неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, если неоднородность – непрерывная функция $f(x)$ – ортогональна всем собственным функциям, соответствующим данному λ (т.е. всем решениям однородного уравнения). В последнем случае, если решение существует, то оно не единственно.

Теорема. (Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическими ядрами).

Либо неоднородное уравнение имеет решение для любой непрерывной функции $f(x)$, либо однородное уравнение имеет нетривиальное решение.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение функции, истокопредставимой с помощью ядра интегрального оператора.
2. Сформулировать теорему Гильберта-Шмидта.
3. Сформулировать определение интегрального оператора с полярным ядром.
4. Сформулировать определение интегрального оператора со слабо полярным ядром.
5. Сформулировать определение резольвенты интегрального оператора.
6. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром.
7. При каком условии неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром имеет и притом единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$ - неоднородности уравнения?
8. Сформулировать условие разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром в случае, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение. Сколько решений имеет неоднородное уравнение, если оно разрешимо?

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать теорему Гильберта-Шмидта.
2. Построить решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром с помощью разложения в ряд Фурье по собственным функциям ядра и доказать альтернативу Фредгольма.

<u>Лекция №6</u>

§9. Принцип сжимающих отображений. Теоремы о неподвижной точке.

Пусть D – оператор, вообще говоря, нелинейный, действующий из банахова пространства B в себя.

Определение. Оператор D, действующий из банахова пространства B в себя, называется <u>сжимающим</u> (или <u>сжимающим отображением</u>), если существует константа q такая, что $0 \le q < 1$ и для любых $y_1, y_2 \in B$ выполнено неравенство $\|Dy_1 - Dy_2\| \le q \cdot \|y_1 - y_2\|$.

Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что сжимающий оператор является непрерывным.

Определение. Элемент y называется <u>неподвижной точкой</u> оператора D, если $Dy = y$.

Ниже мы докажем, что у сжимающего оператора, действующего в банаховом пространстве, есть и при том единственная, неподвижная точка. Напомним, что <u>банахово</u> пространство – это <u>полное нормированное</u> пространство, и при доказательстве мы будем использовать полноту пространства B.

Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение. Будем называть рядом бесконечную сумму элементов пространства B

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad \text{где} \quad z_n \in B, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$ - его частичной суммой. Как обычно, определим сходимость ряда как сходимость последовательности его частичных сумм, т.е. если $S_N \underset{N\to\infty}{\to} S$, где $S, S_N, z_n \in B$, то говорят, что ряд сходится, а элемент S называется его суммой.

Поскольку пространство B полное, то необходимым и достаточным условием сходимости ряда является критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \ge N \quad \forall p \ge 1 \quad \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right\| \le \varepsilon$.

Теорема (признак Вейерштрасса сходимости ряда). Пусть $\|z_n\| \le a_n, \quad a_n \ge 0, \quad n = 1,2,\ldots$ (a_n- последовательность неотрицательных чисел). Тогда из сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

<u>Доказательство</u>. Из неравенства треугольника и условия теоремы следует

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \|z_k\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k .$$

Запишем критерий Коши как <u>*необходимое*</u> условие сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \ge N \quad \forall p \ge 1 \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \le \varepsilon$. Из этого неравенства и неравенства, полученного в начале доказательства теоремы, следует, что, начиная с этого номера, $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right\| \le \varepsilon$, т.е. выполняется критерий Коши как <u>*достаточное*</u> условие сходимости ряда в банаховом пространстве B.

Теорема (о неподвижной точке). Пусть D – сжимающий оператор. Тогда существует, и притом единственная, точка $y \in B$ такая, что $Dy = y$. Эта точка может быть найдена методом последовательных приближений (простой итерации): $y_{n+1} = Dy_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$, где $y_0 \in B$ - произвольная фиксированная точка пространства B (начальное приближение), причем $y_n \to y : Dy = y$.

Доказательство.

1) Единственность. Пусть существуют две неподвижные точки y_1 и y_2: $Dy_1 = y_1, Dy_2 = y_2, \quad y_1 \neq y_2$. Тогда $0 < \|y_1 - y_2\| = \|Dy_1 - Dy_2\| \le q\|y_1 - y_2\| < \|y_1 - y_2\|$, и мы приходим к противоречию. Единственность доказана.

2) Существование докажем методом последовательных приближений. Зададим произвольное начальное приближение $y_0 \in B$ и рассмотрим последовательность $y_{n+1} = Dy_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$ Докажем ее сходимость.

Заметим, что сходимость последовательности y_n равносильна сходимости ряда $y_{n+1} = \underbrace{(y_{n+1} - y_n)}_{\substack{\text{общий} \\ \text{член ряда}}} + (y_n - y_{n-1}) + \ldots + (y_1 - y_0) + y_0$.

Так как $\|y_{n+1} - y_n\| = \|Dy_n - Dy_{n-1}\| \le q\|y_n - y_{n-1}\| \le \ldots \le q^n \underbrace{\|y_1 - y_0\|}_{=const}, \quad 0 \le q < 1$, то общий член ряда мажорируется членом бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а, тем самым, последовательность y_n сходится по признаку Вейерштрасса, т.е. $y_n \to y, \quad y \in B$.

Покажем, что $Dy = y$, т.е. $y -$ неподвижная точка оператора. Пусть это не так: $Dy = \tilde{y}, \quad \tilde{y} \neq y$. Тогда для любого натурального n имеет место $0 < \|y - \tilde{y}\| \le \|\tilde{y} - y_{n+1}\| + \|y_{n+1} - y\| = \|Dy - Dy_n\| + \|y_{n+1} - y\| \le q\|y - y_n\| + \|y_{n+1} - y\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, из чего следует, что $\|y - \tilde{y}\| = 0$, или $y = \tilde{y}$. Теорема доказана.

Теорема. Пусть D - оператор, отображающий банахово пространство B в себя, и существует натуральное число k такое, что D^k - сжимающий оператор. Тогда существует единственная неподвижная точка оператора D (такая, что $Dy = y$), причем y может быть найдено методом последовательных приближений: для любого $y_0 \in B$: $y_{n+1} = D\, y_n, \quad n = 0,1,\ldots,\ y_n \to y$.

Доказательство. 1) Возьмем любой элемент y_0 и получим последовательность

$$
\begin{array}{ccccccccc}
y_0 & y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{2k-1} & y_{2k}, \cdots \\
 & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\
 & Dy_0 & & D^{k-1} y_0 & D^k y_0 & D^{k+1} y_0 & \ldots & D^{2k-1} y_0 & D^{2k} y_0
\end{array}
$$

Рассмотрим подпоследовательности

$y_0, \quad y_k = D^k y_0, \qquad y_{2k} = D^k (D^k y_0), \ldots \to \quad y$ (т.к. D^k - сжимающий);

$y_1, \quad y_{k+1} = D^k y_1, \quad y_{2k+1} = D^k (D^k y_1), \ldots \to \quad y$ (y то же, т.к. D^k - сжимающий, и его неподвижная точка не зависит от выбора начального приближения в методе последовательных приближений);

………

$y_{k-1}, \quad y_{2k-1} = D^k y_{k-1}, \quad y_{3k-1} = D^k (D^k y_{k-1}), \ldots \to \ y$.

Вернемся к исходной последовательности и заметим, что она состоит из k подпоследовательностей, каждая из которых сходится к y . Отсюда легко следует, что и вся последовательность сходится к y . Очевидно, что указанный элемент y и является неподвижной точкой оператора D^k .

2) Докажем, что неподвижные точки операторов D и D^k совпадают.

Пусть y - неподвижная точка оператора D, т.е. $y = Dy$. Подействуем в последнем равенстве слева и справа $(k-1)$ раз оператором D. Получим $y = D^k y$, т.е. неподвижная точка оператора D является неподвижной точкой оператора D^k. В силу того, что D^k - сжимающий оператор и, следовательно, имеет только одну неподвижную точку, неподвижная точка оператора D единственна (если она существует).

Докажем обратное утверждение. Пусть y - неподвижная точка оператора D^k, т.е. $y = D^k y$, тогда $Dy = D(D^k)^n y = D^{nk}(Dy) \underset{n\to\infty}{\to} y$ в силу того, что метод простой итерации сходится к неподвижной точке независимо от начального приближения. В результате $y = Dy$, т.е. y - неподвижная точка оператора D. Теорема доказана.

§10. Уравнения Фредгольма 2-го рода с «малыми» λ.

Будем рассматривать интегральный оператор A: $Ay \equiv \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$, где ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных x,s, но не предполагается, вообще говоря, симметрическим.

Определим оператор D: $Dy = \lambda Ay + f = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$, $\quad f(x)$ - заданная непрерывная функция.

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода можно записать в операторном виде: $y(x) = \lambda A y + f$ или $y = Dy$.

Чтобы применить теорему о неподвижной точке, доказанную в предыдущем параграфе, оператор D нельзя рассматривать в пространстве $h[a,b]$, т.к. это – неполное пространство. Будем рассматривать оператор D: $C[a,b] \to C[a,b]$ ($C[a,b]$- банахово, т.е. полное нормированное пространство). Очевидно, что D является непрерывным, вообще говоря, нелинейным оператором, а решение интегрального уравнения является его неподвижной точкой.

Найдем достаточные условия, при которых оператор D является сжимающим. Возьмем произвольные $y_1, y_2 \in C[a,b]$ и определим

$$z_1 = \lambda A y_1 + f = D y_1; \qquad z_2 = \lambda A y_2 + f = D y_2 \quad .$$

Обозначим $\max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)| = M$ и для любого $x \in [a,b]$ получим оценку

$$|z_1(x) - z_2(x)| = \left| \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\big(y_1(s) - y_2(s)\big) ds \right| \le |\lambda| M \left(\max_{s\in[a,b]} |y_1(s) - y_2(s)| \right) \big(b-a\big) = |\lambda| M\,(b-a) \|y_1 - y_2\|_{C[a,b]}.$$

Отсюда $\|z_1 - z_2\|_{C[a,b]} = \|Dy_1 - Dy_2\|_{C[a,b]} \le |\lambda| M\,(b-a) \|y_1 - y_2\|_{C[a,b]}$.

Обозначим $q = |\lambda| M\,(b-a)$ и потребуем, чтобы выполнялось условие $q < 1$. В этом случае оператор D, действующий в банаховом пространстве $C[a,b]$, является сжимающим и, следовательно, имеет место доказанная в предыдущем параграфе теорема о неподвижной точке.

Теорема. Если $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ (такие λ будем называть «малыми»), то неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет, и притом единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x) \in C[a,b]$, причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Следствие 1. Если $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$, то однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. На интервале $0 < |\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ нет характеристических чисел интегрального оператора A. Если у оператора A есть характеристические числа, то $|\lambda_{\min}| \ge \dfrac{1}{M(b-a)}$.

Рассмотрим метод последовательных приближений в данном случае.

Пусть $y_0 \equiv 0,\quad y_{n+1} = \lambda A y_n + f,\quad n = 0,1,2,...$. Тогда:

1) $y_1 = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\cdot 0 \cdot ds + f(x) = f(x)$;

2) $y_2 = \lambda \int\limits_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x)$;

3)

$$y_3 = \lambda^2 \int\limits_a^b K(x,\xi)\left(\int\limits_a^b K(\xi,s) f(s)\,ds\right)d\xi + \lambda\int\limits_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x) = \lambda^2 \int\limits_a^b \underbrace{\left(\int\limits_a^b K(x,\xi) K(\xi,s) d\xi\right)}_{K_2(x,s)} f(s) ds +$$

$$+\lambda\int\limits_a^b K(x,s) f(s) ds + f(x),$$ где $K_2(x,s)$ - повторное (итерированное) ядро.

Продолжая процесс, получим $y_{n+1} = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + ... + \lambda^{n-1} A^{n-1} f + \lambda^n A^n f$, где A^n – интегральный оператор с повторным ядром $K_n(x,s) = \int\limits_a^b K(x,\xi) K_{n-1}(\xi,s) d\xi$, $n = 2,3,...,$ а $K_1(x,s) \equiv K(x,s)$.

Мы уже доказали, что последовательность y_n имеет предел y, являющийся решением интегрального уравнения, причем y представляется рядом Неймана:

$$y = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + ... + \lambda^n A^n f + ...$$

Полученный результат можно представить в операторной форме. При «малых» λ решение интегрального уравнения существует и единственно. Если мы перепишем уравнение $y = \lambda A y + f$ в виде $(I - \lambda A) y = f$, то из доказанного следует существование обратного оператора, определенного на всем пространстве $C[a,b]$: $y = (I - \lambda A)^{-1} f$. Покажем, что это выражение можно записать как $y = f + \lambda R_\lambda f$, где R_λ - интегральный оператор с непрерывным по переменным x, s ядром $R(x,s,\lambda)$ (резольвентой), т.е. $y = f + \lambda \int\limits_a^b R(x,s,\lambda) f(s)\, ds$, или $(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda R_\lambda$.

Докажем, что ряд $\underbrace{K_1(x,s)}_{=K(x,s)} + \lambda K_2(x,s) + ... + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \dots$ сходится равномерно относительно $x, s \in [a,b]$.

1) $|K_1(x,s)| = |K(x,s)| \le M$;

2) $|K_2(x,s)| \le \int\limits_a^b |K(x,\xi)||K(\xi,s)| d\xi \le M^2 (b-a)$;

…

n) $|K_n(x,s)| \le M^n (b-a)^{n-1}$;

….

Отсюда $\quad |\lambda^{n-1} K_n(x,s)| \le \underbrace{(|\lambda| M(b-a))^{n-1}}_{q^{n-1}} M$, где $\quad 0 \le q = |\lambda| M(b-a) < 1$.

По признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s)$ сходится равномерно, поскольку общий член этого ряда мажорируется общим членом бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Обозначим $K(x,s) + \lambda K_2(x,s) + ... = R(x,s,\lambda)$.

В силу равномерной сходимости резольвента $R(x,s,\lambda)$ непрерывна по совокупности переменных (x,s). Суммируя геометрическую прогрессию, получаем оценку $\quad |R| \le \dfrac{M}{1-|\lambda| M(b-a)}$.

В силу равномерной сходимости записанного выше функционального ряда можно поменять местами интегрирование и суммирование и записать решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s) ds .$$

Рассмотрим теперь вопросы <u>корректности математической постановки</u> задачи решения уравнения Фредгольма $y = \lambda Ay + f$ для «малых» λ при условии, что это уравнение рассматривается в пространстве $C[a,b]$.

Необходимо ответить на три вопроса:

1) Существование решения. Мы доказали, что решение существует для любой непрерывной функции $f(x)$.

2) Единственность решения. Мы доказали, что решение единственно.

3) Устойчивость (непрерывная в пространстве $C[a,b]$ зависимость решения от неоднородности $f(x)$).

Докажем устойчивость. Пусть заданы "точная" неоднородность f и "возмущенная" (заданная с ошибкой) $\tilde{f} = f + \delta f$. По доказанному выше и для "точной", и для "возмущенной" неоднородностей уравнения $y = \lambda Ay + f$ и $\tilde{y} = \lambda A\tilde{y} + \tilde{f}$ имеют решения, представимые с помощью резольвентного оператора. Запишем их разность

$$\tilde{y} - y = \tilde{f} - f + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda)(\tilde{f} - f) ds .$$

Далее $\quad \|\tilde{y} - y\|_{C[a,b]} \le \|\tilde{f} - f\|_{C[a,b]} (1 + |\lambda| M_R (b-a))$, где $|R| \le \dfrac{M}{1-|\lambda| M(b-a)} = M_R$.

Если $\|\delta f\| \to 0$, то и $\|\delta y\| = \|\tilde{y} - y\|_{C[a,b]} \to 0$, т.е. мы доказали непрерывную зависимость решения от неоднородности в норме пространства $C[a,b]$. Более того, полученное неравенство позволяет получить оценку погрешности решения, если известна оценка погрешности неоднородности.

Следовательно, все три требования к корректности решения данного уравнения выполнены, и задача решения уравнения Фредгольма 2-го рода с “малым λ” в пространстве $C[a,b]$ корректна (корректно поставлена).

Докажите самостоятельно, что при тех же условиях эта задача корректна и в пространстве $h[a,b]$.

§11. Уравнения Вольтерра 2-го рода.

Рассмотрим уравнение Вольтерра 2-го рода в операторной форме $y = \lambda A y + f$, где оператор A имеет вид

$$Ay = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds\,, \qquad x, s \in [a,b]\,.$$

.

Ядро $K(x,s)$ - непрерывно по совокупности переменных на своей треугольной области определения $\Delta = \{x, s : a \le s \le x \le b\}$ и не равно нулю тождественно, $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция.

Докажите самостоятельно следующие утверждения (действуя аналогично проведенным ранее доказательствам соответствующих свойств оператора Фредгольма):

1) Если $y(s)$ - непрерывная на $[a,b]$ функция, то $z(x) = \int_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds$ - непрерывная на $[a,b]$ функция, т.е. можно рассматривать оператор A как действующий в пространствах $C[a,b] \to C[a,b]$ или $h[a,b] \to h[a,b]$.

2) Интегральный оператор Вольтерра является вполне непрерывным при действии: $h[a,b] \to C[a,b], \quad h[a,b] \to h[a,b]$.

Покажем, что интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода можно решать для любого λ методом последовательных приближений при любой $f(x) \in C[a,b]$, т.е.

$$y_{n+1} = \lambda\, A\, y_n + f, \qquad y_0 \in C[a,b] \quad .$$

Определим оператор D: $C[a,b] \to C[a,b]$ следующим образом: для любого $y \in C[a,b]$ $\quad Dy \equiv \lambda Ay + f$. Покажем, что оператор D (вообще говоря, не сжимающий) обладает тем свойством, что некоторая его степень - оператор D^k - сжимающий (натуральное число k зависит от λ, но не зависит от f).

Теорема. Для любого λ существует натуральное число k такое, что D^k - сжимающий оператор.

<u>Доказательство.</u> Возьмем две непрерывные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Определим $z_j = D\, y_j$, $j = 1, 2$, тогда $|z_1(x) - z_2(x)| = |Dy_1 - Dy_2| = |\lambda|\,|Ay_1 - Ay_2|$.

Обозначим $\max\limits_{x,s\in\Delta} |K(x,s)| = M$. Имеет место неравенство

$$|Ay_1 - Ay_2| = \left| \int_a^x K(x,s)\big(y_1(s) - y_2(s)\big) ds \right| \le M\,(x-a) \|y_1 - y_2\|_{C[a,b]}\,.$$

Отсюда

$$\|Ay_1 - Ay_2\|_{C[a,b]} \le M\,(b-a) \|y_1 - y_2\|_{C[a,b]}$$

и

$$\|Dy_1 - Dy_2\|_{C[a,b]} \le |\lambda|\, M\,(b-a) \|y_1 - y_2\|_{C[a,b]}\,.$$

Далее

$$|\, D^2 y_1 - D^2 y_2\, | \le \left| \lambda^2 \int_a^x K(x,s)\ \big(Ay_1 - Ay_2\big)\ ds \right| \le |\lambda|^2\ \frac{M^2}{2!}\ (x-a)^2\ \|y_1 - y_2\|_{C[a,b]} \le$$

$$\le |\lambda|^2\ \frac{M^2}{2!}\ (b-a)^2\ \|y_1 - y_2\|_{C[a,b]}\ ,$$

следовательно, $$\left\|D^2 y_1 - D^2 y_2\right\|_{C[a,b]} \le |\lambda|^2 \frac{M^2}{2!}(b-a)^2 \left\|y_1 - y_2\right\|_{C[a,b]},$$

$$\ldots$$

$$\left\|D^n y_1 - D^n y_2\right\|_{C[a,b]} \le \underbrace{|\lambda|^n \frac{M^n}{n!}(b-a)^n}_{(q_n)} \left\|y_1 - y_2\right\|_{C[a,b]}.$$

Обозначим $q_n = |\lambda|^n \frac{M^n}{n!}(b-a)^n$. Ясно, что для любого λ $q_n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому, при достаточно больших n выполнено неравенство $q_n < 1$. В качестве k выберем минимальное натуральное n, при котором $|\lambda|^n \frac{M^n}{n!}(b-a)^n < 1$, тогда что D^k - сжимающий оператор. Теорема доказана.

Теперь мы можем применить теорему о неподвижной точке, доказанную в конце параграфа 9, и получить следствия.

Следствие 1. При любом λ однородное уравнение Вольтерра 2-го рода имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. Оператор Вольтерра не имеет характеристических чисел.

Таким образом, оператор Вольтерра является примером вполне непрерывного оператора, не имеющего ни одного характеристического числа (нетрудно показать, что оператор Вольтерра вполне непрерывный из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, но не самосопряженный).

Следствие 3. Решение уравнения Вольтерра 2-го рода можно найти методом последовательных приближений, который в данном случае называется методом Пикара. Для любого начального приближения $y_0 \in C[a,b]$

$$y_{n+1} = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y_n(s)\, ds + f(x), \qquad n = 0,1,2,\ldots, \qquad \text{или} \qquad y_{n+1} = \lambda A y_n + f\ .$$

Если $y_0 = 0$, то получаем ряд Неймана: $y = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^n A^n f + \ldots$.

<u>Экзаменационные вопросы</u>

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение сжимающего оператора.
2. Сформулировать определение неподвижной точки оператора.
3. Сформулировать теорему о существовании неподвижной точки у сжимающего оператора. Как можно найти неподвижную точку?
4. Записать метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ.
5. Сформулировать определение повторного (итерированного) ядра интегрального оператора Фредгольма. Ядром какого интегрального оператора оно является?
6. Сформулировать теорему о разрешимости интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать теорему о существовании неподвижной точки у сжимающего оператора.
2. Доказать теорему о существовании неподвижной точки у оператора, натуральная степень которого является сжимающим оператором.
3. Доказать, что сжимающий оператор является непрерывным.
4. Доказать, что если λ «мало», то неоднородное уравнение Фредгольма 2 рода имеет, и притом единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x) \in C[a,b]$, причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений.
5. Доказать, что если λ «мало», то однородное уравнение Фредгольма 2 рода имеет только тривиальное решение.
6. Доказать сходимость ряда Неймана для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ и получить выражение для резольвенты.
7. Доказать, что интегральное уравнение типа Вольтерра имеет и притом единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$.
8. Доказать, что однородное интегральное уравнение типа Вольтерра имеет только тривиальное решение.
9. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, умноженный на «малое» λ, является сжимающим при действии в $C[a,b]$.
10. Определим оператор *D*: $C[a,b] \to C[a,b]$ следующим образом: для любого $y \in C[a,b]$ $Dy \equiv \lambda Ay + f$, где A – интегральный оператор Вольтерра с непрерывным ядром, $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция. Доказать, что для любого λ существует натуральное число k такое, что D^k - сжимающий оператор.
11. Доказать, что если оператор D действует в полном нормированном пространстве, а оператор D^k (*k* – натуральное число) сжимающий, то неподвижные точки операторов D и D^k совпадают, из чего следует, что оператор D имеет единственную неподвижную точку.
12. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий в $C[a,b]$, не имеет характеристических чисел на интервале (0, 1/(M(b-a)), где $M = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$.
13. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий в $h[a,b]$, не имеет характеристических чисел на интервале (0, 1/(M(b-a)), где $M = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$.
14. Доказать, что минимальное по модулю характеристическое число интегрального оператора Фредгольма, действующего в $C[a,b]$, удовлетворяет неравенству $|\lambda_{\min}| \geq \dfrac{1}{M(b-a)}$, где $M = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$.
15. Доказать, что минимальное по модулю характеристическое число интегрального оператора Фредгольма, действующего в $h[a,b]$, удовлетворяет неравенству $|\lambda_{\min}| \geq \dfrac{1}{M(b-a)}$, где $M = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$.
16. Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в пространстве $C[a,b]$, не имеет характеристических чисел.
17. Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в пространстве $h[a,b]$, не имеет характеристических чисел.

Лекция №7

§12. Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами.

Этот случай отличается тем, что решение интегрального уравнения сводится к решению линейной алгебраической системы и может быть легко получено известными из курса линейной алгебры методами.

Рассмотрим уравнения Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x), \qquad x, s \in [a,b]$$

где ядро $K(x,s)$ имеет вид $K(x,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s)$. Напомним, что ядро такого вида называется <u>вырожденным</u>.

Предположим, что функции $a_j(x), b_j(s)$ - непрерывны по своим аргументам на отрезке $[a,b]$; $a_1(x),...,a_n(x)$ – линейно независимы; $b_1(s),...,b_n(s)$ - линейно независимы (эти предположения не ограничивают общность), а $f(x)$ - заданная непрерывная функция.

Покажем, что решение интегрального уравнения Фредгольма может быть сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений. Обозначив $c_j = \int_a^b b_j(s)\, y(s)\, ds$, где c_j - неизвестные пока числа, перепишем исходное интегральное уравнение в виде

$$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\, a_j(x) + f(x).$$

Далее, умножая обе части этого равенства на $b_i(x)$, $i = 1,...,n$, и интегрируя от a до b, имеем:

$$c_i = \int_a^b y(x)\, b_i(x)\, dx = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x)\, b_i(x)\, dx}_{k_{ij}} + \underbrace{\int_a^b f(x)\, b_i(x)\, dx}_{f_i}.$$

Итак, мы получили систему линейных алгебраических уравнений

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, c_j = f_i, \quad i = 1,...,n.$$

В качестве упражнения, докажите сами, что задача решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и задача решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром эквивалентны.

Рассмотрим определитель полученной системы линейных алгебраических уравнений:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & ... & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & ... & -\lambda k_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & ... & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель $D(\lambda)$ не равен нулю тождественно, т.к. $D(0) = 1$, причем $D(\lambda)$ - полином степени n от параметра λ. Число его корней не превосходит n. Вещественные корни полинома $D(\lambda)$ - это характеристические числа интегрального уравнения с вырожденным ядром.

Для каждого заданного значения λ возможны два случая: 1) $D(\lambda) \neq 0$; 2) $D(\lambda) = 0$.

Рассмотрим первый случай $D(\lambda) \neq 0$.

Теорема. Если λ не является характеристическим числом (т.е. $D(\lambda) \neq 0$), то интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет, и притом единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x)$.

Решение находится по формулам Крамера: $c_i = \dfrac{1}{D(\lambda)} \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda) f_k$, где $D_{ki}(\lambda)$ - алгебраические дополнения i-го столбца определителя $D(\lambda)$. Таким образом

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\ a_i(x) \int_a^b f(s) b_k(s)\, ds .$$

Так как в выражении для $y(x)$ суммы конечные, то можно поменять местами операции суммирования и интегрирования. Получим интегральное представление решения в виде $y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,s,\lambda)\, f(s)\, ds$, где обозначено $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{D(\lambda)} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\ a_i(x)\ b_k(s)$, а $D(\lambda)$ и $D_{ki}(\lambda)$ называются определителями Фредгольма.

<u>Замечание</u>. Формула $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{D(\lambda)} \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\ a_i(x)\ b_k(s)$ дает представление для резольвенты оператора Фредгольма в случае непрерывного вырожденного ядра. Ранее нами уже были получены представления для резольвенты при других предположениях относительно ядра $K(x,s)$.

Перейдем ко второму случаю, т.е. $D(\lambda) = 0$.

Рассмотрим сначала однородное уравнение, т.е. положим $f(x) \equiv 0$. Тогда, используя введенные выше обозначения, получим $y(x) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\ a_j(x)$ и однородную СЛАУ для определения неизвестных c_j: $\qquad c_i - \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} k_{ij}\, c_j = 0 \qquad i,j = \overline{1,n}$.

Так как λ – характеристическое число, то однородная система имеет нетривиальное решение (вообще говоря, может быть несколько линейно независимых решений). Пусть данному λ соответствует p линейно независимых решений, где $1 \leq p \leq n$ (число линейно независимых решений – это кратность характеристического числа), причем $p = n - r$, r – ранг матрицы $I - \lambda K$, где $K = \{k_{ij}\}$, $i,j = 1,...n$.

Пусть $\left(c_1^{(l)},...,c_n^{(l)}\right)$, $l = 1,2,...,p$ - нетривиальные решения однородной СЛАУ. Тогда нетривиальные решения однородного уравнения Фредгольма 2-го рода можно записать в виде

$$\varphi_l(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i^{(l)}\, a_i(x), \qquad l = 1,2,...,p .$$

Так как векторы $\left(c_1^{(l)},...,c_n^{(l)}\right)$, $l = 1,2,...,p$, линейно независимы, и функции $a_1(x),...,a_n(x)$ также линейно независимы, то однородное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет p линейно независимых решений, а общее решение его представимо в виде $y(x)=\sum_{l=1}^{p}\alpha_l\,\varphi_l(x)$, где α_l - любые вещественные числа.

Напомним некоторые сведения из линейной алгебры. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$BX=F\ ;\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in R^n;\quad F=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}\in R^n.$$

B - линейный оператор: $R^n\to R^n$, его ранг $r(B)$ равен размерности $R(B)$. Однородное уравнение $BX=0$ имеет $(n-r)$ линейно независимых решений.

Рассмотрим теперь СЛАУ $B^*X=G$, B^* - транспонированная матрица. В курсе линейной алгебры было доказано, что ранг В равен рангу В*. Следовательно, однородное уравнение $BX=0$ с матрицей B и однородное уравнение $B^*X=0$ с матрицей B^* имеют одинаковое число линейно независимых решений.

<u>Определение</u>. <u>Сопряженным</u> (<u>союзным</u>) интегральным уравнением называется уравнение с ядром $K^*(x,s)=K(s,x)$.

Наряду с уравнением $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds+f(x)$ или, в операторной форме $y=\lambda Ay+f$, мы будем рассматривать <u>союзное</u> с ним интегральное уравнение $\psi(x)=\lambda\int_a^b K^*(x,s)\psi(s)\,ds+g(x)$ ($g(x)$- непрерывная функция), или в операторной форме $\psi=\lambda A^*\psi+g$. Подставляя в последнее соотношение выражение для ядра, получим $\psi(x)=\lambda\int_a^b\sum_{j=1}^{n}a_j(s)b_j(x)\psi(s)\,ds+g(x)$ или $\psi(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j\,b_j(x)+g(x)$, где $\tilde{c}_j=\int_a^b\psi(s)\,a_j(s)\,ds$.

Запишем СЛАУ, эквивалентную союзному интегральному уравнению:

$$\tilde{c}_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}k_{ji}\,\tilde{c}_j=g_i,\qquad\text{или}\qquad(I-\lambda K^*)\widetilde{C}=G,$$

где $K^*=\{k_{ij}^*\}$, $k_{ij}^*=\int_a^b a_i(s)\,b_j(s)\,ds=k_{ji}$, $i,j=1,2,...,n$; $\tilde{C}=\begin{pmatrix}\tilde{c}_1\\ \vdots\\ \tilde{c}_n\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{pmatrix}$,

$g_i=\int_a^b g(s)\,a_i(s)\,ds,\quad i=1,...,n$.

Легко видеть, что мы получили СЛАУ с транспонированной матрицей, т.е. однородному исходному уравнению соответствует СЛАУ $(I-\lambda K)C=0$, а однородному союзному уравнению $(I-\lambda K^*)\widetilde{C}=0$.

Рассмотрим однородную систему $(I-\lambda K^*)\widetilde{C}=0$. Определитель ее $D(\lambda)=0$; линейно независимых решений $\left(\tilde{c}_1^{(l)},...,\tilde{c}_n^{(l)}\right)$, $l=1,2,...,p,$ - ровно столько же, сколько и для исходной системы, т.е. p. При этом решения однородного союзного интегрального уравнения Фредгольма имеют вид $\psi_l(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j^{(l)} b_j(x), \quad l = 1, 2, ..., p$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. Для любого λ число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода и союзного с ним однородного уравнения одинаково.

Перейдем теперь к изучению неоднородного уравнения в случае $D(\lambda) = 0$. Возникает вопрос: когда разрешима неоднородная система линейных алгебраических уравнений, определитель которой равен нулю?

Рассмотрим СЛАУ

$$BX = F, \quad B: \ R^n \to R^n, \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Лемма (о разложении пространства R^n): $R^n = R(B) \oplus Ker\, B^*$.

Перед тем, как доказывать лемму, выясним, как решать вопрос о разрешимости уравнения $BX = F$. Ответ очень простой: разрешимость означает, что $F \in R(B)$. Таким образом, чтобы убедиться в существовании решения, надо в соответствии с леммой доказать, что $F \perp Ker\, B^*$. Для этого достаточно найти базис пространства $Ker\, B^*$ и проверить ортогональность F базисным векторам $Ker\, B^*$.

Доказательство. Заметим, что $R(B) = \overline{R(B)}$ и $Ker\, B^* = \overline{Ker\, B^*}$ - это замкнутые линейные подпространства R^n (докажите их замкнутость самостоятельно).

1) Докажем, что из того, что $Y \in R(B)$ следует $Y \perp Ker\, B^*$. Так как $Y \in R(B)$, то существует элемент $X \in R^n$ такой, что $Y = BX$. Тогда для любого вектора $\psi \in Ker\ B^*$ выполнено $(Y, \psi) = (BX, \psi) = (X, B^*\psi) = 0$, т.е. $Y \perp Ker\, B^*$.

2) Докажем, что если $\psi \perp R(B)$, то $\psi \in Ker\, B^*$. В самом деле, $\psi \perp R(B)$ означает, что $0 = (\psi, BX) = (B^*\psi, X) \quad \forall X \in R^n$. Отсюда вытекает, что $B^*\psi = 0$ или $\psi \in Ker\, B^*$. Лемма доказана.

Пусть $BX = F$. Как определить, есть ли решения? Надо найти все нетривиальные линейно независимые решения уравнения $B^*\psi = 0$. Если F ортогональна всем этим решениям, то неоднородная система имеет решения; если F не ортогональна всем нетривиальным решениям уравнения $B^*\psi = 0$, то уравнение $BX = F$ не имеет решений.

Получаем следующие условие разрешимости СЛАУ для уравнения Фредгольма 2-го рода в случае $D(\lambda) = 0$:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \tilde{c}_1^{(l)} \\ \vdots \\ \tilde{c}_n^{(l)} \end{pmatrix} \qquad l = 1, ..., p.$$

Чтобы СЛАУ для неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы вектор правой части был ортогонален всем линейно независимым решениям СЛАУ для однородного союзного уравнения, т.е. $\sum_{i=1}^{n} f_i \tilde{c}_i^{(l)} = 0, \quad l = 1, ..., p$ или $\int_a^b f(x) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i^{(l)} b_i(x)}_{\psi_l(x)} dx = 0$, где $\psi_l(x)$ -

решения однородного союзного уравнения Фредгольма. Таким образом $\int_a^b f(x)\psi_l(x)\,dx = 0, \qquad l = 1,\ldots,p$, и доказаны следующие утверждения.

Теорема. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром разрешимо тогда и только тогда, когда неоднородность $f(x)$ ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения.

Теорема. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром разрешимо для любой неоднородности $f(x)$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

§13. Уравнение Фредгольма 2-го рода с произвольными непрерывными ядрами. Теоремы Фредгольма.

Перейдем теперь к общему случаю непрерывного (несимметрического) ядра. Оказывается, что для каждого фиксированного λ неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с невырожденным ядром можно заменить эквивалентным интегральным уравнением с вырожденным ядром.

Теорема. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода $y = \lambda A y + f$ с невырожденным ядром при фиксированном λ можно заменить эквивалентным интегральным уравнением с вырожденным ядром.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ ядро интегрального уравнения можно представить в виде суммы $K(x,s) = K_в(x,s) + K_\varepsilon(x,s)$, где $K_в(x,s) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k(x) b_k(s)$ - вырожденное ядро, $K_\varepsilon(x,s)$ - невырожденное ядро такое, что

$$\max_{x,s\in[a,b]} \left|K_\varepsilon(x,s)\right| = \max_{x,s\in[a,b]} \left|K(x,s) - K_в(x,s)\right| \le \varepsilon .$$

Аппроксимировать ядро вырожденным с любой заданной точностью можно хотя бы потому, что в двумерном случае верна теорема Вейерштрасса о равномерной аппроксимации на квадрате $[a,b]\times[a,b]$ непрерывной по совокупности переменных функции полиномами, зависящими от двух переменных: $P_N(x,s) = \sum_{\substack{n+k\le N \\ n,k=\overline{0,N}}} a_{nk}\, x^n s^k$.

Вернемся к интегральному уравнению и запишем его в виде $y = \lambda T_\varepsilon y + \lambda S_\varepsilon y + f$, где T_ε - интегральный оператор с вырожденным ядром $K_в(x,s)$, а S_ε - интегральный оператор с невырожденным ядром $K_\varepsilon(x,s)$. Будем считать, что λ фиксировано и перепишем уравнение в виде $(I - \lambda S_\varepsilon)y = \lambda T_\varepsilon y + f$.

Если по заданному λ выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $|\lambda| < \dfrac{1}{\varepsilon(b-a)}$, то λ станет “малым” для оператора S_ε, и оператор $(I - \lambda S_\varepsilon)$ будет обратимым: $(I - \lambda S_\varepsilon)^{-1} = I + \lambda R_\varepsilon$, где R_ε - интегральный оператор с ядром $R_\varepsilon(x,s,\lambda)$. Введем новую функцию: $(I - \lambda S_\varepsilon)y = Y$.
В силу обратимости оператора $(I - \lambda S_\varepsilon)$ имеет место взаимно однозначное соответствие: $y \Leftrightarrow Y$. Отсюда $Y = \lambda(T_\varepsilon + \lambda T_\varepsilon R_\varepsilon)Y + f$.

Покажем, что уравнение для Y является уравнением с вырожденным ядром. Ядро интегрального оператора $T_\varepsilon + \lambda T_\varepsilon R_\varepsilon$ вырождено так как ядро оператора T_ε вырождено, и

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k(x)\, b_k(\xi)\, R_\varepsilon(\xi,s,\lambda)\, d\xi = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k(x)\, \widetilde{b}_k(s,\lambda), \quad \text{где} \quad \widetilde{b}_k(s,\lambda) = \int_a^b b_k(\xi)\, R_\varepsilon(\xi,s,\lambda)\, d\xi .$$

Тем самым, мы показали, что любому интегральному уравнению с невырожденным ядром эквивалентно некоторое интегральное уравнение с вырожденным ядром. На основании этого можно получить результаты, аналогичные полученным выше для уравнений с вырожденными ядрами.

Сформулируем теперь 4 **теоремы Фредгольма**.

Теорема 1. Однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, \varphi(s)\, ds = 0 \tag{1}$$

и союзное с ним однородное уравнение

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K^*(x,s)\, \psi(s)\, ds = 0, \qquad K^*(x,s) = K(s,x) \tag{2}$$

при любом фиксированном λ имеют либо только тривиальные решения, либо одинаковое конечное число линейно независимых решений $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ и $\psi_1,\dots,\psi_n$ соответственно.

Теорема была доказана для интегральных уравнений с вырожденными и симметрическими ядрами. В общем случае она доказывается путем сведения интегрального уравнения с невырожденным ядром к интегральному уравнению с вырожденным ядром. То, что любое характеристическое число имеет конечную кратность, также было доказано ранее.

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы неоднородность $f(x)$ была ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения (2) ($f(x) \perp \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$, если λ - характеристическое число).

Теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер. В общем случае она доказывается путем сведения интегрального уравнения с невырожденным ядром к интегральному уравнению с вырожденным ядром.

Теорема 3 (**Альтернатива Фредгольма**).

Либо неоднородное уравнение (3) разрешимо для любой неоднородности $f(x)$ либо однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение.

Теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер. В общем случае она доказывается путем сведения интегрального уравнения с невырожденным ядром к интегральному уравнению с вырожденным ядром.

Теорема 4. Множество характеристических чисел однородного уравнения (1) не более, чем счетно, с единственной возможной предельной точкой ∞.

Этот результат справедлив для любого вполне непрерывного оператора. Нами он был получен для вполне непрерывных самосопряженных операторов и, тем самым, доказан для случая симметрических ядер. Для интегральных операторов с вырожденными ядрами результат тривиален.

Замечание. Все эти теоремы мы доказали для случая, когда $K(x,s)$ - непрерывная функция по совокупности переменных на $[a,b]\times[a,b]$; $f(x)$, $y(x)$ - непрерывные на $[a,b]$ функции; $K(x,s)$, $f(x)$, $y(x)$ - вещественные функции.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Записать интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.
2. Сформулировать определение союзного интегрального уравнения.
3. Сформулировать условие разрешимости неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.
4. Сформулировать теорему о числе линейно независимых решений однородного уравнения Фредгольма 2-го рода и союзного с ним (1-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
5. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода (2-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
6. Сформулировать альтернативу Фредгольма (3-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
7. Сформулировать теорему о характеристических числах интегрального оператора Фредгольма (4-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что если λ не является характеристическим числом, то интегральное уравнение Фредгольма 2 рода с вырожденным ядром имеет и притом единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$.
2. Доказать, что для любого λ число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром и союзного с ним однородного уравнения одинаково.
3. Доказать, что неоднородное уравнение Фредгольма 2 рода с вырожденным ядром разрешимо тогда и только тогда, когда неоднородность $f(x)$ ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения.
4. Доказать, что неоднородное уравнение Фредгольма 2 рода с вырожденным ядром разрешимо для любой неоднородности - непрерывной функции $f(x)$ - тогда и только тогда, когда однородное уравнение имеет только тривиальное решение.
5. Доказать эквивалентность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и задачи решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.
6. Получить уравнение для отыскания характеристических чисел интегрального оператора Фредгольма с вырожденным ядром.
7. Получить интегральное представление решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром через определители Фредгольма при условии, что λ не является характеристическим числом.
8. Доказать, что любое интегральное уравнение Фредгольма 2 рода $y = \lambda A y + f$ с невырожденным ядром при фиксированном λ можно заменить эквивалентным интегральным уравнением с вырожденным ядром.

Лекция №8

§14. Задача Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим начально-краевую задачу для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, описывающего малые поперечные колебания струны. Струна рассматривается как гибкая упругая нить. Если колебаний нет, то струна занимает отрезок $[0,l]$ на оси x. Колебания струны происходят в плоскости *(x,u)* и описываются функцией $u = u(x,t)$, $t \geq 0$ – время. В случае отсутствия внешних сил уравнение имеет следующий вид (так называемое однородное волновое уравнение):

$$\rho(x)u_{tt} = C_0 u_{xx}$$

(u_{tt} и u_{xx} - частные производные второго порядка по t и x соответственно).

Вывод этого уравнения можно найти в любом учебнике по уравнениям математической физики. Здесь $\rho(x)$ – линейная плотность, C_0 – натяжение струны, которое предполагается постоянным в процессе малых колебаний.

Для однозначного определения решения требуется задать начальные условия

$$u(x,0) = \phi(x); \quad u_t(x,0) = \psi(x);$$

($\phi(x)$ – начальное смещение, $\psi(x)$ – начальная скорость) и граничные условия

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0$$

(такие условия называются однородными граничными условиями первого рода).

Для решения поставленной начально-краевой задачи применим метод разделения переменных. Будем искать все неравные тождественно нулю решения однородного волнового уравнения, удовлетворяющие однородным граничным условиям и представимые в виде произведения $u = X(x)T(t)$. Подставляя это произведение в исходное уравнение, получаем

$$\rho(x)X(x)T''(t) = C_0 X''(x)T(t)$$

и разделяем переменные:

$$\frac{X''(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{C_0 T(t)}.$$

Последнее равенство возможно лишь в том случае, если

$$\frac{X''(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{C_0 T(t)} = -\lambda,$$

где λ - константа. Поэтому для функции $X(x)$ получаем уравнение

$$X''(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0.$$

Подставив произведение $X(x)T(t)$ в граничные условия, получим дополнительные условия для определения $X(x)$: $\quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0$.

Поскольку мы ищем нетривиальные решения, то необходимо решать задачу на собственные значения и собственные функции, т.е. найти все значения параметра λ, при которых существует нетривиальное решение уравнения

$$X''(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0,$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям первого рода

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Эта задача является частным случаем задачи Штурма-Лиувилля, которую мы исследуем ниже. Сейчас же мы выпишем решение в простейшем случае $\rho(x) = \rho_0 = const$.

Обозначив $\dfrac{C_0}{\rho_0} = a^2$, после разделения переменных получим уравнение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$$

и краевую задачу на собственные значения и собственные функции для $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \qquad X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

В дальнейшем будем считать, что $X(x)$ – вещественная функция. Можно доказать (см. ниже), что собственные значения могут быть только вещественными даже, если $X(x)$ – комплекснозначная функция. Легко убедиться также в том, что если λ отрицательное число или нуль, то краевая задача для $X(x)$ имеет только тривиальное решение. Рекомендуем читателю проделать соответствующие выкладки самостоятельно.

Итак, будем искать собственные значения только среди положительных λ. Общее решение уравнения в этом случае имеет вид $X(x) = C_1 \sin(x\sqrt{\lambda}) + C_2 \cos(x\sqrt{\lambda})$. Подставляя это выражение в первое граничное условие, найдем $C_2 = 0$. Подставляя его же во второе граничное условие и сокращая на C_1 (заметим, что $C_1 \neq 0$, т.к. мы ищем нетривиальное решение), получаем уравнение для собственных значений: $\sin(l\sqrt{\lambda}) = 0$. Отсюда собственные значения $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots,$ а собственные функции $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$.

Эти функции хорошо знакомы из курса математического анализа. Там было доказано, что данная система функций является замкнутой в пространстве $h[0,l]$. Заметим, что $\| X_n \|^2 = \frac{l}{2}$. Заметим также, что записанная задача является задачей на собственные значения и собственные функции для одномерного оператора Лапласа (взятого со знаком минус), поскольку $X''(x) \equiv \Delta_1 X(x)$, где Δ_1 - одномерный оператор Лапласа.

Для временной составляющей получаем уравнение $T_n'' + a^2 \lambda_n T_n = 0$. Отсюда $T_n = A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at$, где A_n, B_n - произвольные постоянные.

Решение начально-краевой задачи ищем теперь в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at \right) \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

т.е. в виде ряда Фурье по собственным функциям $X_n(x)$ с коэффициентами Фурье $T_n(t)$ (именно поэтому метод разделения переменных называют также методом Фурье). Каждый член ряда удовлетворяет как уравнению, так и однородным граничным условиям первого рода и представляет собой стоячую волну. Поэтому, если можно менять местами дифференцирование и суммирование, то записанный ряд удовлетворяет как уравнению, так и граничным условиям.

Попытаемся удовлетворить теперь и начальным условиям. Подставляя $t = 0$, получаем $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x)$, где $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$ - коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$.

Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, имеем $u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a \cdot B_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x$, где $B_n = \frac{2}{l}\frac{l}{\pi n a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$ - коэффициент Фурье функции $\psi(x)$.

Поскольку поведение ряда для решения определяется коэффициентами A_n и B_n, то возможность менять местами дифференцирование и суммирование определяется свойствами функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Этот вопрос подробно исследуется в курсе методов математической физики.

Рассмотренная задача на собственные значения и собственные функции является частным случаем задачи Штурма-Лиувилля, к изучению которой мы и приступаем.

Рассмотрим <u>первую краевую задачу</u> на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля (сокращенно задачу Штурма-Лиувилля):

$$\begin{cases} Ly+\lambda\rho(x)y=0 \\ y(a)=y(b)=0 \end{cases},$$

где оператор L имеет вид $Ly=\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)-q(x)y$, а функции $p(x),\ q(x),\ \rho(x)$ удовлетворяют следующим условиям: $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, а $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции, причем $\rho(x), p(x)>0$, а $q(x)\ge 0$ при $x\in[a,b]$.

Замечание. Возможны и другие типы краевых условий.

Докажем, что оператор L является симметрическим на подпространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций из $h[a,b]$, удовлетворяющих однородным граничным условиям первого рода. Из этого результата сразу следует, что при изучении задачи Штурма-Лиувилля достаточно ограничиться лишь вещественными λ.

Возьмем произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции $y(x)$ и $z(x)$, удовлетворяющие граничным условиям $y(a)=y(b)=z(a)=z(b)=0$.

Покажем, что $(Ly,z)=(y,Lz)$, где скалярное произведение берется в пространстве $h[a,b]$. Легко видеть, что

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)z(x)dx = p(x)\frac{dy}{dx}z(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{dy}{dx}\cdot\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right)dx = -y\,p\frac{dz}{dx}\Big|_a^b + \int_a^b y\,\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right)dx .$$

Подстановки обращаются в нуль в силу граничных условий. Отсюда сразу же следует симметричность оператора L.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\begin{cases} Ly=f(x) \\ y(a)=y(b)=0 \end{cases}.$$

Если существует функция Грина, то решение этой задачи для заданной непрерывной функции $f(x)$, может быть представлено в виде $y(x)=\displaystyle\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$,

где $G(x,\xi)$ - функция Грина, которая непрерывна по совокупности аргументов и симметрична, т.е. $G(x,\xi)=G(\xi,x)$ для любых $x,\ \xi\in[a,b]$.

Как было доказано в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений, для существования функции Грина достаточно доказать, что однородная краевая задача

$$\begin{cases} Ly=0 \\ y(a)=y(b)=0 \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение.

Допустим, что это не так. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что в некоторой точке $x_0\in(a,b)$ решение имеет максимальное положительное значение $y(x_0)>0$, причем $y'(x_0)=0$ (если решение не принимает положительных значений, то домножим его на –1). Поскольку $y(b)=0$, то найдется точка $x_1 \in (a,b)$, $x_0 < x_1$, такая что $y(x)>0$ для любого $x \in [x_0, x_1]$ и $y'(x_1)<0$.

Запишем однородное уравнение в виде $\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)=q(x)y$ и проинтегрируем его в пределах от x_0 до x_1. Учитывая знаки функций $p(x)$ и $q(x)$, получаем противоречие: $0 > py'\big|_{x_0}^{x_1} = \int\limits_{x_0}^{x_1} q(x)y(x)dx \geq 0.$

Итак, функция Грина существует. Интегрируя от *a* до *b* уравнение в задаче Штурма-Лиувилля, домножив его предварительно на функцию Грина, имеем

$$\begin{cases} Ly=-\lambda\rho(x)y \\ y(a)=y(b)=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y(x)=-\lambda\int\limits_a^b G(x,\xi)\,\rho(\xi)\,y(\xi)\,d\xi$$

В качестве упражнения, докажите, что задача Штурма-Лиувилля эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции

$$y(x)=-\lambda\int\limits_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)\,d\xi$$

для интегрального оператора с непрерывным ядром $G(x,\xi)\rho(\xi)$.

Ясно, что если $\rho(\xi)\neq 1$ тождественно, то ядро интегрального оператора не является симметрическим. Симметризуем его. Для этого умножим записанное выше уравнение слева и справа на $\sqrt{\rho(x)}$ и введем новую функцию $\varphi(x)=y(x)\sqrt{\rho(x)}$ и новое ядро $K(x,\xi)=\sqrt{\rho(x)}\,G(x,\xi)\sqrt{\rho(\xi)}$, которое является непрерывным и симметрическим.

Получаем задачу на характеристические числа и собственные функции для интегрального оператора с непрерывным симметрическим ядром

$$\varphi(x)=-\lambda\int\limits_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\,.$$

Докажем, что ядро *K(x,ξ)* является замкнутым. Для этого достаточно показать, что из равенства $\int\limits_a^b K(x,\xi)\,z(\xi)\,d\xi=0$ следует, что $z(\xi)\equiv 0$. Заметим, что предыдущее равенство имеет вид $\int\limits_a^b \sqrt{\rho(x)}\,G(x,\xi)\sqrt{\rho(\xi)}\,z(\xi)\,d\xi=0$ или $\int\limits_a^b G(x,\xi)\sqrt{\rho(\xi)}\,z(\xi)\,d\xi=0$.

Действуя оператором L на левую и правую часть этого равенства, получим, что для всех x имеет место $\sqrt{\rho(x)}\ z(x)=0$, что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема. Задача Штурма-Лиувилля эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции для интегрального оператора с непрерывным симметрическим замкнутым ядром.

Используя эквивалентность задачи Штурма-Лиувилля задаче на характеристические числа и собственные значения для интегрального оператора с симметрическим непрерывным и не равным тождественно нулю ядром, докажем следующие теоремы.

Теорема. Существует бесконечно много собственных значений λ_n.

Доказательство. Существование хотя бы одного характеристического числа λ_n для интегрального оператора с симметрическим непрерывным и не равным тождественно нулю ядром следует из результатов §4. Предположим, что характеристических чисел конечное число. Тогда, как было доказано в §6, ядро можно представить в виде

$K(x,s) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}$, где $\varphi_n(x)$ - ортонормированные собственные функции. Таким образом, ядро вырождено, а поэтому не может быть замкнутым. Теорема доказана.

Теорема. Каждое собственное значение задачи Штурма-Лиувилля имеет кратность единица.

Доказательство. Заметим, что собственное значение кратности единица называется простым собственным значением. Докажем, что каждое собственное значение является простым. Предположим, что это не так. Тогда некоторому собственному значению λ соответствуют две линейно независимые собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Поскольку дифференциальное уравнение в задаче Штурма-Лиувилля является линейным уравнением второго порядка, то $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Поэтому любое решение дифференциального уравнения $Ly + \lambda\rho(x)y = 0$ представимо в виде $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Поскольку функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ обращаются в нуль в точках a и b, то этим же свойством обладает и любое другое решение. Но это противоречит теореме существования решения задачи Коши для уравнения $Ly + \lambda\rho(x)y = 0$ с условиями Коши, имеющими, например, вид $y(a) = 1,\ \ y'(a) = 0$. Теорема доказана.

Теорема. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля ортогональны с весом $\rho(x)$.

Доказательство. По доказанному в § 5 собственные функции $\varphi_n(x)$ ортогональны. Более того, что их можно выбрать так, что они образуют ортонормированную систему, т.е.

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}.$$

Учитывая, что $\varphi_n(x) = y_n(x)\sqrt{\rho(x)}$, получим $\int_a^b y_k(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$,

что и требовалось доказать.

Теорема. Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля положительны.

Доказательство. Запишем уравнение в задаче Штурма-Лиувилля, которому удовлетворяет собственная функция $y_n(x)$, считая, что $y_n(x)$ нормирована с весом $\rho(x)$, т.е. $\int_a^b y_n^2(x)\,\rho(x)\,dx = 1$.

Умножим теперь уравнение на $y_n(x)$ и проинтегрируем от a до b по частям с учетом граничных условий. Получим

$$Ly_n + \lambda_n\,\rho\,y_n = 0 \Rightarrow \int_a^b y_n\left(Ly_n + \lambda_n\,\rho\,y_n\right)dx = \int_a^b y_n \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_n}{dx}\right)dx - \int_a^b q\,y_n^2\,dx + \lambda_n\int_a^b \rho\,y_n^2\,dx =$$

$$= -\int_a^b p\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b q\,y_n^2\,dx + \lambda_n = 0.$$

Отсюда $$\lambda_n = \int_a^b \left[q\,y_n^2 + p\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2\right]dx.$$

Поскольку $q(x) \geq 0,\ p(x) > 0$, а $y_n(x)$ не равно постоянной, то собственное значение λ_n строго положительно. Теорема доказана.

<u>*Следствие*</u>. Имеет место следующая оценка снизу для наименьшего собственного значения ($\tilde{x} \in [a,b]$):

$$\lambda_1 = \int_a^b \left[q\, y_1^2 + p\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 \right] dx \geq \int_a^b \frac{q(x)}{\rho(x)} \rho(x)\, y_1^2(x) dx \geq \frac{q(\tilde{x})}{\rho(\tilde{x})} \int_a^b \rho(x)\, y_1^2(x) dx = \frac{q(\tilde{x})}{\rho(\tilde{x})} \geq \min_{x\in[a,b]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \geq 0 .$$

Следующая теорема имеет исключительно важное значение в теории дифференциальных уравнений.

Теорема. (Стеклова). Любая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ и обращающаяся в нуль на концах отрезка функция $f(x)$ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)$, где коэффициенты Фурье вычисляются по формуле $f_n = \int_a^b f(x)\,\rho(x)\, y_n(x) dx$.

<u>Доказательство</u>. Подействуем на функцию $f(x)$ оператором L. Получим непрерывную функцию $h(x)$. Тогда функция $f(x)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} L\, f(x) = h(x) \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases}.$$

Используя функцию Грина, получаем:

$$f(x) = \int_a^b G(x,s)\, h(s)\, ds = \int_a^b K(x,s) \frac{h(s)}{\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(s)}} ds .$$

Введем новые функции $f(x)\sqrt{\rho(x)} = F(x)$ и $\dfrac{h(s)}{\sqrt{\rho(s)}} = H(s)$. Очевидно, что обе эти функции непрерывны на отрезке $[a,b]$, а $F(x)$ истокопредставима через симметрическое непрерывное ядро $K(x,s)$: $F(x) = \int_a^b K(x,s)\, H(s)\, ds$.

По теореме Гильберта-Шмидта $F(x)$ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по ортонормированной системе собственных функций интегрального оператора с ядром $K(x,s)$, т.е. $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\, \varphi_n(x)$, причем коэффициенты Фурье вычисляются по формулам $F_n = \int_a^b F(x)\, \varphi_n(x) dx$.

Поскольку $\varphi_n(x) = y_n(x)\sqrt{\rho(x)}$, то $\sqrt{\rho(x)}\, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\, y_n(x)\sqrt{\rho(x)}$, и после сокращения на $\rho(x)$ получим, что $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x)$. Докажите самостоятельно, что и после сокращения ряд сходится равномерно и абсолютно в силу свойств $\rho(x)$.

Для коэффициентов Фурье имеем

$$F_n = \int_a^b f(x)\sqrt{\rho(x)}\, y_n(x)\sqrt{\rho(x)}\, dx = \int_a^b f(x)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx = f_n .$$

Теорема Стеклова доказана.

В заключение параграфа заметим, что все полученные в данном параграфе результаты остаются справедливыми для второй краевой задачи (граничные условия имеют вид $y'(a)=0,\ \ y'(b)=0$), третьей краевой задачи (граничные условия имеют вид $y'(a)-h_1 y(a)=0,\ \ y'(b)+h_2 y(b)=0$, $h_1,\ h_2$ – положительные постоянные), а также для смешанных краевых задач, когда левом конце задается условие одного рода, а на правом другого. Необходимо помнить только, что у второй краевой задачи в случае $q(x)\equiv 0$, существует нулевое собственное значение.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Записать оператор Штурма-Лиувилля.
2. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля в случае однородных граничных условий первого рода.
3. Описать свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля в случае однородных граничных условий первого рода.
4. Сформулировать теорему Стеклова.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что оператор Штурма-Лиувилля является симметрическим в пространстве $h[a,b]$, если в качестве области его определения рассматривать подпространство дважды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[a,b]$.
2. Доказать, что задача Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции для интегрального оператора с непрерывным симметрическим и замкнутым ядром.
3. Доказать, что задача Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода имеет бесконечно много собственных значений.
4. Доказать, что собственные значения задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода простые (имеют кратность единица).
5. Доказать, что собственные функции задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода ортогональны с весом $\rho(x)$
6. Доказать, что собственные значения задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода положительны.
7. Доказать теорему Стеклова.
8. Доказать, что для минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода имеет место неравенство $\lambda_1 \geq \min\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{q(x)}{\rho(x)} \geq 0$.

Глава 2. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

<u>Лекция №9</u>

§1. Введение.

В этой главе мы будем рассматривать задачи отыскания экстремумов (максимумов или минимумов) функционалов. Сразу отметим, что такие задачи относятся к числу важнейших задач современной математики и исследуются во многих математических курсах таких, как, например, «Экстремальные задачи», «Оптимальное управление», «Линейное программирование», «Выпуклое программирование» и некоторых других. Вариационное исчисление является классическим разделом математики, основы вариационного исчисления заложены еще в 17-18 веках. Функционалы, которые исследуются в вариационном исчислении, будут описаны ниже.

Функционал – это оператор, множество значений которого состоит из чисел. Мы будем рассматривать только вещественные функционалы, множествами значений которых являются вещественные числа. В дальнейшем вместо слов «вещественный функционал» мы будем говорить просто «функционал».

Простейший пример функционала - интеграл $\int\limits_a^b y(x)dx$. Каждой функции $y(x)$, интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$, сопоставляется число – значение интеграла.

Типичной задачей вариационного исчисления является задача Дидоны: среди всех замкнутых плоских кривых заданной длины найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь. Хорошо известно, что это окружность.

§2. Понятие функционала. Вариация функционала.

Мы будем изучать функционалы, действующие из линейного нормированного пространства Y в пространство вещественных чисел R^1. В качестве пространства Y мы будем рассматривать следующие пространства:

1) $C[a,b]$ – пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, в котором определена норма

$$\|y\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|y(x)| \; .$$

Напомним, что сходимость по норме этого пространства называется равномерной сходимостью на отрезке $[a,b]$.

2) $C^{(1)}[a,b]$ – пространство функций, непрерывных вместе со своими первыми производными на отрезке $[a,b]$. Норма в этом пространстве определяется как

$$\|y\|_{C^{(1)}[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|y(x)| + \max_{x\in[a,b]}|y'(x)| .$$

Можно ввести эквивалентную норму:

$$\|y\|_{C^{(1)}[a,b]} = \max\{\|y\|_{C[a,b]}, \|y'\|_{C[a,b]}\}$$

(сходимость функциональных последовательностей по обеим введенным нормам одна и та же - равномерная на отрезке $[a,b]$ сходимость как последовательности функций, так и их первых производных). В дальнейшем мы будем пользоваться только первой нормой.

3) $C^{(p)}[a,b]$ – пространство функций, непрерывных на $[a,b]$ вместе со своими p-ми производными включительно, нормированное с помощью

$$\|y\|_{C^{(p)}[a,b]} = \sum_{k=0}^{p} \max_{x\in[a,b]} \left| y^{(k)}(x) \right|.$$

Сходимость по норме этого пространства – равномерная на отрезке $[a,b]$ сходимость с производными до p - го порядка включительно.

Итак, функционал $V[y]: Y \to R^1$, где в качестве Y мы будем рассматривать только введенные выше функциональные пространства или их подмножества $Y' \subseteq Y$, тогда $V: Y' \to R^1$.

Приведем пример функционала: $V[y] = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ - длина кривой, описываемой функцией $y(x)$, $V: C^{(1)}[a,b] \to R^1$

Определение. Функционал $V[y]$ называется непрерывным в точке $y_0 \in Y$, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall y \in Y : \|y - y_0\| \le \delta$ выполняется неравенство $\left|V[y] - V[y_0]\right| \le \varepsilon$.

Аналогично можно дать определение непрерывности функционала в точке $y_0 \in Y'$, если функционал рассматривается только на множестве Y'. Функционал называется непрерывным на всём пространстве Y (множестве Y'), если он непрерывен в каждой точке $Y(Y')$.

Определение. Будем называть (замкнутым) шаром с центром в точке y_0 и радиусом $r > 0$ множество точек:

$$\overline{S_r}(y_0) = \{y \in Y : \|y - y_0\| \le r\}.$$

Определение. Точка y_0 является точкой локального минимума (максимума) функционала $V[y]$, если найдется $r > 0$ такое, что $V[y] \ge V[y_0]$ ($V[y] \le V[y_0]$) для любого $y \in \overline{S_r}(y_0)$ (или $y \in \overline{S_r}(y_0) \cap Y'$, если речь идет о локальном минимуме на множестве Y'). В дальнейшем мы будем говорить об отыскании только локальных минимумов или максимумов (локальных экстремумов), причем слово «локальный» мы будем опускать.

Пусть $y_0 \in Y$ - произвольная фиксированная точка, $h \in Y$ - произвольный элемент Y. Рассмотрим функцию $\Phi(t) \equiv V[y_0 + th]$ вещественной переменной t.

Определение. Если для любого $h \in Y$ существует производная $\Phi'(t)\big|_{t=0} = \dfrac{d}{dt} V[y_0 + th]\Big|_{t=0}$, то эта производная называется вариацией функционала $V[y]$ в точке y_0 и обозначается $\delta V(y_0, h)$. Очевидно, что $V[y_0 + th] - V[y_0] = t\delta V(y_0, h) + o(|t|)$.

Чтобы разъяснить смысл введенного понятия, вспомним математический анализ и рассмотрим случай, когда $V: R^n \to R^1$ (функция многих переменных). Тогда $\Phi'(t)\big|_{t=0} = \dfrac{d}{dt} V[y_0 + th]\Big|_{t=0}$ называется производной функции V по направлению h.

Теперь определим, что такое <u>дифференцируемый функционал</u>. Функционал $V[y]$ называется дифференцируемым в точке y_0, если для любого $h \in Y$ $V[y_0 + h] - V[y_0] = dV(y_0, h) + o(\|h\|)$, где $dV(y_0, h)$ - линейный и непрерывный по h функционал, который иногда называют <u>сильной вариацией</u> в точке y_0 (в отличие от функционала $\delta V(y_0, h)$ (от аргумента h), называемого в этом случае <u>слабой вариацией</u> в точке y_0).

Заметим, что точно такое же определение дифференцируемости вводилось и в курсе математического анализа для функций многих переменных $V: R^n \to R^1$. При этом доказывалось, что, если функция многих переменных дифференцируема в точке y_0, то в этой точке существуют производные по всем направлениям. Обратное, вообще говоря, неверно. Точно такая же ситуация и в вариационном исчислении - если существует сильная вариация, то существует и вариация (слабая вариация). Обратное неверно.

Далее мы будем использовать только данное выше следующее вариации

$$\delta V(y_0, h) = \frac{d}{dt} V[y_0 + th]_{t=0} .$$

Теорема (необходимое условие экстремума). Пусть $y_0 \in Y$ - точка экстремума функционала $V[y]$, и для всякого $h \in Y$ существует $\delta V(y_0, h)$. Тогда $\delta V(y_0, h) = 0$.

Доказательство. Пусть для определённости y_0 - точка минимума функционала $V[y]$ (для максимума доказательство аналогично). Тогда существует шар $\overline{S_r}(y_0)$, $r > 0$, такой, что $V[y] \geq V[y_0]$ для любого $y \in \overline{S_r}(y_0)$. Если $|t| \leq \dfrac{r}{\| h \|}$, то $y_0 + th \in \overline{S_r}(y_0)$ и $V[y_0 + th] \geq V[y_0]$.

Рассмотрим функцию $\Phi(t) = V[y_0 + th]$. Заметим, что для тех же t выполнено неравенство $\Phi(t) \geq \Phi(0)$. По условию теоремы $\Phi(t)$ дифференцируема в точке $t = 0$ и, следовательно, $\Phi'(t)\big|_{t=0} = 0$. Таким образом, $\delta V(y_0, h) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема справедлива и в случае, когда функционал рассматривается на множестве $Y' \subseteq Y$, но для таких $h \in Y$, что $y_0 + th \in Y'$ по крайней мере для достаточно малых t. В этом случае нужно соответствующим образом изменить и определение вариации.

§3. Задача с закреплёнными концами. Необходимое условие экстремума.

Будем рассматривать множество функций $Y' \subseteq Y = C^{(1)}[a,b]$ такое, что:

$$Y' = \{y \in C^{(1)}[a,b], \quad y(a) = A, \; y(b) = B\},$$

где A и B - заданные числа, т.е. множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, у которых известны значения на концах отрезка (концы закреплены).

Рассмотрим функционал

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx .$$

Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закрепленными концами): найти экстремум этого функционала на множестве Y'.

В вариационном исчислении принята следующая терминология. Будем говорить, что на функции $y_0(x)$ достигается сильный минимум, если $V[y] \geq V[y_0]$ для всякого $y \in Y'$ из окрестности y_0 в метрике пространства $C[a,b]$: $\max\limits_{x \in [a,b]} \left| y(x) - y_0(x) \right| \leq r, \;\; r > 0$ (шар с центром в y_0 радиуса r).

Определение слабого минимума дается аналогично, но окрестность выбирается в метрике $C^{(1)}[a,b]$:

$$\max_{x \in [a,b]} \left| y(x) - y_0(x) \right| + \max_{x \in [a,b]} \left| y'(x) - y_0'(x) \right| \leq r, \; r > 0 .$$

В первом случае требуется, чтобы функции $y(x)$ были равномерно «близки» к функции $y_0(x)$, а во втором случае дополнительно требуется равномерная «близость» и первых производных. Очевидно, что, если функционал имеет сильный минимум в точке $y_0(x)$, то он имеет и слабый минимум в той же точке. Обратное, вообще говоря, неверно.

Определения слабого и сильного максимума даются аналогично.

Необходимое условие экстремума, полученное в предыдущем параграфе, $\delta V(y_0,h)=0$, справедливо как для слабого, так и для сильного экстремума. Получим необходимое условие для задачи с закрепленными концами. Для этого найдем вариацию

$$\delta V(y_0,h)=\frac{d}{dt}V[y+th]\Big|_{t=0}.$$

Сначала вычислим производную $\frac{d}{dt}V[y+th]=\frac{d}{dt}\int\limits_a^b F(x,y+th,y'+th')dx$, предполагая, что функция F имеет все необходимые для этого непрерывные частные производные. Относительно $h(x)\in C^{(1)}[a,b]$ потребуем, чтобы $y(x)+th(x)\in Y'$, т.е. $h(a)=0,\quad h(b)=0$. Итак,

$$\frac{d}{dt}V[y+th]=\int\limits_a^b [F_y(x,y+th,y'+th')h+F_{y'}(x,y+th,y'+th')h']dx.$$

Полагая $t=0$ и приравнивая нулю получившуюся вариацию, получаем, что для функции $y(x)$, на которой достигается экстремум, имеет место

$$\delta V(y,h)=\int\limits_a^b [F_y(x,y,y')h+F_{y'}(x,y,y')h']dx=0.$$

Разобьем интеграл на два и проинтегрируем по частям второй:

$$\int\limits_a^b F_{y'}h'dx=\underbrace{F_{y'}h\Big|_a^b}_{=0}-\int\limits_a^b \frac{d}{dx}F_{y'}h\ \ dx.$$

Так как $h(a)=h(b)=0$, то подстановка $F_{y'}h\Big|_a^b=0$. Объединяя оба интеграла в один, получаем

$$\int\limits_a^b (F_y-\frac{d}{dx}F_{y'})h\,dx=0.$$

Ниже мы докажем, что, если этот интеграл равен нулю для любой функции $h(x)\in C^{(1)}[a,b]$, обращающейся в нуль на концах отрезка $h(a)=h(b)=0$, то $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\equiv 0$, при условии, что в скобках стоит непрерывная функция. Поэтому в качестве необходимого условия экстремума для задачи с закрепленными концами мы получаем следующую краевую задачу для уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0 \\ y(a)=A,\quad y(b)=B \end{cases}.$$

Теорема (Необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами).

1) Пусть $y(x)$ осуществляет экстремум (сильный или слабый) в задаче с закреплёнными концами и дважды непрерывно дифференцируема.
2) Функция $F(x,y,y')$ непрерывна с частными производными до второго порядка включительно.

Тогда $y(x)$ является решением краевой задачи для уравнения Эйлера

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ y(a) = A, \quad y(b) = B \end{cases},$$

или

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y} y' - F_{y'y'} y'' = 0; \qquad y(a) = A, \quad y(b) = B .$$

Теорема уже доказана.

Основная лемма вариационного исчисления. Пусть $\varphi(x)$ - фиксированная непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, и для всякой непрерывно дифференцируемой функции $h(x)$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$, имеет место $\int\limits_a^b \varphi(x) h(x) dx = 0$. Тогда $\varphi(x) \equiv 0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\varphi(x)$ не равна нулю тождественно. Не ограничивая общности, будем считать, что эта функция принимает положительные значения (если $\varphi(x) \le 0$ для всех $x \in [a,b]$, то заменим $\varphi(x)$ на $-\varphi(x)$). Тогда в силу непрерывности $\varphi(x)$ существуют точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $\varphi(x_0) > 0$, и интервал $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq (a,b), \quad \delta > 0$ такой, что $\varphi(x) \ge \dfrac{\varphi(x_0)}{2}$ для любого $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Пусть теперь $h(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\begin{cases} h(x) \equiv 0, \quad x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta); \\ h(x) > 0, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Тогда $\int\limits_a^b \varphi(x) h(x) dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x) h(x) dx \ge \dfrac{\varphi(x_0)}{2} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x) dx > 0$, что приводит к противоречию с условием теоремы.

В качестве примера функции $h(x)$, удовлетворяющей записанным выше условиям, можно взять

$$h(x) = \begin{cases} (x - (x_0 - \delta))^2 (x - (\ x_0 + \delta))^2, & x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta); \\ 0\ , & x \notin (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta). \end{cases}$$

Приведем некоторые простые примеры.

1. Рассмотрим функционал $V[y] = \int\limits_0^\pi y^2\, dx$ и зададим различные граничные условия.

а) Пусть $y(0) = 0, y(\pi) = 0$. Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $2y = 0$, а его решение, удовлетворяющее граничным условиям, есть $y(x) \equiv 0$. На этом решении, очевидно, достигается минимум исследуемого функционала.

б) Пусть $y(0) = 0,\ y(\pi) = 1$. Тогда краевая задача для уравнения Эйлера не имеет решений в классе непрерывно дифференцируемых функций.

2. Пусть $V[y] = \int\limits_0^\pi (y^2 - (y')^2)\, dx$, а граничные условия $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $y'' + y = 0$, а его общее решение есть $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Краевая задача имеет бесконечно много решений, так как $C_2 = 0$, а C_1 - произвольная постоянная.

Рассмотрим некоторые частные случаи зависимости функции $F(x, y, y')$ от своих аргументов.

1) $F(x,y,y')= F(x,y)$. Уравнение Эйлера имеет вид $F_y(x,y)=0$ и не является дифференциальным, поэтому его решение (если оно существует), вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям $y(a)=A,\ \ y(b)=B$. Следовательно, решение краевой задачи для уравнения Эйлера, вообще говоря, не существует.

2) $F(x,y,y')=M(x,y)+N(x,y)y'$ (линейность по y'). Уравнение Эйлера имеет вид

$$M_y+y'N_y-\frac{d}{dx}N(x,y)=M_y+y'N_y-N_x-y'N_y=0,$$

или

$$M_y-N_x=0\ .$$

Полученное уравнение также не является дифференциальным, и краевая задача для уравнения Эйлера, вообще говоря, не имеет решения.

3) $F=F(y')$. Уравнение Эйлера имеет вид $F_{y'y'}y''=0$, и существуют две возможности.

а) $y''=0$; его общее решение $y=C_1x+C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

б) $F_{y'y'}(y')=0$. Если k_i - корни последнего уравнения, то $y'=k_i$, а соответствующие решения уравнения Эйлера - также линейные функции $y=k_ix+\tilde{C}_i$.

Итак, экстремалями в этой задаче являются прямые.

В частном случае, когда $l[y]=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx;\qquad y(a)=A,\quad y(b)=B$ (длина кривой, соединяющей две точки на плоскости), доказанное выше отражает известный факт, что среди всех кривых, соединяющих две точки плоскости (a,A) и (b,B), минимальную длину имеет отрезок прямой.

4) $F=F(x,y')$. Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$$

или

$$F_{y'}(x,y')=C.$$

5) $F=F(y,y')$. Уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y-F_{y'y}y'-F_{y'y'}y''=0\,,$$

или

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=0.$$

Это уравнение, очевидно, имеет первый интеграл

$$F-y'F_{y'}=C.$$

В качестве конкретного примера такого типа рассмотрим классическую задачу о брахистохроне - кривой, по которой материальная точка в поле тяжести скатывается за наименьшее время из точки $(0,0)$ в точку (x_1,y_1). Эта задача была решена Иоганном Бернулли еще в 1696 году.

Пусть на плоскости (x,y) ось y направлена вниз, и в том же направления действует и сила тяжести. Заметим, что при движении в поле силы тяжести

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{2gy}\,,$$

где S - путь, g - ускорение свободного падения.

С другой стороны,

$$dS=\sqrt{1+(y')^2}\,dx\,,$$

где $y = y(x)$ - траектория движения материальной точки. Время движения по этой траектории определяется функционалом

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\, dx .$$

Определим траекторию, для которой функционал $T[y]$ принимает минимальное значение, т.е. ту, где перемещение из точки $(0, 0)$ в точку (x_1, y_1) происходит за наименьшее время. Заметив, что подынтегральная функция не зависит явно от x, запишем сразу первый интеграл уравнения Эйлера (см. выше)

$$F - y' F_{y'} = C ,$$

или

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} = C .$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} = C \qquad \Leftrightarrow \qquad y(1+(y')^2) = C_1 .$$

Вводя параметр t по формуле $y' = \operatorname{ctg} t$, найдем

$$y(t) = \frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t) .$$

Теперь определим $x(t)$. Имеем

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t \ dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t\, dt \ = C_1(1-\cos 2t)\, dt ,$$

откуда $\qquad x - C_2 = \dfrac{C_1}{2}(2t - \sin 2t)$.

Из полученных выражений для $x(t)$, $y(t)$ и условия $y(0) = 0$, находим $C_2 = 0$. После замены $2t = t_1 \ge 0$ и $\dfrac{C_1}{2} = \tilde{C}_1$ получаем уравнение брахистохроны

$$x = \tilde{C}_1(t_1 - \sin t_1), \qquad y = \tilde{C}_1(1-\cos t_1) .$$

Итак, брахистохрона – это циклоида, а $\tilde{C}_1$ находится из условия $y(x_1) = y_1$.

Рассмотрим теперь некоторые обобщения.

Пусть функционал $\quad V[y] = \int_a^b F(x, y, y', ..., y^{(n)})\, dx$, а

граничные условия имеют вид:

$$y(a) = y_0^{(1)},\ y(b) = y_0^{(2)};$$
$$y'(a) = y_1^{(1)},\ y'(b) = y_1^{(2)};$$
$$..............$$
$$y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}^{(1)},\ y^{(n-1)}(b) = y_{n-1}^{(2)}.$$

Запишите самостоятельно уравнение Эйлера для этой задачи.

Пусть теперь функционал имеет вид

$$V[y] = \int_a^b F(x, y_1, ..., y_n; y_1', ..., y_n')\ \ dx,$$

$y=(y_1,...,y_n)$ - вектор-функция. Рассмотрим задачу с закрепленными концами

$$y_i(a)=A_i,$$
$$y_i(b)=B_i,$$

где $i=1,...,n$; A_i, B_i - заданные числа.

Теорема. Пусть:

1) Функции $y_1(x),...,y_n(x)$ осуществляют экстремум функционала $V[y]$ в задаче с закрепленными концами и дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$.
2) $F(x,y_1,...,y_n;y_1',...,y_n')$ непрерывна с частными производными до второго порядка включительно.

Тогда $y_1(x),...,y_n(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$\begin{cases} F_{y_i}-\dfrac{d}{dx}F_{y_i'}=0 \\ y_i(a)=A_i; \quad y_i(b)=B_i; \end{cases}, \qquad \text{где } i=1,...n.$$

Для доказательства сформулированного выше необходимого условия экстремума достаточно заметить, что если вектор-функция $y(x)=\left(y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\right)$ осуществляет экстремум функционала $V[y]$ в задаче с закрепленными концами в случае, когда можно изменять все компоненты вектор-функции, то эта же вектор-функция осуществляет экстремум $V[y]$ в случае, когда меняется одна компонента, а остальные фиксированы. Отсюда немедленно следует, что $y(x)$ удовлетворяет записанной выше системе уравнений Эйлера.

<u>Пример</u>. Рассмотрим задачу из механики. Пусть n материальных точек, имеющих массы m_i и координаты (x_i,y_i,z_i), $i=1,2,...,n$, движутся под действием сил

$$F_i=\left(-\frac{\partial u}{\partial x_i},-\frac{\partial u}{\partial y_i},-\frac{\partial u}{\partial z_i}\right),$$

порожденных потенциальной функцией $u=u(x_1,y_1,z_1,...,x_n,y_n,z_n)$. Считая, что координаты точек зависят от времени t, заметим, что кинетическая энергия системы материальных точек имеет вид

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left((x_i')^2+(y_i')^2+(z_i')^2\right).$$

Введем функционал действия

$$\int_{t_1}^{t_2}L\,dt\ ,$$

где L – функция Лагранжа $L=T-u$,

или

$$L=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left((x_i')^2+(y_i')^2+(z_i')^2\right)-u(x_1,y_1,z_1,...,x_n,y_n,z_n).$$

По принципу наименьшего действия (принцип Гамильтона) материальные точки движутся по траекториям, для которых значение функционала $\int_{t_1}^{t_2}L\,dt$ минимально.

Система уравнений Эйлера для функционала $\int_{t_1}^{t_2}L\,dt$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x_i'} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial y_i'} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial z_i'} = 0 \end{cases}, \text{ где } i = 1,\dots,n.$$

Вычисляя производные, получаем систему уравнений движения (к которым нужно добавить начальные условия):

$$\begin{cases} m_i x_i'' = -\dfrac{\partial u}{\partial x_i}; \\ m_i y_i'' = -\dfrac{\partial u}{\partial y_i}; \\ m_i z_i'' = -\dfrac{\partial u}{\partial z_i}; \end{cases} \text{ где } i = 1,\dots,n.$$

Читателю предлагается самостоятельно получить первый интеграл этой системы - закон сохранения энергии:

$$T + u = const.$$

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение функционала.
2. Сформулировать определение непрерывного функционала.
3. Сформулировать определение дифференцируемого функционала.
4. Сформулировать определение вариации функционала.
5. Сформулировать постановку простейшей задачи вариационного исчисления – задачи с закрепленными концами.
6. Сформулировать определение сильного минимума функционала.
7. Сформулировать определение сильного максимума функционала.
8. Сформулировать определение слабого минимума функционала.
9. Сформулировать определение слабого максимума функционала.
10. Сформулировать определение строгого минимума (максимума) функционала.
11. Сформулировать необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами.
12. Сформулировать основную лемму вариационного исчисления.
13. Сформулировать постановку задачи с закрепленными концами и необходимые условия экстремума для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y_1,...,y_n;y_1',...,y_n')\,dx.$

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его вариации при условии, что вариация существует.
2. Сформулировать постановку задачи с закрепленными концами и получить необходимое условие экстремума.
3. Доказать основную лемму вариационного исчисления.
4. Сформулировать постановку задачи с закрепленными концами и получить необходимые условия экстремума для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y_1,...,y_n;y_1',...,y_n')\,dx.$
5. Привести пример первой краевой задачи для уравнения Эйлера для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$, которая не имеет решения.
6. Привести пример первой краевой задачи для уравнения Эйлера для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$, которая имеет неединственное решение.
7. Записать решения уравнения Эйлера для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(y')dx$.
8. Записать первый интеграл уравнения Эйлера для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y')dx$.
9. Записать первый интеграл уравнения Эйлера для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(y,y')dx$.
10. Сформулировать и решить задачу о брахистохроне.
11. Исходя из вариационного принципа наименьшего действия, получить уравнения движения материальной точки в потенциальном поле.

Лекция №10

§4. Задачи на условный экстремум.

Рассмотрим задачу об отыскании экстремума функционала

$$V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx,$$

где $y=y(x),\ \ z=z(x)$, с граничными условиями

$$y(a)=y_0,\quad z(a)=z_0;$$
$$y(b)=y_1,\quad z(b)=z_1.$$

Кроме того, предположим, что функции $y=y(x),\ z=z(x)$ удовлетворяют уравнению связи

$$\Phi(x,y,z,y',z')=0.$$

Поскольку Φ зависит не только от функций $y=y(x),\ z=z(x)$, а и от их первых производных, такая связь называется неголономной.

Теорема (Необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами и неголономной связью).

Пусть:

1) $y(x), z(x)$ осуществляют экстремум $V[y,z]$ в задаче с закрепленными концами и неголономной связью и дважды непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$;
2) F,Φ непрерывны с частными производными до второго порядка включительно, причем $\Phi_{z'}\neq 0$.

Тогда существует дифференцируемая функция $\lambda(x)$, такая, что $y(x),\ z(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера для функционала $\int_a^b H(x,y,z,y',z')dx$, где $H=F+\lambda(x)\Phi$:

$$\begin{cases} F_y+\lambda\ \ \Phi_y-\dfrac{d}{dx}\left(F_{y'}+\lambda\ \ \Phi_{y'}\right)=0;\\ F_z+\lambda\ \ \Phi_z-\dfrac{d}{dx}\left(F_{z'}+\lambda\ \ \Phi_{z'}\right)=0;\\ \Phi(x,y,z,y',z')=0;\\ y(a)=y_0,\quad y(b)=y_1;\\ z(a)=z_0,\quad z(b)=z_1. \end{cases}$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим функционал $V\left[y+th_1(x),\ \ z+th_2(x)\right]$, где $h_1(x),\ h_2(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$h_1(a)=h_1(b)=0;$$
$$h_2(a)=h_2(b)=0.$$

Вычислим вариацию функционала $V[y,z]$ и приравняем ее нулю:

$$\frac{d}{dt}V\left[y+th_1(x),\ \ z+th_2(x)\right]\Big|_{t=0}=\delta V\left(y,z,h_1,h_2\right)=0.$$

Так же, как в предыдущем параграфе, после интегрирования по частям (подстановки обращаются в нуль в силу граничных условий для $h_1(x),\ h_2(x)$) получаем:

$$\delta V=\int_a^b\left(F_yh_1+F_{y'}h_1'+F_zh_2+F_{z'}h_2'\right)dx=\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)h_1dx+\int_a^b\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)h_2dx=0.$$

Если бы $h_1(x),\ h_2(x)$ были бы независимыми, то мы получили бы систему уравнений Эйлера. Однако $h_1(x),\ h_2(x)$ подчиняются (по крайней мере, для малых t) уравнению связи

$$\Phi\left[x, y+th_1, z+th_2, y'+th_1', z'+th_2'\right]=0.$$

Получим уравнение, решая которое, мы сможем выразить $h_2(x)$ через $h_1(x)$. Продифференцируем записанное выше равенство по t и положим $t=0$. Тогда

$$\left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=0}=0$$

или

$$\Phi_y h_1+\Phi_{y'}h_1'+\Phi_z h_2+\Phi_{z'}h_2'=0.$$

Так как $\Phi_{z'}\neq 0$, то

$$h_2'=-\frac{\Phi_z}{\Phi_{z'}}h_2-\frac{\Phi_y}{\Phi_{z'}}h_1-\frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{z'}}h_1'.$$

Обозначив $a_2=-\dfrac{\Phi_z}{\Phi_{z'}},\ a_1=-\dfrac{\Phi_y}{\Phi_{z'}},\ b_1=-\dfrac{\Phi_{y'}}{\Phi_{z'}}$, получим следующую задачу Коши для отыскания $h_2(x)$ при условии, что $h_1(x)$ задано:

$$\begin{cases} h_2'=a_2h_2+\left(a_1h_1+b_1h_1'\right); \\ h_2(a)=0. \end{cases}$$

Уравнение, которому удовлетворяет $h_2(x)$, является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Общее решение этого уравнения хорошо известно из курса дифференциальных уравнений и может быть найдено, например, методом вариации постоянной. Получите самостоятельно это общее решение и покажите, что решение задачи Коши имеет вид

$$h_2=\int_a^x\left(a_1h_1+b_1h_1'\right)\exp\left(\int_\xi^x a_2\,d\eta\right)d\xi.$$

Итак, мы выразили $h_2(x)$ через $h_1(x)$. Подставляя это выражение во второй интеграл в формуле для вариации, после простых преобразований (изменение порядка интегрирования по x и ξ) получаем

$$\int_b^a\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)dx\int_a^x\left(a_1h_1+b_1h_1'\right)\exp\left(\int_\xi^x a_2\,d\eta\right)d\xi=\int_b^a\left(a_1h_1+b_1h_1'\right)d\xi\int_\xi^b\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)\exp\left(\int_\xi^x a_2\,d\eta\right)dx$$

$$=\int_a^b\left(a_1h_1+b_1h_1'\right)\gamma(\xi)\,d\xi=\int_a^b\left[a_1\gamma-\frac{d}{dx}\left(b_1\gamma\right)\right]h_1\,d\xi,$$

где $\gamma(\xi)=\displaystyle\int_\xi^b\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)\exp\left(\int_\xi^x a_2\,d\eta\right)dx.$

Переобозначив переменную интегрирования (x вместо ξ), окончательно получим

$$\delta V=\int_a^b\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+a_1\gamma-\frac{d}{dx}(b_1\gamma)\right]h_1(x)\,dx=0.$$

Здесь $\gamma(x)=\displaystyle\int_x^b\left(F_z-\frac{d}{d\xi}F_{z'}\right)\exp\left(\int_\xi^x\frac{\Phi_z}{\Phi_{z'}}d\eta\right)d\xi.$

По основной лемме вариационного исчисления:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + a_1\gamma - \frac{d}{dx}(b_1\gamma) = 0.$$

Вспомнив, что $a_1 = -\frac{\Phi_y}{\Phi_{z'}}, \quad b_1 = -\frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{z'}}$, получим

$$a_1\gamma - \frac{d}{dx}(b_1\gamma) = -\frac{\Phi_y}{\Phi_{z'}}\gamma - \frac{d}{dx}\left(-\frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{z'}}\gamma\right).$$

Обозначим $\lambda(x) = -\frac{\gamma(x)}{\Phi_{z'}}$. Очевидно, что $\lambda(x)$ - дифференцируемая функция. Тогда

$$a_1\gamma - \frac{d}{dx}(b_1\gamma) = \lambda\Phi_y - \frac{d}{dx}(\lambda\Phi_{y'}),$$

и равенство нулю вариации приводит к уравнению

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \lambda\Phi_y - \frac{d}{dx}(\lambda\Phi_{y'}) = 0,$$

или

$$F_y + \lambda\Phi_y - \frac{d}{dx}(F_{y'} + \lambda\Phi_{y'}) = 0.$$

Мы получили первое из уравнений Эйлера, фигурирующих в условиях теоремы.

Перепишем второе уравнение таким образом:

$$\frac{d}{dx}(\lambda\Phi_{z'}) = \left(\frac{\Phi_z}{\Phi_{z'}}\right)(\lambda\Phi_{z'}) + \left(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right)$$

Рассмотрим это уравнение как уравнение относительно $\lambda\Phi_{z'}$. Тогда

$$\lambda\Phi_{z'} = \int_b^x \left(F_z - \frac{d}{d\xi}F_{z'}\right)\exp\left(\int_\xi^x \frac{\Phi_z}{\Phi_{z'}}d\eta\right)d\xi$$

является его решением. Сравнивая полученное выражение с выведенной ранее формулой $\gamma(x) = -\lambda\Phi_{z'}$, получаем, что второе уравнение из системы уравнений Эйлера тоже выполнено. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу с голономной связью. Требуется найти экстремум функционала

$$V[y,z] = \int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$$

при выполнении граничных условий

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1;$$
$$z(a) = z_0, \quad z(b) = z_1$$

и уравнения связи $\Phi(x,y,z) = 0$.

Граничные условия нельзя считать независимыми, поскольку $\Phi(a,y_0,z_0) = 0$ и $\Phi(b,y_1,z_1) = 0$.

Как и ранее, введем функцию $H = F + \lambda(x)\Phi$ и функционал

$$\int_a^b H(x,y,z,y',z')\,dx.$$

В отличие от задачи с неголономной связью, теперь $\Phi_{z'} \equiv 0$. Поэтому предположим, что $\Phi_z \neq 0$. Система уравнений Эйлера в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} (F_y + \lambda\Phi_y) - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0; \\ (F_z + \lambda\Phi_z) - \dfrac{d}{dx}F_{z'} = 0. \end{cases}$$

Теорема (Необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами и голономной связью).

Пусть:

1) функции $y(x)$ и $z(x)$ реализуют экстремум в поставленной выше задаче с голономной связью и дважды непрерывно дифференцируемы;
2) функция F непрерывна со своими частными производными до второго порядка включительно;
3) функция Φ непрерывна со своими частными производными, причем $\Phi_z \neq 0$.

Тогда существует непрерывная функция $\lambda(x)$ такая, что $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют системе уравнений, записанной выше.

Доказательство. Выражение для вариации функционала получено при доказательстве предыдущей теоремы и имеет следующий вид:

$$\delta V = \int_a^b [(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})h_1 + (F_z - \frac{d}{dx}F_{z'})h_2]\,dx = 0\,.$$

Выражая теперь h_2 через h_1 из соотношения $\Phi_y h_1 + \Phi_z h_2 = 0,$ полученного также, как и в предыдущей теореме, и используя условие $\Phi_z \neq 0$, находим

$$h_2 = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z}h_1\,.$$

Далее, подставляя h_2 в выражение для вариации и применяя основную лемму вариационного исчисления, получаем уравнение

$$(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}) - (F_z - \frac{d}{dx}F_{z'})\frac{\Phi_y}{\Phi_z} = 0\,.$$

Полагая $\lambda = -\dfrac{F_z - \dfrac{d}{dx}F_{z'}}{\Phi_z}$, получаем первое уравнение из системы уравнений Эйлера. Второе уравнение системы – это записанное выше определение λ.

Очевидно, что $\lambda = \lambda(x)$ - непрерывная функция. Теорема доказана.

В качестве простого примера рассмотрим задачу об отыскании так называемых геодезических линий. Пусть уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ задаёт некоторую поверхность в трёхмерном пространстве, на которой фиксированы две точки. Поставим задачу отыскания геодезической линии, т.е. кривой минимальной длины, соединяющей эти точки.

Если предположить, что уравнение кривой допускает введение параметризации с помощью параметра x, то данная задача сводится к минимизации функционала

$$V[y,z] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\,dx$$

с соответствующими граничными условиями.

В заключение параграфа рассмотрим так называемую изопериметрическую задачу. Пусть требуется найти экстремум функционала

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

при выполнении граничных условий

$$y(a)=A,\quad y(b)=B$$

и дополнительного условия связи

$$I[y]=\int_a^b G(x,y,y')\,dx=l$$

(функционал $I[y]$ имеет заданное значение).

Задача называется изопериметрической, т.к. если положить

$$I[y]=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx=l\,,$$

то требуется найти кривую, на которой достигается экстремум функционала $V[y]$, проходящую через заданные точки, причем длина кривой (ее периметр) задана.

Для того, чтобы применить полученные в данном параграфе результаты, введем новую функцию

$$z(x)=\int_a^x G(x,y,y')\;dx\,.$$

Очевидно, что $z(a)=0,\;\; z(b)=l$. Перепишем изопериметрическую задачу в следующем виде: найти экстремум функционала

$$V[y,z]=\int_a^b F(x,y,y')\;dx$$

при выполнении граничных условий $y(a)=A,\;\; y(b)=B$, $z(a)=0,\;\; z(b)=l$ и уравнения неголономной связи

$$\Phi(x,y,z,y',z')\equiv -z'+G(x,y,y')=0\,.$$

Запишем систему уравнений Эйлера для функционала $\int_a^b H\,dx$, где $H=F+\lambda\Phi$:

$$\begin{cases}(F_y+\lambda G_y)-\dfrac{d}{dx}(F_{y'}+\lambda G_{y'})=0;\\ \dfrac{d\lambda}{dx}=0.\end{cases}$$

Обратите внимание на второе уравнение, из которого следует, что $\lambda=const$.

Теорема (Необходимое условие экстремума для изопериметрической задачи с закрепленными концами).

Пусть:

1) функция $y(x)$ реализует экстремум функционала $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ и дважды непрерывно дифференцируема;
2) функции F и G непрерывны вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

Тогда существует число λ такое, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала $\int_a^b H\,dx$, где $H=F+\lambda G$.

Доказательство следует немедленно из теоремы о необходимом условии для задачи с закрепленными концами и неголономной связью.

Рассмотрим теперь задачу отыскания кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь. В этом случае, $F = y$, $V[y] = \int_a^b y\,dx$, $G = \sqrt{1+(y')^2}$, $H = y + \lambda\sqrt{1+(y')^2}$, $\lambda = const$.

Первый интеграл для уравнения Эйлера имеет вид $H - y'H_{y'} = C_1$, или

$$y + \lambda\sqrt{1+(y')^2} - y'\lambda\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

Приводя подобные члены, получим

$$y - C_1 = -\lambda\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Введём вспомогательный параметр t по формуле $y' = \operatorname{tg} t$. Тогда $y - C_1 = -\lambda\cos t$.

Найдем $x(t)$. Имеем

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\lambda\sin t}{tgt}dt = \lambda\cos t dt \quad \Rightarrow \quad x - C_2 = \lambda\sin t.$$

Исключая параметр t, получим уравнение окружности

$$(x-C_2)^2 + (y-C_1)^2 = \lambda^2.$$

Параметры C_1, C_2 и λ можно определить из системы:

$$\begin{cases} (x-C_2)^2 + (y-C_1)^2 = \lambda^2; \\ y(a) = A, \qquad y(b) = B; \\ \int_a^b G dx = l \ . \end{cases}$$

<u>Экзаменационные вопросы</u>

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')dx$ при условии, что концы закреплены, и имеется неголономная связь. Записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
2. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')dx$ при условии, что концы закреплены, и имеется голономная связь. Записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
3. Сформулировать определение геодезической линии.
4. Сформулировать изопериметрическую задачу с закрепленными концами и необходимые условия экстремума в этой задаче.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Получить необходимые условия экстремума функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')dx$, если концы закреплены, и имеется неголономная связь.
2. Получить необходимые условия экстремума функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')dx$, если что концы закреплены, и имеется голономная связь.
3. Получить необходимые условия экстремума в изопериметрической задаче с закрепленными концами.
4. Записать постановку и привести решение задачи об отыскании кривой заданной длины, площадь под которой максимальна (задача Дидоны).

Лекция №11

§5. Задачи с подвижной границей.

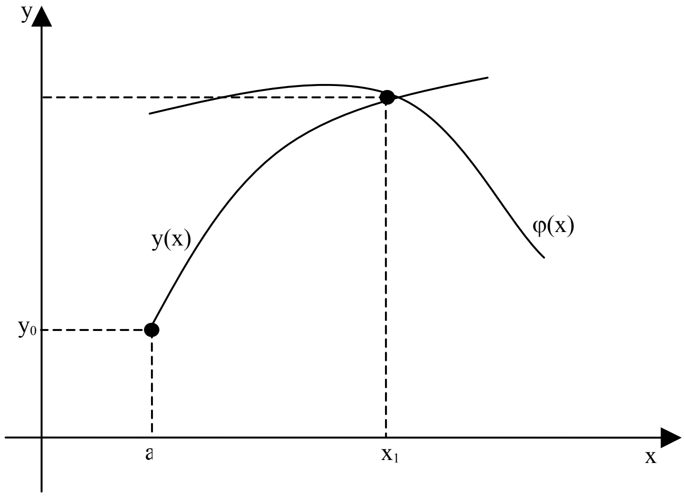
Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$V\left[y\right]=\int_a^{x_1} F(x,y,y')\,dx$$

при условии, что левый конец функции, на которой достигается экстремум, закреплен:

$$y(a)=y_0\,,$$

а правый может перемещаться вдоль заданной кривой $y=\varphi(x)$ (см. рисунок, x_1 - абсцисса точки пересечения кривых $y(x)$ и $\varphi(x)$, $x\in[a,b]$).



Пример: пусть требуется найти расстояние от точки на плоскости с координатами (a,y_0) до кривой $y=\varphi(x)$. Задача сводится к минимизации функционала $\int_a^{x_1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

Введем функционал $B\left[y\right]$, полагая $x_1=B\left[y\right]$.

Теорема (Необходимые условия экстремума для задачи с левым закрепленным и правым подвижным концами).

Пусть

1) $y(x)$ осуществляет экстремум в поставленной выше задаче с подвижной границей и дважды непрерывно дифференцируема;
2) F – функция, непрерывная со своими частными производными до второго порядка включительно;
3) $\varphi(x)$ непрерывна с первой производной.

Тогда:

1) $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$;
2) при $x=x_1$ выполнено условие трансверсальности $\left(F-(y'-\varphi')F_{y'}\right)\Big|_{x=x_1}=0$.

Доказательство. Прежде всего, докажем, что выполняется уравнение Эйлера. В самом деле, если $y(x)$ такова, что на ней реализуется экстремум функционала $V[y]$ в классе функций, у которых один конец закреплен, а другой подвижен, то на ней реализуется экстремум и в классе функций, когда оба конца закреплены (т.е. задано граничное условие на правом конце $y(x_1)=\varphi(x_1)$, где x_1 – абсцисса точки пересечения функции, на которой достигается экстремум, с кривой $y=\varphi(x)$). Как доказано в параграфе 3 для задачи с закрепленными концами, в этом случае выполняется уравнение Эйлера.

Вычислим теперь вариацию функционала $V[y]$. Зададим приращение $h(x)$ и рассмотрим функцию переменной t:

$$V\left[y+th\right]=\int_a^{B[y+th]} F(x, y+th, y'+th')\,dx .$$

Вычислим ее производную по t:

$$\frac{d}{dt}V\left[y+th\right]=\int_a^{B[y+th]}\left[F_y h+F_{y'}h'\right]dx+F\left(B\left[y+th\right], y(B)+th(B), y'(B)+th'(B)\right)\cdot\frac{d}{dt}B\left[y+th\right].$$

Положим $t=0$, тогда $y+th=y(x)$, $B\left[y+th\right]\Big|_{t=0}=x_1$, а вариация функционала $V[y]$ равна

$$\delta V=\frac{d}{dt}V\left[y+th\right]_{t=0}=\int_a^{x_1}\left[F_y\left(x,y,y'\right)h+F_{y'}\left(x,y,y'\right)h'\right]dx+F\left(x_1, y(x_1), y'(x_1)\right)\cdot\frac{d}{dt}B\left[y+th\right]_{t=0} .$$

Интегрируя второй член в подынтегральном выражении по частям, используя граничное условие на левом конце $h(a)=0$ и равенство $\int_a^{x_1}\left(F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')\right)h\ dx=0$, являющееся следствием уравнения Эйлера, получим выражение для вариации и приравняем его нулю:

$$\delta V=F_{y'}\left(x_1, y(x_1), y'(x_1)\right)h(x_1)+F\left(x_1, y(x_1), y'(x_1)\right)\cdot\frac{dB}{dt}\bigg|_{t=0}=0 .$$

Обозначим $B\left[y+t\cdot h\right]=B(t)$ и заметим, что $B(0)=x_1$. По определению $B(t)$ имеем $y\left(B(t)\right)+t\cdot h\left(B(t)\right)\equiv\varphi\left(B(t)\right)$, так как абсцисса точки пересечения кривой, записанной в левой части, с кривой $y=\varphi(x)$ есть $B(t)$. Продифференцируем записанное тождество по t и получим

$$y'\left(B(t)\right)B'(t)+t\cdot h'\left(B(t)\right)B'(t)+h\left(B(t)\right)=\varphi'\left(B(t)\right)B'(t) ,$$

откуда

$$B'(t)=\frac{h\left(B(t)\right)}{\varphi'\left(B(t)\right)-y'\left(B(t)\right)-t\cdot h'\left(B(t)\right)}$$

Рассмотрим два случая:

1) Если $\varphi'(x_1)\neq y'(x_1)$, т.е. $\varphi'\left(B(t)\right)-y'\left(B(t)\right)\Big|_{t=0}\neq 0$, то можно выполнить предельный переход при $t\to 0$:

$$B'(0)=\frac{h\left(x_1\right)}{\varphi'\left(x_1\right)-y'\left(x_1\right)} .$$

В этом случае выражение для вариации примет вид

$$\delta V=\left\{F_{y'}\Big|_{x=x_1}+F\Big|_{x=x_1}\cdot\frac{1}{\varphi'\left(x_1\right)-y'\left(x_1\right)}\right\}h(x_1)=0 .$$

Учитывая, что $h(x_1)$ – произвольное число, и сокращая на $h(x_1)$, получаем

$$\left(F-(y'-\varphi')F_{y'}\right)\Big|_{x=x_1}=0 ,$$

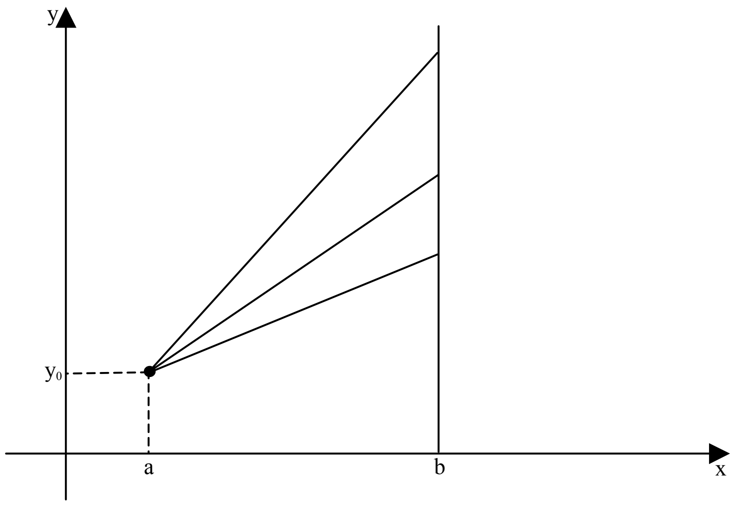
т.е. условие трансверсальности, сформулированное в теореме.

2) Если $\varphi'(x_1) = y'(x_1)$, то $B'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} \infty$. В этом случае равенство нулю вариации

$$\delta V = F_{y'} \cdot h + F \cdot \left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

возможно тогда и только тогда, если $F(x_1, y(x_1), y'(x_1)) = 0$. Легко видеть, что это и есть условие трансверсальности в случае $\varphi'(x_1) = y'(x_1)$. Теорема доказана.

Рассмотрим важный частный случай – задачу со свободным правым концом.



Пусть $B(t) = b$, т.е. левый конец закреплен, а правый может перемещаться по прямой $x = b$ (см. рисунок). В этом случае мы не можем ввести функцию $\varphi(x)$, т.к. уравнение границы $x = b$. Понятно, что $\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=0} = 0$. Повторяя рассуждения, приведшие нас к получению вариации в предыдущей теореме, имеем

$$\delta V = F_{y'} \cdot h(b) = 0.$$

Отсюда $\left.F_{y'}\right|_{x=b} = 0$ - граничное условие в случае, когда правый конец свободен.

Рассмотрим теперь случай, когда функционал имеет вид

$$V[y] = \int_a^{B[y]} A(x,y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

где функция $A(x,y) \neq 0$ и дифференцируема по x, y. В частности, если $A \equiv 1$, то функционал $V[y]$ определяет длину кривой. Условие трансверсальности в этом случае переходит в условие ортогональности кривых $y = y(x)$ к $y = \varphi(x)$.

В самом деле,

$$A(x_1, y(x_1))\sqrt{1+(y'(x_1))^2} - (y'(x_1) - \varphi'(x_1))\frac{A(x_1, y(x_1))y'(x_1)}{\sqrt{1+(y'(x_1))^2}} = 0.$$

Приводя к общему знаменателю и сокращая на ненулевые множители, имеем

$$1 + \varphi'(x_1)y'(x_1) = 0,$$

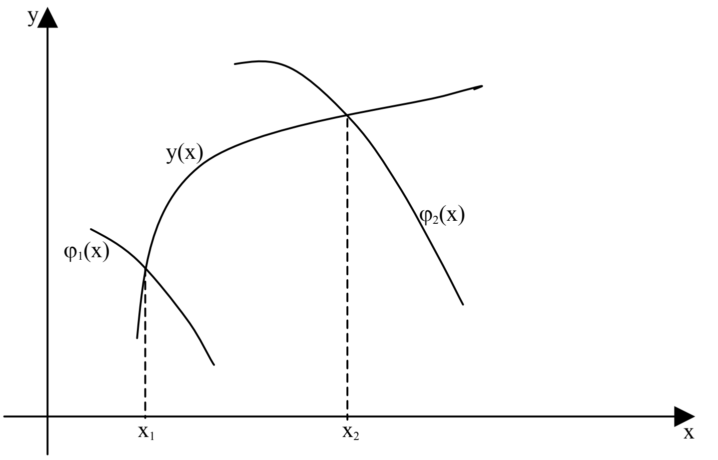
откуда

$$y'(x_1) = -\frac{1}{\varphi'(x_1)},$$

т.е. условие ортогональности.

Если рассматривать задачу с подвижной границей, в которой правый конец закреплен, а левый – подвижен, то получим тот же результат, только с условием трансверсальности на левом конце.

Теперь рассмотрим задачу, в которой оба конца являются подвижными: пусть левый конец функции, на которой осуществляется экстремум функционал $V[y]$, может перемещаться вдоль кривой $y=\varphi_1(x)$, а правый конец вдоль кривой $y=\varphi_2(x)$ (см. рисунок). В этом случае должны выполнятся условия трансверсальности на правом и на левом концах.



Действительно, если функция $y(x)$ такова, что на ней реализуется экстремум в классе функций, когда оба конца подвижны, то на ней реализуется экстремум и в классе функций, когда левый конец «правильно» закреплен, а правый подвижен. Из этого следует, что выполняется условие трансверсальности на правом конце (аналогичное утверждение справедливо и для левого конца). Очевидно (см. доказательство теоремы), что функция, на которой достигается экстремум, удовлетворяет уравнению Эйлера.

В заключение параграфа рассмотрим пример. Пусть требуется найти экстремум функционала

$$V[y]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx$$

при условии, что левый конец закреплен, а правый может перемещаться вдоль заданной прямой, т.е. $y(0)=0$, $y_1=x_1-5$.

Запишем первый интеграл уравнения Эйлера

$$F-y'F_{y'}=C,$$

или

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}-y'\frac{y'}{y\sqrt{1+(y')^2}}=C,$$

или

$$1=C\cdot y\sqrt{1+(y')^2}\ .$$

Введем параметр t, полагая $y'=\operatorname{tg}t$. Тогда $y=\tilde{C}_1\cos t$, и для определения $x(t)$ запишем

$$dx=\frac{dy}{y'}=-\frac{\tilde{C}_1\sin t\,dt}{\operatorname{tg}t}=-\tilde{C}_1\cos t,$$

откуда

$$x=-\tilde{C}_1\sin t+\tilde{C}_2.$$

Исключая параметр t, получаем $(x-C_1)^2+y^2=C_2{}^2$ - уравнение окружности с центром в точке $(C_1,0)$ и радиусом C_2, а условие на левом конце $y(0)=0$ дает $(x-C)^2+y^2=C^2$.

Чтобы найти константу C заметим, что для данного функционала условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности кривых $y=y(x)$ к $y=\varphi(x)$. Окружность ортогональна прямой лишь в том случае, когда диаметр окружности лежит на этой прямой. Отсюда получаем, что $C=5$, т.е. $(x-5)^2+y^2=25$, или $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Записать условие трансверсальности.
2. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец закреплен, а правый подвижен, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
3. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец свободен, а правый подвижен, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
4. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца подвижны, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
5. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца свободны, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Получить необходимые условия экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец закреплен, а правый подвижен.
2. Получить необходимые условия экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец свободен, а правый подвижен.
3. Получить необходимые условия экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца подвижны.
4. Получить необходимые условия экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца свободны.
5. Показать, что в задаче поиска экстремума функционала $V[y]=\int\limits_a^{B[y]} A(x,y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ с левым закрепленным и правым подвижным концами, где функция $A(x,y)$ дифференцируема, и $A(x,y)\neq 0$, условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности.
6. Найти экстремум функционала $V[y]=\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx$ при условии, что левый конец закреплен, т.е. $y(0)=0$, а правый может перемещаться вдоль прямой $y_1=x_1-5$.

Лекция №12

§6. Достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами.

Вернемся к задаче с закрепленными концами: найти минимум функционала

$$V\left[y\right]=\int\limits_a^b F\left(x,y,y'\right)dx$$

при условии, что

$$y(a)=A\,,\qquad y(b)=B\,.$$

Необходимое условие экстремума было сформулировано в §3. Получим теперь достаточное условие минимума (достаточное условие максимума получается аналогично). Конечно, можно попытаться исследовать знак производной $\left.\dfrac{d^2}{dt^2}V\left[y+th\right]\right|_{t=0}$ для всех допустимых $h(x)$. Здесь же мы будем использовать другой подход.

Пусть на функции $y=\bar{y}(x)$ достигается минимум функционала $V[y]$ для задачи с закрепленными концами:

$$\bar{y}(a)=A\,,\qquad \bar{y}(b)=B\,.$$

Это означает, что $V\left[\tilde{y}\right]-V\left[\bar{y}\right]\geq 0$ для всех $\tilde{y}(x)$ из окрестности $\bar{y}(x)$ таких, что $\tilde{y}(a)=A$, $\tilde{y}(b)=B$. Функционал $V\left[\tilde{y}\right]$ мы можем рассматривать как криволинейный интеграл второго рода

$$V\left[\tilde{y}\right]=\int\limits_a^b F\left(x,\tilde{y},\tilde{y}'\right)dx=\int\limits_{\tilde{C}} F\left(x,y,y'\right)dx$$

по кривой $\tilde{C}=\left\{(x,y):\ y=\tilde{y}(x),\ x\in\left[a,b\right]\right\}$.

Рассмотрим кривую $\bar{C}=\left\{\left(x,y\right):\ y=\bar{y}\left(x\right),\ \ x\in\left[a,b\right]\right\}$ и обозначим $V[\tilde{y}]=I(\tilde{C})$, $V[\bar{y}]=I(\bar{C})$. Нужно оценить знак выражения

$$I(\tilde{C})-I(\bar{C})=\int\limits_{\tilde{C}} F\left(x,y,y'\right)dx-\int\limits_{\bar{C}} F\left(x,y,y'\right)dx\,,$$

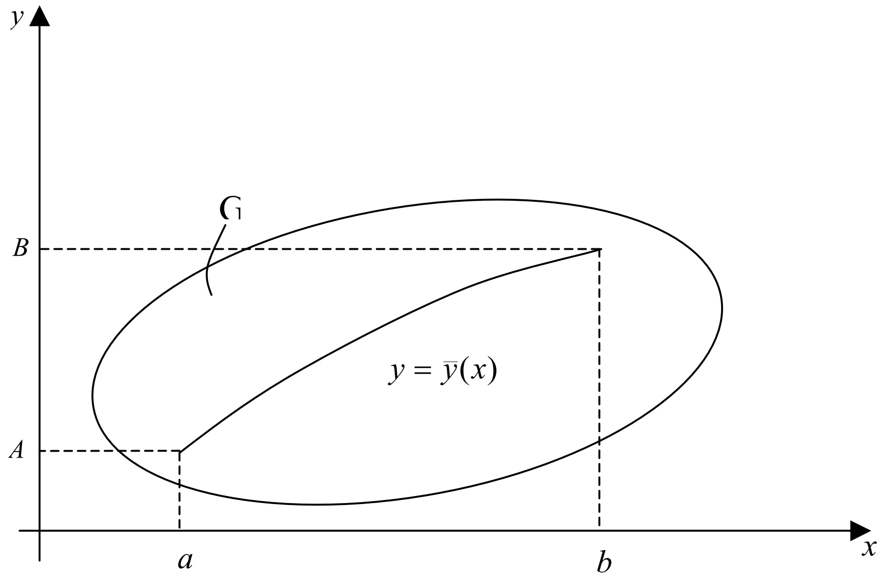
точнее получить условия, при которых это выражение неотрицательно. Для этой цели преобразуем разность интегралов по двум, вообще говоря, различным кривым в интеграл по одной кривой.

Будем считать, что функция $y=\bar{y}(x)$ содержится в <u>центральном</u> или <u>собственном</u> поле экстремалей. Напомним, что <u>экстремалью</u> называется решение уравнения Эйлера.

Пусть область G на плоскости (x,y) содержит кривую, заданную функцией $\bar{y}(x)$. Если через каждую точку области G проходит и при том единственная кривая, являющаяся решением уравнения Эйлера, то говорят, что множество таких экстремалей образует <u>собственное поле</u>.

Поле экстремалей называется <u>центральным</u>, если выполнены те же условия, но все экстремали пересекаются в одной точке ((a,A) или (b,B)).

В обоих случаях можно однозначно определить функцию $p(x,y)$: $p(x,y)$ - производная в точке x той экстремали $y(x)$, которая проходит через точку (x, y). В случае центрального поля функция $p(x, y)$ определена везде в области G, кроме одной из точек пересечения экстремалей (a, A) или (b, B).



Рассмотрим интеграл

$$J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} \left\{ F\left(x, y, p(x, y)\right) + \left(\frac{d}{dx} y(x) - p(x, y)\right) F_p\left(x, y, p(x, y)\right) \right\} dx$$

по кривой $\tilde{C} \subseteq G$. Заметим, что $J(\overline{C}) = I(\overline{C}) = V[\overline{C}]$, так как $\overline{y}(x)$ принадлежит полю экстремалей и, следовательно, $\dfrac{d}{dx} y(x) - p(x, y) = 0$ на кривой $\overline{C}$.

Перепишем исследуемый интеграл в виде $J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} \left[F\left(x, y, p\right) - pF_p \right] dx + F_p dy$ и заметим, что это криволинейный интеграл второго рода.

Покажем, что под знаком интеграла стоит полный дифференциал. Для этого достаточно убедиться в том, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F - pF_p\right) = \frac{\partial}{\partial x} F_p.$$

Поскольку $F \equiv F\left(x, y, p(x, y)\right)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} F_p = F_{px} + F_{pp} p_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F - pF_p\right) = F_y + F_p p_y - F_p p_y - p\left(F_{py} + F_{pp} p_y\right).$$

Через каждую точку (x, y) области G проходит экстремаль, поэтому в каждой точке (x, y) выполняется соотношение (уравнение Эйлера)

$$\left.\left(F_y - \frac{d}{dx} F_p\left(x, y, p(x, y)\right)\right)\right|_{y = y(x)} = 0,$$

где $y = y(x)$ - экстремаль (т.е. решение уравнения Эйлера), проходящая через заданную точку (x, y). Или

$$F_y - F_{px} - F_{py} p - F_{pp}\left(p_x + p_y p\right) = 0,$$

то есть равенство $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(F - pF_p\right) = \dfrac{\partial}{\partial x} F_p$ выполняется.

Итак, интеграл $J(\tilde{C})$ не зависит от выбора пути интегрирования, и

$$V[\bar{y}] = J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} \left\{F(x, y, p) + (y' - p) \cdot F_p(x, y, p)\right\} dx = I(\bar{C}).$$

Поэтому

$$\Delta V = I(\tilde{C}) - I(\bar{C}) = I(\tilde{C}) - J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} \left\{F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) \cdot F_p(x, y, p)\right\} dx.$$

Определим теперь <u>функцию Вейерштрасса</u>:

$$E(x, y, y', p) \equiv F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p) \cdot F_p(x, y, p).$$

Очевидно достаточное условие минимума: $E \geq 0$ в окрестности $\bar{y}(x)$. В зависимости от того, какая выбирается окрестность – слабая или сильная, мы получим слабый или сильный минимум.

Сформулируем еще раз достаточное условие сильного (слабого) минимума:

1) $y = \bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера;

2) $y = \bar{y}(x)$ может быть включена в собственное или центральное поле экстремалей;

3) $E(x, y, y', p) \geq 0$ в сильной (слабой) окрестности $y = \bar{y}(x)$.

В случае сильного (слабого) максимума достаточно выполнение условия $E \leq 0$.

Получим еще одно достаточное условие минимума, которое легко проверить. Будем предполагать, что $F(x, y, y')$ дважды непрерывно дифференцируема по y'. Разложим эту функцию в ряд Тейлора в точке p (по третьему аргументу) с остаточным членом в форме Лагранжа

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p) \cdot F_{y'}(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2} F_{y'y'}(x, y, q),$$

$$q \in [p, y'] \quad \text{или} \quad q \in [y', p].$$

Тогда функция Вейерштрасса примет имеет вид

$$E(x, y, y', p) = \frac{(y' - p)^2}{2} F_{y'y'}(x, y, q).$$

Чтобы было выполнено условие $E \geq 0$, можно потребовать $F_{y'y'} \geq 0$ в (слабой или сильной) окрестности экстремали $y = \bar{y}(x)$. Это <u>условие Лежандра</u> для (слабого или сильного) минимума. Для слабого минимума достаточно выполнения неравенства $F_{y'y'} > 0$ на самой экстремали $y = \bar{y}(x)$. Сформулируйте самостоятельно условия Лежандра для сильного и слабого максимума.

Рассмотрим пример. Пусть требуется исследовать на экстремум функционал

$$V[y] = \int_0^a (y')^3 dx$$

с граничными условиями $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$, $b > 0$.

Из уравнения Эйлера $y'' = 0$ получаем $y = C_1 x + C_2$. Используя граничные условия, находим кривую, для которой выполняется необходимое условие экстремума:

$$y = \bar{y}(x) = \frac{b}{a} x .$$

Эта кривая может быть включена в центральное поле экстремалей – множество функций вида $y = Cx$, или собственное поле экстремалей - множество функций вида $y = \frac{b}{a} x + C$ (C – произвольная постоянная).

Функция Вейерштрасса имеет вид

$$E(x, y, y', p) = (y')^3 - p^3 - (y' - p)3p^2 = (y' - p)^2 (y' + 2p)$$

и обращается в нуль при $y' = p$, $y' = -2p$.

На рассматриваемой кривой $y = \bar{y}(x) = \frac{b}{a} x$ имеем $p = \frac{b}{a} > 0$. Поэтому в слабой окрестности $\bar{y}(x)$ выполнено неравенство $E \geq 0$; в сильной окрестности это неравенство, очевидно, не выполняется. Тем самым, функция $\bar{y}(x)$ реализует слабый минимум функционала $V[y]$.

Еще легче проверить условие Лежандра:

$$F_{y'y'} = 6y'\big|_{y=\frac{b}{a}x} = 6\frac{b}{a} > 0 .$$

В заключение скажем несколько слов о численных методах в вариационном исчислении:

1) Прежде всего уравнение $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ с граничными условиями $y(a) = A$, $y(b) = B$ можно решать численными методами.

2) Можно использовать также следующий подход. Экстремум функционала $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ ищется на множестве функций вида $y_n = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n w_n(x)$, где $w_n(x)$ - заданные функции. Задача сводится к отысканию минимума (или максимума) функции N переменных. Очевидно, что

$$\max\ V[y] \geq \max\ \varphi(\alpha_1, \ldots \alpha_n) \geq \min\ \varphi(\alpha_1, \ldots \alpha_n) \geq \min\ V[y] .$$

Можно применять и другие подходы. Из-за недостатка времени мы не можем рассмотреть их подробно. Эти методы изучаются в курсе “Численные методы”, а также в специальных курсах, посвященных численным методам решения экстремальных задач.

<u>Экзаменационные вопросы</u>

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение центрального поля экстремалей.
2. Сформулировать определение собственного поля экстремалей.
3. Сформулировать достаточные условия сильного минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
4. Сформулировать достаточные условия слабого минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
5. Сформулировать достаточные условия Лежандра сильного минимума в задаче с закрепленными концами.
6. Сформулировать достаточные условия Лежандра слабого минимума в задаче с закрепленными концами.
7. Сформулировать достаточные условия сильного максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
8. Сформулировать достаточные условия слабого максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
9. Сформулировать достаточные условия Лежандра сильного максимума в задаче с закрепленными концами.
10. Сформулировать достаточные условия Лежандра слабого максимума в задаче с закрепленными концами.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Обосновать достаточные условия сильного минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
2. Обосновать достаточные условия слабого минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
3. Обосновать достаточные условия Лежандра сильного минимума в задаче с закрепленными концами.
4. Обосновать достаточные условия Лежандра слабого минимума в задаче с закрепленными концами.
5. Обосновать достаточные условия сильного максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
6. Обосновать достаточные условия слабого максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
7. Обосновать достаточные условия Лежандра сильного максимума в задаче с закрепленными концами.
8. Обосновать достаточные условия Лежандра слабого максимума в задаче с закрепленными концами.
9. Найти экстремали функционала $V[y]=\int_0^a \left(y'\right)^3 dx$ с граничными условиями $y(0)=0$, $y(a)=b$, $a>0$, $b>0$ и определить тип экстремума (слабый или сильный, минимум или максимум) в зависимости от значений параметров a и b.

Глава 3. ПОНЯТИЕ О МЕТОДАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Лекции №№ 13-14

§1. Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода как пример некорректно поставленной задачи.

Эта тема по предмету рассмотрения примыкает к первой главе, однако, помещена в конец курса, поскольку существенно использует методы вариационного исчисления.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Ay \equiv \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \qquad x \in [c,d].$$

Как и ранее, будем предполагать, что ядро $K(x,s)$ - функция, непрерывная по совокупности аргументов $x \in [c,d]$, $s \in [a,b]$, а решение $y(s)$ - непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Тем самым, мы можем рассматривать оператор A как действующий в следующих пространствах:

$$A : C[a,b] \to h[c,d]$$
$$A : \ h[a,b] \to h[c,d].$$

Остановимся подробнее на первом случае и покажем, что задача решения уравнения Фредгольма первого рода при условии $A : C[a,b] \to h[c,d]$ является некорректно поставленной.

Напомним определение корректной постановки задачи.

1) Решение существует для любой непрерывной на $[c,d]$ функции $f(x)$.

На самом же деле, это не так: существует бесконечно много непрерывных функций, для которых решения нет. Мы не можем доказать это утверждение в общем виде. Для доказательства необходимо использовать некоторые сведения из функционального анализа, знание которых выходит за рамки данного курса. Поэтому поясним это утверждение только на примере.

Пусть ядро $K(x,s)$ таково, что существует $K'_x(x_0,s)$, $x_0 \in (c,d)$, для любого $s \in [a,b]$. Тогда существует производная $\left.\left(\int_a^b K(x,s)y(s)ds\right)'\right|_{x=x_0}$ для любой непрерывной функции $y(s)$. А теперь в качестве $f(x)$ возьмём непрерывную функцию такую, что $f'(x)\big|_{x=x_0}$ не существует. Тогда очевидно, что решение интегрального уравнения также не существует.

2) Единственность решения.

Будем требовать, чтобы ядро было замкнуто. Тогда, если решение есть, то оно единственно.

Первые два условия корректности эквивалентны условию существования обратного оператора A^{-1} с областью определения $D(A^{-1}) = h[c,d]$. Если ядро замкнуто, то обратный оператор существует, однако область его определения не совпадает с $h[c,d]$.

3) Устойчивость решения.

Это означает, что для любой последовательности $f_n \to \bar{f}$, $Ay_n = f_n$, $A\bar{y} = \bar{f}$, последовательность $y_n \to \bar{y}$. Устойчивость эквивалентна непрерывности обратного оператора A^{-1} при условии, что обратный оператор существует.

Покажем, что это не так. Рассмотрим следующий пример. Пусть последовательность непрерывных функций $y_n(s)$, $n = 1,2,3,...$ такова, что $y_n(s) \neq 0$ на промежутке $\left[\frac{a+b}{2} - d_n, \frac{a+b}{2} + d_n\right]$ и обращается в нуль вне данного интервала. Пусть также $\max\limits_{s\in[a,b]} |y_n(s)| = 1$, а последовательность чисел $d_n \to 0+0$. Такая функция может быть выбрана, например, кусочно-линейной. Тогда для любого $x \in [c,d]$

$$|f_n(x)| = \left|\int_a^b K(x,s)y_n(s)ds\right| = \left|\int_{\frac{a+b}{2}-d_n}^{\frac{a+b}{2}+d_n} K(x,s)y_n(s)ds\right| \le K_0 \cdot 1 \cdot 2d_n \to 0$$

при $n \to \infty$, где $K_0 = \max|K(x,s)|$, $x \in [c,d]$, $s \in [a,b]$.

Последовательность функций $f_n(x)$ равномерно, а, следовательно, и в $h[c,d]$, сходится к пределу $\bar{f} = 0$. Решение уравнения $A\bar{y} = \bar{f}$ в этом случае $\bar{y} = 0$, однако последовательность y_n не стремится к $\bar{y}$, так как $\|y_n - \bar{y}\|_{C[a,b]} = 1$.

Ранее мы доказали, что оператор Фредгольма является вполне непрерывным при действии из $h[a,b]$ в $h[c,d]$ и при действии из $C[a,b]$ в $h[c,d]$. Мы также привели пример последовательности y_n, $\|y_n\|_{h[a,b]} = 1$, из которой нельзя выделить сходящуюся в $h[a,b]$ подпоследовательность. В качестве такой последовательности можно выбрать, например,

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\frac{\pi n(x-a)}{b-a}, \qquad n = 1,2,3,... \,.$$

Очевидно, что эта последовательность равномерно, т.е. по норме $C[a,b]$, ограничена, но из нее нельзя выделить сходящуюся в $C[a,b]$ подпоследовательность.

Предположим теперь, что оператор A^{-1} является непрерывным. Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что, если оператор $B: \ h[c,d] \to C[a,b]$ является непрерывным, а оператор A вполне непрерывный, то $BA: C[a,b] \to C[a,b]$ - вполне непрерывный оператор. Отсюда следует, что поскольку для любого n выполнено

$$A^{-1}Ay_n = y_n,$$

то последовательность y_n компактна, что неверно. Таким образом, оператор, обратный к вполне непрерывному оператору, не может быть непрерывным.

Итак, поскольку задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода некорректно поставлена, то даже при очень малых ошибках в задании $f(x)$ решение может либо отсутствовать, либо очень сильно отличаться от искомого точного решения. Некорректно поставленные задачи очень часто встречаются при обработке результатов физического эксперимента, в частности, в астрофизике, геофизике, ядерной физике и т. д., следовательно, функция $f(x)$ находится в результате эксперимента, поэтому неизбежно содержит ошибки.

§2. Метод регуляризации А.Н. Тихонова.

А. Н. Тихонов в 1963 году заложил основы теории решения некорректно поставленных задач, введя понятие регуляризирующего алгоритма (оператора).

Оператор $R(f_\delta,\delta)\equiv R_\delta(f_\delta)$ называется <u>регуляризирующим алгоритмом</u> (РА) для решения операторного уравнения $Ay=f$; $A:C[a,b]\to h[c,d]$, если:

1) оператор $R_\delta(f_\delta)$ определен для любого $f_\delta\in h[c,d]$ и любого $0<\delta<+\infty$ и отображает $h[c,d]\to C[a,b]$ при каждом фиксированном $\delta>0$;

2) для любой функции $\bar{y}\in C[a,b]$ и любой функции $f_\delta\in h[c,d]$ такой, что $\left\|f_\delta-\bar{f}\right\|_{h[c,d]}\le\delta$, $\delta>0$, $A\bar{y}=\bar{f}$, приближенное решение $y_\delta=R_\delta(f_\delta)\xrightarrow{C[a,b]}\bar{y}$ при $\delta\to 0$.

Точно также можно определить регуляризирующий алгоритм решения операторного уравнения $Ay=f$, $A:N_1\to N_2$, где N_1 и N_2 – нормированные пространства.

Некорректно поставленная задача называется <u>регуляризируемой</u>, если существует хотя бы один регуляризирующий алгоритм ее решения. Все математические задачи, сводящиеся к решению операторного уравнения $Ay=f$, могут быть классифицированы следующим образом:

1) корректно поставленные;
2) некорректно поставленные, регуляризируемые;
3) некорректно поставленные, нерегуляризируемые.

Понятно, что корректно поставленные задачи являются регуляризируемыми, поскольку в качестве регуляризирующего алгоритма можно выбрать обратный оператор.

Рассмотрим регуляризирующий алгоритм решения интегрального уравнения первого рода, предложенный А. Н. Тихоновым.

Введем функционал Тихонова

$$M^\alpha[y]=\left\|Ay-f\right\|^2_{h[c,d]}+\alpha\left(\|y\|^2_{h[a,b]}+\|y'\|^2_{h[a,b]}\right),$$

где $y(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, $f\in h[c,d]$, а число $\alpha>0$ называется <u>параметром регуляризации</u>.

Теорема (А. Н. Тихонов). Для любой функции $f\in h[c,d]$ и любого параметра регуляризации $\alpha>0$ существует и притом единственная функция $y^\alpha(s)$, реализующая минимум функционала $M^\alpha[y]$ и являющаяся решением краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Эйлера.

<u>Доказательство.</u> Для упрощения опустим обозначения функциональных пространств при записи норм в функционале Тихонова, т.е.

$$M^\alpha[y]=\left\|Ay-f\right\|^2+\alpha\left(\|y\|^2+\|y'\|^2\right),$$

где $\quad \left\|y\right\|^2=\int\limits_a^b y^2(s)\,ds,\quad \left\|y'\right\|^2=\int\limits_a^b\left(y'(s)\right)^2ds,\quad \left\|Ay-f\right\|^2=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds-f(x)\right)^2dx.$

Далее мы вычислим вариацию функционала Тихонова и приравняем ее нулю. При этом будет найдена так называемая сильная вариация, а читателям предлагается посчитать и приравнять нулю так называемую слабую вариацию

$$\left.\frac{d}{dt}M^\alpha[y+th]\right|_{t=0}=0,$$

и убедиться, что результат не изменится.

Определим сначала граничные условия. Будем предполагать, что мы не знаем значения $y(s)$ на концах отрезка $[a,b]$, поэтому рассмотрим задачу со свободными концами. В параграфе 2.5 для этого случая были получены граничные условия в задаче поиска экстремума функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$, а именно

$$F_{y'}\Big|_a=0\,,\qquad F_{y'}\Big|_b=0\,.$$

Заметим, что в функционале Тихонова от y' зависит только слагаемое $\alpha\|y'\|^2=\alpha\int\limits_a^b\left(y'(s)\right)^2 ds$. Поэтому $F_{y'}=2\alpha y'$, и мы получаем однородные граничные условия второго рода

$$y'(a)=0\,,\qquad y'(b)=0\,.$$

Вычислим вариацию функционала Тихонова. Для этого зададим приращение аргумента δy и выделим линейную по δy часть разности $M^\alpha[y+\delta y]-M^\alpha[y]$. Для получения уравнения Эйлера приравняем линейную часть приращения к нулю.

Итак, рассмотрим разность

$$M^\alpha[y+\delta y]-M^\alpha[y]=\|A(y+\delta y)-f\|^2+\alpha\left(\|y+\delta y\|^2+\|y'+\delta y'\|^2\right)-M^\alpha[y]\,,$$

где δy непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$\delta y'(a)=0\,,\qquad \delta y'(b)=0\,.$$

Заметим, что

$$\|A(y+\delta y)-f\|^2=\|(Ay-f)+A\delta y\|^2=\left((Ay-f)+A\delta y,(Ay-f)+A\delta y\right)=$$

$$=(Ay-f,Ay-f)+2\left((Ay-f),A\delta y\right)+(A\delta y,A\delta y)=\|(Ay-f)\|^2+2\left(A^*Ay-A^*f,\delta y\right)+\|A\delta y\|^2\,.$$

Последний член в этом выражении удовлетворяет неравенству $\|A\delta y\|^2\le\|A\|^2\|\delta y\|^2$, из которого следует, что $\|A\delta y\|^2=o(\|\delta y\|)$.

Далее

$$\|y+\delta y\|^2=(y+\delta y,y+\delta y)=\|y\|^2+2(y,\delta y)+\|\delta y\|^2\,;$$

$$\|y'+\delta y'\|^2=(y'+\delta y',y'+\delta y')=\|y'\|^2+2(y',\delta y')+\|\delta y'\|^2\,.$$

Преобразуем $\quad (y',\delta y')=\int\limits_a^b y'(s)\delta y'(s)ds=y'\delta y\Big|_a^b-\int\limits_a^b y''(s)\delta y(s)ds=-(y'',\delta y)$, причем $y'\delta y\Big|_a^b=0$, так как $y'(a)=y'(b)=0$.

Итак,

$$M^\alpha[y+\delta y]-M^\alpha[y]=$$

$$=2\left(A^*Ay-A^*f,\delta y\right)+\|A\delta y\|^2+2\alpha\left((y,\delta y)-(y'',\delta y)\right)+\alpha\|\delta y\|^2+\alpha\|\delta y'\|^2=$$

$$=2\left(A^*Ay-A^*f+\alpha(y-y''),\delta y\right)+\|A\delta y\|^2+\alpha\left(\|\delta y\|^2+\|\delta y'\|^2\right).$$

Выделим линейную по δy часть приращения и приравняем ее нулю:

$$\left(A^*Ay-A^*f+\alpha(y-y''),\delta y\right)=\int\limits_a^b\left(A^*Ay-A^*f+\alpha(y-y'')\right)\delta y(s)ds=0\,.$$

Читателям предлагается самим сформулировать и доказать необходимый вариант основной леммы вариационного исчисления (параграф 2.3) и вывести уравнение Эйлера

$$A^*Ay-A^*f+\alpha(y-y'')=0\,.$$

Окончательно получаем, что функция, на которой достигается экстремум функционала Тихонова, является решением второй краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} A^*Ay+\alpha\left(y-y''\right)=A^*f; \\ y'(a)=0\ , \quad y'(b)=0. \end{cases}$$

На решении этой задачи достигается минимум функционала Тихонова потому, что, если y является решением этой задачи, то

$$M^{\alpha}\left[y+\delta y\right]-M^{\alpha}\left[y\right]=\left\|A\delta y\right\|^2+\alpha\left(\left\|\delta y\right\|^2+\left\|\delta y'\right\|^2\right)\geq 0$$

для любого допустимого приращения δy.

Перепишем краевую задачу в следующем виде:

$$\begin{cases} y''-y=\dfrac{1}{\alpha}\left(A^*Ay-A^*f\right); \\ y'(a)=0\ , \quad y'(b)=0. \end{cases}$$

Как известно из курса дифференциальных уравнений, если существует функция Грина задачи

$$\begin{cases} y''-y=F; \\ y'(a)=0\ , \quad y'(b)=0 \end{cases},$$

то ее решение представимо в виде $y(\tau)=\int\limits_a^b G(\tau,\xi)F(\xi)\,d\xi$.

Докажем, что функция Грина существует. Для доказательства достаточно показать, что однородная краевая задача

$$\begin{cases} y''-y=0; \\ y'(a)=0\ , \quad y'(b)=0 \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение.

Общее решение уравнения $y''-y=0$ можно записать в виде

$$y=\tilde{C}_1e^{\tau}+\tilde{C}_2e^{-\tau}=C_1\mathrm{ch}(\tau-a)+C_2\mathrm{ch}(\tau-b).$$

Из первого граничного условия получаем $C_2=0$, а из второго - $C_1=0$. Поэтому указанная краевая задача имеет только тривиальное решение, и, следовательно, функция Грина существует. В качестве упражнения рекомендуем построить функцию Грина.

Если мы подействуем интегральным оператором с ядром - функцией Грина (мы обозначим этот оператор G) - на левую и правую часть интегро-дифференциального уравнения Эйлера, то получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y=\frac{1}{\alpha}\left(GA^*Ay-GA^*f\right),$$

эквивалентное второй краевой задаче для уравнения Эйлера. Докажите самостоятельно (рассуждая, как и в параграфе 1.14) эквивалентность этих двух задач.

Ядро оператора A^*A имеет вид

$$\tilde{K}(\xi,s)=\int\limits_c^d K(\eta,\xi)K(\eta,s)\,d\eta,$$

а ядро оператора GA^*A -

$$\tilde{G}(\tau,s)=\int\limits_a^b G(\tau,\xi)\tilde{K}(\xi,s)\,d\xi.$$

Ядра $\tilde{K}(\eta,s)$, $K(\xi,s)$, $G(\tau,\xi)$ непрерывны по совокупности аргументов, следовательно, ядро $\tilde{G}(\tau,s)$ также непрерывно по совокупности аргументов. Столь же очевидно, что неоднородность $-\dfrac{1}{\alpha}\left(GA^*f\right)$ в полученном уравнении Фредгольма второго рода также является непрерывной функцией. Поэтому, чтобы доказать существование и единственность решения уравнения Фредгольма, в силу альтернативы Фредгольма достаточно доказать, что однородное уравнение

$$y = \frac{1}{\alpha} G A^* A y$$

имеет только тривиальное решение.

Однородное уравнение эквивалентно следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \alpha\left(y - y''\right) + A^* A y = 0; \\ y'(a) = y'(b) = 0. \end{cases}$$

Пусть y – любое ее решение. Домножим уравнение слева и справа на y и проинтегрируем в пределах от a до b, заметив, что

$$\left(y, y\right) = \|y\|^2, \quad \left(A^* A y, y\right) = \|Ay\|^2, \quad -\left(y'', y\right) = -\int_a^b y''(\tau) y(\tau)\, d\tau = -y'y\Big|_a^b + \int_a^b \left(y'\right)^2 d\tau = \|y'\|^2 .$$

Получим, что решение краевой задачи удовлетворяет равенству

$$\|Ay\|^2 + \alpha\|y\|^2 + \alpha\|y'\|^2 = 0 .$$

Поскольку $\alpha > 0$, то $y \equiv 0$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Лемма. Рассмотрим множество функций $y(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ и таких, что

$$\|y\|^2_{h[a,b]} + \|y'\|^2_{h[a,b]} \le C^2, \quad C > 0 .$$

Тогда это множество равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Доказательство. Заметим, что из неравенства в условии леммы следует, что $\|y\| \le C$, $\|y'\| \le C$.

Докажем сначала равностепенную непрерывность. Возьмем произвольную фенкцию $y(x)$, удовлетворяющую условиям леммы, и любые $x_1, x_2 \in [a,b]$. Тогда

$$\left|y(x_2) - y(x_1)\right| = \left|\int_{x_1}^{x_2} y' dx\right| \le \sqrt{\left|\int_{x_1}^{x_2} 1\cdot dx\right|} \cdot \sqrt{\left|\int_{x_1}^{x_2} \left(y'(x)\right)^2 dx\right|} \le \sqrt{|x_2 - x_1|}\sqrt{\int_a^b \left(y'(x)\right)^2 dx} \le C\sqrt{|x_2 - x_1|} .$$

Из этого неравенства следует, что множество функций является равностепенно непрерывным.

Докажем теперь равномерную ограниченность.

Из неравенства $\int_a^b y^2(x)dx \le C^2, \quad C > 0$, применяя теорему о среднем, получим

$$y^2(\xi)\int_a^b dx \le C^2, \;\; \xi \in [a,b],$$

откуда $|y(\xi)| \le \dfrac{C}{\sqrt{b-a}}$.

Выберем произвольную точку $x \in [a,b]$. Тогда

$$|y(x)| = |y(\xi) + y(x) - y(\xi)| \le |y(\xi)| + |y(x) - y(\xi)| \le \frac{C}{\sqrt{b-a}} + C\sqrt{|x-\xi|} \le \frac{C}{\sqrt{b-a}} + C\sqrt{b-a} \equiv \widetilde{C} ,$$

где $\widetilde{C}$ не зависит ни от x, ни от y. Следовательно, множество функций равномерно ограничено. Лемма доказана.

Следствие. Пусть $\{y_n(x)\}$, $n = 1,2,3,...$ - последовательность непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, удовлетворяющих неравенству

$$\|y_n\|^2_{h[a,b]} + \|y'_n\|^2_{h[a,b]} \le C^2, \quad C>0,$$

тогда эта последовательность является компактной в пространстве $C[a,b]$.

Доказательство. По доказанной выше лемме, эта последовательность является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной. По теореме Арцела из неё можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции.

Теорема (А. Н. Тихонов). Пусть

$f_\delta(x)$ - непрерывная на сегменте $[c,d]$ функция, причем $\|f_\delta - \bar f\|_{h[c,d]} \le \delta$, где $\delta \in (0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$;

функция $\bar f$ такова, что $A\bar y = \bar f$, где A - интегральный оператор с ядром $K(x,s)$, $x\in[c,d]$, $s\in[a,b]$, непрерывным по совокупности аргументов и замкнутым, а $\bar y(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$.

Пусть параметр регуляризации $\alpha(\delta)>0$ удовлетворяет следующим требованиям: $\alpha(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$ и для любого $\delta\in(0,\delta_0]$ имеет место $\dfrac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \le C$, где $C>0$.

Тогда $y_\delta^{\alpha(\delta)} = \arg\min M^{\alpha(\delta)}[y]$, т.е. функция, на которой достигается минимум функционала Тихонова

$$M^\alpha[y] = \|Ay - f_\delta\|^2_{h[c,d]} + \alpha\left(\|y\|^2_{h[a,b]} + \|y'\|^2_{h[a,b]}\right), \quad \alpha=\alpha(\delta),$$

обладает тем свойством, что $y_\delta^{\alpha(\delta)} \xrightarrow{C[a,b]} \bar y$ при $\delta\to 0$.

Перед тем, как перейти к доказательству теоремы, заметим, что мы получим регуляризирующий алгоритм Тихонова для случая, когда интегральный оператор действует $A: C[a,b]\to h[c,d]$ при дополнительном условии непрерывной дифференцируемости точного решения интегрального уравнения, т.е. $\bar y \in C^{(1)}[a,\ b]$.

Доказательство. Заметим, что функция $y_\delta^{\alpha(\delta)}$ существует и единственна, как было доказано выше. Предположим, что $y_\delta^{\alpha(\delta)}$ не стремится к $\bar y$ в $C[a,b]$ при $\delta\to 0$. Тогда существуют $\varepsilon>0$ и последовательность $\delta_k\to 0$ такие, что $\left\|y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - \bar y\right\|_{C[a,b]} \ge \varepsilon > 0$.

Заметим, что

$$M^\alpha[y_\delta^\alpha] = \min M^\alpha[y] \le M^\alpha[\bar y] = \|A\bar y - f_\delta\|^2 + \alpha\left(\|\bar y\|^2 + \|\bar y'\|^2\right) \le \delta^2 + \alpha\left(\|\bar y\|^2 + \|\bar y'\|^2\right),$$

откуда получаем

$$\|Ay_\delta^\alpha - f_\delta\|^2 + \alpha\left(\|y_\delta^\alpha\|^2 + \|(y_\delta^\alpha)'\|^2\right) \le \delta^2 + \alpha\left(\|\bar y\|^2 + \|\bar y'\|^2\right).$$

В левой части этого соотношения оба слагаемые неотрицательны. Поэтому мы можем получить два неравенства:

1) $$\|y_\delta^\alpha\|^2 + \|(y_\delta^\alpha)'\|^2 \le \frac{\delta^2}{\alpha} + \|\bar y\|^2 + \|\bar y'\|^2$$

2) $$\|Ay_\delta^\alpha - f_\delta\|^2 \le \delta^2 + \alpha\left(\|\bar y\|^2 + \|\bar y'\|^2\right).$$

Если α=α(δ), то так как $\dfrac{\delta^2}{\alpha} \le C$ при $\delta\in(0,\delta_0]$, из первого неравенства вытекает $\left\|y_\delta^{\alpha(\delta)}\right\|^2 + \left\|(y_\delta^{\alpha(\delta)})'\right\|^2 \le C + \|\bar y\|^2 + \|\bar y'\|^2 \le \widetilde C$. В силу доказанной выше леммы, последовательность $y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)}$ является компактной в пространстве $C[a,b]$. Поэтому существуют такая подпоследовательность ее и такая непрерывная на $[a,b]$ функция y^*, что указанная подпоследовательность равномерно сходится к y^*.

Не ограничивая общности, будем считать, что $y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} \xrightarrow{C[a,b]} y^*$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\left\|Ay_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - A\bar{y}\right\|_{h[c,d]} = \left\|Ay_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - f_{\delta_k} + f_{\delta_k} - \bar{f}\right\| \le \left\|Ay_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - f_{\delta_k}\right\| + \delta_k \le \sqrt{\delta_k^2 + \alpha(\delta_k)(\|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2)} + \delta_k.$$

(Здесь мы использовали второе неравенство, следующее из $M^{\alpha}[y_{\delta}^{\alpha}] \le M^{\alpha}[\bar{y}]$). Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $\|Ay^* - A\bar{y}\| = 0$ или $Ay^* = A\bar{y}$.

В силу взаимной однозначности интегрального оператора (условие замкнутости ядра) из равенства $Ay^* = A\bar{y}$ следует, что $y^* = \bar{y}$. Итак, $y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}$ при $k \to \infty$, и мы приходим к противоречию с предположением, что $\left\|y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - \bar{y}\right\| \ge \varepsilon > 0$. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Пусть $\delta = 0$, $f_{\delta} = \bar{f}$, $M^{\alpha}[y] = \left\|Ay - \bar{f}\right\|^2 + \alpha(\|y\|^2 + \|y'\|^2)$, $y^{\alpha} = \arg\min M^{\alpha}[y]$. Тогда $y^{\alpha} \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}$ при $\alpha \to 0+0$.

Доказательство этого утверждения во многом повторяет проделанное выше и предоставляется слушателям.

С другими способами выбора параметра регуляризации можно ознакомиться в монографии: А.Н.Тихонов, А.В.Гончарский, В.В.Степанов, А.Г.Ягола. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

<u>Экзаменационные вопросы</u>

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение корректно и некорректно поставленной задачи.
2. Сформулировать определение регуляризируемой некорректно поставленной задачи.
3. Сформулировать регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова.
4. Записать функционал А. Н. Тихонова.
5. Сформулировать теорему о существовании и единственности минимума функционала А.Н.Тихонова.
6. Сформулировать теорему о согласовании параметра регуляризации в функционале А.Н.Тихонова с погрешностью входных данных для построения регуляризирующего алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ корректно поставлена в $C[a,b]$.
2. Доказать, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ корректно поставлена в $h[a,b]$.
3. Доказать, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода при условии, что интегральный оператор действует $A: C[a,b] \to h[a,b]$, является некорректно поставленной.
4. Доказать, что если взаимно однозначный оператор A является вполне непрерывным при действии из $h[a,b]$ в $h[c,d]$, то обратный оператор не является ограниченным.
5. Доказать теорему о существовании и единственности минимума функционала А.Н.Тихонова.

6. Доказать теорему о согласовании параметра регуляризации в функционале А.Н.Тихонова с погрешностью входных данных для построения регуляризирующего алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.
7. Доказать теорему: пусть взаимно однозначный интегральный оператор с непрерывным ядром $A: C[a,b] \to h[c,d]$, и $A\bar{y} = \bar{f}$, где $\bar{y}(x)$ непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, $M^{\alpha}[y] = \left\| Ay - \bar{f} \right\|^2 + \alpha(\left\| y \right\|^2 + \left\| y' \right\|^2)$ (нормы соответственно в $h[c,d]$ и $h[a,b]$), $y^{\alpha} = \arg\min M^{\alpha}[y]$. Тогда $y^{\alpha} \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}$ при $\alpha \to 0+0$.
8. Доказать, что множество функций $y(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ и таких, что $\left\| y \right\|^2_{h[a,b]} + \left\| y' \right\|^2_{h[a,b]} \le C^2$, $C > 0$ равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.
9. Доказать, что последовательность функций $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, ...$ непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ и удовлетворяющих неравенству $\left\| y_n \right\|^2_{h[a,b]} + \left\| y'_n \right\|^2_{h[a,b]} \le C^2$, является компактной в $C[a,b]$.
10. Исследовать на разрешимость уравнение $\int\limits_a^x y(s)ds = f(x), \quad x, s \in [a,b].$