Материалы к экзамену по курсу
"Интегральные уравнения. Вариационное исчисление"
(Спецпоток)

Экзамен по курсу "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление" состоит из 2-х частей.

1-я часть экзамена - тест на знание определений, формулировок теорем и имение решать простые задачи. Правильные ответы на ВСЕ вопросы билета первой части экзамена гарантируют получение оценки "удовлетворительно".

Вопросы первой части экзамена содержатся в разделах 1 и 2 приведенного ниже списка. Образцы билетов первой части экзамена можно найти в конце раздела 2.

2-я часть экзамена - теоретическая. К ней допускаются только студенты, успешно выполнившие первую. Для получения оценки "хорошо" и "отлично" необходимо уметь доказывать теоремы и решать задачи из разделов 3 и 4 списка.

Далее перечислены вопросы, включенные в экзаменационные билеты. Обращаем внимание, что один и тот же вопрос в различных постановках может присутствовать несколько раз как в одном разделе, так и в двух, или сразу в нескольких разделах списка.

В разделах 1 и 2 содержатся вопросы для первой части экзамена, в 3 и 4 - для второй части.

Вопросы полностью соответствуют курсу лекций "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление", опубликованному на сайте кафедры математики физического факультета.

Раздел 1. Определения и формулировки теорем

1. Записать уравнение Фредгольма 2-го рода. Какое уравнение называется однородным?
2. Записать уравнение Вольтерра 2-го рода. Какое уравнение называется однородным?
3. Записать уравнение Фредгольма 1-го рода. Какое уравнение называется однородным?
4. Записать уравнение Вольтерра 1-го рода. Какое уравнение называется однородным?
5. Сформулировать определение линейного пространства.
6. Сформулировать определение метрического пространства.
7. Сформулировать определение нормированного пространства.
8. Сформулировать определение евклидова пространства.
9. Сформулировать определение сходимости последовательности элементов метрического пространства.
10. Сформулировать определение сходимости последовательности элементов нормированного пространства.
11. Сформулировать определение фундаментальной последовательности элементов нормированного пространства.
12. Сформулировать определение банахова пространства.
13. Сформулировать определение пространства $C[a,b]$. Как называется сходимость по норме этого пространства?
14. Сформулировать определение пространства $C^{(p)}[a,b]$. Как называется сходимость по норме этого пространства?
15. Как определяется скалярное произведение в пространстве $h[a,b]$? Почему это пространство является бесконечномерным евклидовым пространством? Как называется сходимость по норме этого пространства?
16. Записать неравенство Коши-Буняковского.
17. Сформулировать определение линейного оператора.
18. Сформулировать два определения непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.
19. Сформулировать определение нормы линейного оператора, действующего в нормированных пространствах.
20. Сформулировать определение ограниченного линейного оператора.
21. Сформулировать определение ограниченной последовательности элементов нормированного пространства.
22. Сформулировать определение компактной последовательности элементов нормированного пространства.
23. Сформулировать определение вполне непрерывного оператора.
24. Сформулировать необходимое и достаточное условие компактности последовательности векторов конечномерного евклидового пространства R^n.
25. Сформулировать теорему Арцела.
26. Сформулировать определение оператора, сопряженного к линейному оператору, действующему в евклидовом пространстве.
27. Сформулировать определение самосопряженного (симметрического) оператора, действующего в евклидовом пространстве.
28. Сформулировать определение интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром.

29. Сформулировать определение собственного значения линейного оператора.
30. Сформулировать определение собственного вектора линейного оператора.
31. Сформулировать определение максимального вектора линейного оператора.
32. Сформулировать определение инвариантного подпространства линейного оператора.
33. Сформулировать определение кратности собственного значения линейного оператора.
34. Сформулировать определение собственной функции ядра интегрального оператора Фредгольма.
35. Сформулировать определение вырожденного линейного оператора.
36. Сформулировать определение замкнутого ядра интегрального оператора Фредгольма.
37. Сформулировать определение вырожденного ядра интегрального оператора Фредгольма.
38. Сформулировать определение скалярного произведения в комплексном расширении пространства *h[a,b]*.
39. Сформулировать определение функции, истокопредставимой с помощью ядра интегрального оператора.
40. Сформулировать теорему Гильберта-Шмидта.
41. Сформулировать определение интегрального оператора с полярным ядром.
42. Сформулировать определение интегрального оператора со слабо полярным ядром.
43. Сформулировать определение резольвенты интегрального оператора.
44. Сформулировать альтернативу Фредгольма.
45. При каком условии неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром имеет и притом единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$ - неоднородности уравнения?
46. Сформулировать условие разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром в случае, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение. Сколько решений имеет неоднородное уравнение, если оно разрешимо?
47. Сформулировать определение сжимающего оператора.
48. Сформулировать определение неподвижной точки оператора.
49. Сформулировать теорему о существовании неподвижной точки у сжимающего оператора. Как можно найти неподвижную точку?
50. Записать метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ.
51. Сформулировать определение повторного (итерированного) ядра интегрального оператора Фредгольма. Ядром какого интегрального оператора оно является?
52. Сформулировать теорему о разрешимости интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.
53. Записать интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.
54. Сформулировать определение союзного интегрального уравнения.
55. Сформулировать условие разрешимости неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.
56. Сформулировать теорему о числе линейно независимых решений однородного уравнения Фредгольма 2-го рода и союзного с ним (1-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
57. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода (2-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
58. Сформулировать альтернативу Фредгольма (3-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
59. Сформулировать теорему о характеристических числах интегрального оператора Фредгольма (4-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
60. Записать оператор Штурма-Лиувилля.
61. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля в случае однородных граничных условий первого рода.
62. Описать свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля в случае однородных граничных условий первого рода.
63. Сформулировать теорему Стеклова.
64. Сформулировать определение функционала.
65. Сформулировать определение непрерывного функционала.
66. Сформулировать определение дифференцируемого функционала.
67. Сформулировать определение вариации функционала.
68. Сформулировать постановку простейшей задачи вариационного исчисления – задачи с закрепленными концами.
69. Сформулировать определение сильного минимума функционала.
70. Сформулировать определение сильного максимума функционала.
71. Сформулировать определение слабого минимума функционала.
72. Сформулировать определение слабого максимума функционала.
73. Сформулировать необходимое условие экстремума в задаче с закрепленными концами.
74. Сформулировать основную лемму вариационного исчисления.
75. Сформулировать постановку задачи с закрепленными концами и необходимые условия экстремума для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y_1,...y_n;y_1',...y_n')\,dx.$

76. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума функционала $V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$ при условии, что концы закреплены, и имеется неголономная связь. Записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
77. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума функционала $V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$ при условии, что концы закреплены, и имеется голономная связь. Записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
78. Сформулировать определение геодезической линии.
79. Сформулировать изопериметрическую задачу с закрепленными концами и необходимые условия экстремума в этой задаче.
80. Записать условие трансверсальности.
81. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец закреплен, а правый подвижен, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
82. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец свободен, а правый подвижен, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
83. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца подвижны, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
84. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца свободны, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
85. Сформулировать определение центрального поля экстремалей.
86. Сформулировать определение собственного поля экстремалей.
87. Сформулировать достаточные условия сильного минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
88. Сформулировать достаточные условия слабого минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
89. Сформулировать достаточные условия Лежандра сильного минимума в задаче с закрепленными концами.
90. Сформулировать достаточные условия Лежандра слабого минимума в задаче с закрепленными концами.
91. Сформулировать достаточные условия сильного максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
92. Сформулировать достаточные условия слабого максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
93. Сформулировать достаточные условия Лежандра сильного максимума в задаче с закрепленными концами.
94. Сформулировать достаточные условия Лежандра слабого максимума в задаче с закрепленными концами.
95. Сформулировать определение корректно и некорректно поставленной задачи.
96. Сформулировать определение регуляризируемой некорректно поставленной задачи.
97. В чем заключается регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова?
98. Записать функционал А. Н. Тихонова.
99. Сформулировать теорему о существовании и единственности минимума функционала А.Н.Тихонова.
100. Сформулировать теорему о согласовании параметра регуляризации в функционале А.Н.Тихонова с погрешностью входных данных для построения регуляризирующего алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.

Раздел 2. Образцы экзаменационных задач, включенных в билеты

1. Найти расстояние между функциями в пространстве C[0,2]:
   а) $y=2\sin\pi x$ и $z=\cos\pi x$
   б) $y=x^2$ и $z=6x$.

2. Найти расстояние между функциями в пространстве h[0,1]:
   а) $y=3\cos\pi x$ и $z=\sin\pi x$
   б) $y=x^2$ и $z=x$

3. Найти нормы в пространстве C[0,2]:

а) $y = 2\sin\pi x - \cos\pi x$

б) $y = x^2 - 4x$

4. Найти нормы в пространстве h[0,1]:
а) $y = 3\cos\pi x - \sin\pi x$

б) $y = x^3 - 1$

5. Найти характеристические числа и собственные функции $y = \lambda\int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds$:

а) $K(x,s) = \cos x \cdot \sin s$ a=0, b=π

б) $K(x,s) = \cos(x+s)$ a=0, b=π

в) $K(x,s) = \sin(x-s)$ a=0, b=2π

г) $K(x,s) = x+s$ a=–1, b=1.

6. Решить интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

а) $y(x) = \lambda\int\limits_0^1 (x-1)\,y(s)\,ds + x$

б) $y(x) = \lambda\int\limits_{-1}^1 xs\,y(s)\,ds + 1$.

7. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:
а) $y'' + \lambda y = 0;\quad y(0) = 0,\ y'(1) = 0$

б) $y'' + \lambda y = 0;\quad y(0) = y(2\pi),\ y'(0) = y'(2\pi)$.

8. Доказать, что все собственные значения λ задачи Штурма-Лиувилля $(p(x)\cdot y')' - q(x)\cdot y + \lambda\cdot\rho(x)\cdot y = 0$ $(x\in(a,b),\ p(x)>0,\ q(x)\ge 0,\ \rho(x)>0)$ положительны при следующих граничных условиях:
а) $y'(a)=0,$ $y(b)=0$
б) $y'(a)=0,$ $y'(b)=0$ (λ - неотрицательны).

9. Записать интегральное уравнение Фредгольма, эквивалентное задаче Штурма-Лиувилля:
а) $y'' + \lambda\cdot(1+x^2)y = 0$ $y(0) = 0,\quad y(1) = 0$

б) $y'' + \lambda\cdot e^{2x}y = 0$ $y(0) = 0,\quad y'(1) = 0$.

10. Найти вариацию функционала:
б) $V[y] = \int\limits_a^b (x+y)dx$

г) $V[y] = \int\limits_a^b (y^2 - y'^2)dx$.

11. Найти экстремали функционала $V[y] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y'^2)dx$ с условиями $y(0) = 0,\quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

12. Записать условие трансверсальности в задаче поиска экстремума функционала $V[y] = \int\limits_a^{b=B[y]} (x+y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$, считая, что левый конец закреплен, а правый - подвижен.

13. Записать необходимое условие экстремума функционала $V[y]=\int_a^b [p(x)y'^2+q(x)y^2]\,dx$ в изопериметрической задаче $J[y]=\int_a^b \rho(x)y^2\,dx=1$, $y(a)=0$, $y(b)=0$, где $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции.

14. Записать необходимое условие экстремума функционала $V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')\,dx$ в задачах со связями:

а) $V[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2)dx$, $y^2+z^2=1$, $y(0)=1,\ y(1)=0,\ z(0)=0,\ z(1)=1$

б) $V[y,z]=\int_0^{\pi} (y'^2-z'^2)dx$, $y'=\sin x - z$, $y(0)=0,\ y(\pi)=0,\ z(0)=0,\ z(\pi)=\dfrac{\pi}{2}$.

<u>Образцы билетов для первой части экзамена</u>

Билет А

1. Записать интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода.
2. Найти норму функции $y=\sin x-\cos x$ в пространстве $C[0,2\pi]$.
3. Найти характеристические числа и собственные функции $y(x)=\lambda\int_0^{\pi}\cos(x-s)y(s)ds$.
4. Сформулировать определение сжимающего оператора.
5. Сформулировать теорему о необходимом условии экстремума функционала $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ в задаче с закрепленными концами $y(a)=A,\quad y(b)=b$.
6. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума функционала $V[y]=\int_a^{b=B[y]}\sqrt{1+y'^2}\,dx$, считая, что левый конец закреплен, а правый - подвижен.

Билет Б

1. Решить интегральное уравнение Фредгольма $y(x)=\lambda\int_{-1}^{1} xs\,y(s)\,ds+x^3$.
2. Дать определение сходимости последовательности элементов метрического пространства.
3. Сформулировать теорему Стеклова.
4. Сформулировать определение функционала.
5. Записать необходимое условие экстремума функционала $V[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2)dx$, если $y(0)=0,\ y(1)=1,\ z(0)=1,\ z(1)=0$, и имеется неголономная связь $y'-z=0$.
6. Сформулировать определение некорректно поставленной задачи.

Раздел 3. Утверждения и теоремы, которые нужно уметь доказывать

1. Доказать следующее утверждение: пусть *A* - самосопряженный оператор, действующий в евклидовом пространстве *E*, и *e* – произвольный вектор из *E*, $\|e\|=1$. Тогда справедливо неравенство $\|Ae\|^2 \le \|A^2e\|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда *e* является собственным вектором оператора A^2, соответствующим собственному значению $\Lambda = \|Ae\|^2$.
2. Доказать следующее утверждение: самосопряженный вполне непрерывный оператор *A*, действующий в евклидовом пространстве *E*, обладает максимальным вектором.
3. Доказать следующее утверждение: если *z* - максимальный вектор самосопряженного оператора *A*, действующего в евклидовом пространстве *E*, то *z* -собственный вектор оператора A^2, соответствующий собственному значению $\Lambda = \|A\|^2 = M^2$.
4. Доказать следующее утверждение: пусть оператор A действует в евклидовом пространстве *E*, и оператор A^2 обладает собственным вектором *z*, соответствующим собственному значению M^2. Тогда оператор A имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению M или $-M$.
5. Сформулируйте последовательность утверждений, из которых следует теорема: самосопряженный вполне непрерывный оператор *A*, действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, обладает собственным вектором, соответствующим собственному значению Λ: $|\Lambda| = \|A\|$.
6. Доказать теорему: оператор Фредгольма с вещественным, непрерывным по совокупности аргументов, не равным тождественно нулю, симметрическим ядром обладает собственным значением Λ, $\Lambda \ne 0$: $Ay = \Lambda y$, $y \ne 0$, $y \in h[a,b]$.
7. Доказать, что собственное значение Λ линейного оператора *A* такое, что $|\Lambda| = \|A\|$, является максимальным по модулю среди всех собственных значений этого оператора.
8. Доказать, что вполне непрерывный самосопряженный оператор имеет не более конечного числа линейно независимых векторов, собственные значения которых удовлетворяют условию $|\Lambda| \ge \delta > 0$.
9. Доказать, что число собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора A, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве, удовлетворяющих условию $|\Lambda| \ge \delta > 0$, конечно.
10. Доказать, что ненулевому собственному значению вполне непрерывного самосопряженного оператора A, действующему в бесконечномерном евклидовом пространстве, может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных векторов.
11. Доказать, что если самосопряженный вполне непрерывный оператор A, действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, имеет бесконечную последовательность собственных значений Λ_n, *n=1, 2, ...* , то $|\Lambda_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
12. Описать процесс построения собственных значений и собственных функций вполне непрерывного самосопряженного оператора A, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве.
13. Описать процесс построения собственных значений и собственных функций интегрального оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве *h[a,b]*.
14. Сформулировать и обосновать необходимые и достаточные условия того, что вектор φ принадлежит нуль-пространству вполне непрерывного самосопряженного оператора A, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве.
15. Доказать, что если интегральный оператор Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром имеет конечное число характеристических чисел, то ядро оператора представимо в виде $K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$, где λ_i - характеристические числа, φ_i - соответствующие им собственные функции.
16. Доказать теорему Гильберта-Шмидта.
17. Построить решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром с помощью разложения в ряд Фурье по собственным функциям ядра и доказать альтернативу Фредгольма.
18. Доказать теорему о существовании неподвижной точки у сжимающего оператора.
19. Доказать теорему о существовании неподвижной точки у оператора, натуральная степень которого является сжимающим оператором.

20. Доказать, что если λ «мало», то неоднородное уравнение Фредгольма 2 рода имеет, и притом единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x) \in C[a,b]$, причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений.
21. Доказать, что если λ «мало», то однородное уравнение Фредгольма 2 рода имеет только тривиальное решение.
22. Доказать сходимость ряда Неймана для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ.
23. Получить выражение для резольвенты для интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ и доказать равномерную сходимость соответствующего ряда.
24. Доказать, что интегральное уравнение типа Вольтерра имеет и притом единственное решение для любой непрерывной функции *f(x)*.
25. Доказать, что однородное интегральное уравнение типа Вольтерра имеет только тривиальное решение.
26. Доказать, что интегральный оператор типа Вольтерра не имеет характеристических чисел.
27. Доказать сходимость ряда Неймана для решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с «малым» λ.
28. Получить выражение для резольвенты для интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с «малым» λ и доказать равномерную сходимость соответствующего ряда.
29. Доказать, что если λ не является характеристическим числом, то интегральное уравнение Фредгольма 2 рода с вырожденным ядром имеет и при том единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$.
30. Доказать, что для любого λ число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром и союзного с ним однородного уравнения одинаково.
31. Доказать, что неоднородное уравнение Фредгольма 2 рода с вырожденным ядром разрешимо тогда и только тогда, когда неоднородность $f(x)$ ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения.
32. Доказать, что неоднородное уравнение Фредгольма 2 рода с вырожденным ядром разрешимо для любой неоднородности (непрерывной функции $f(x)$) тогда и только тогда, когда однородное уравнение имеет только тривиальное решение.
33. Доказать, что любое интегральное уравнение Фредгольма 2 рода $y = \lambda A y + f$ с невырожденным ядром при фиксированном λ можно заменить «эквивалентным» интегральным уравнением с той же неоднородностью f и вырожденным ядром. В каком смысле эти уравнения эквивалентны?
34. Доказать, что любое (союзное) интегральное уравнение Фредгольма 2 рода $z = \lambda A^* z + g$ с невырожденным ядром при фиксированном λ можно заменить «эквивалентным» интегральным уравнением с теми же решениями z и вырожденным ядром. В каком смысле эти уравнения эквивалентны?
35. Доказать, что однородное уравнение Фредгольма 2 рода $y = \lambda A y$ и союзное с ним однородное уравнение $z = \lambda A^* z$ имеют либо только тривиальные решения либо одинаковое конечное число линейно независимых решений.
36. Доказать, что неоднородное уравнение Фредгольма 2 рода $y = \lambda A y + f$ разрешимо тогда и только тогда, когда f ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения $z = \lambda A^* z$ ($f \perp z_1, z_2, \ldots, z_n$).
37. Сформулировать и доказать альтернативу Фредгольма для интегрального уравнения Фредгольма 2 рода $y = \lambda A y + f$ с невырожденным ядром.
38. Доказать, что задача Штурма-Лиувилля эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции для интегрального оператора с непрерывным симметрическим и замкнутым ядром.
39. Доказать, что задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечно много собственных значений.
40. Доказать, что собственные значения задачи Штурма-Лиувилля простые (имеют кратность единица).
41. Доказать, что собственные функции задачи Штурма-Лиувилля ортогональны с весом $\rho(x)$.
42. Доказать, что собственные значения задачи Штурма-Лиувилля положительны.
43. Доказать теорему Стеклова.

44. Доказать, что необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его вариации при условии, что вариация существует.
45. Поставить задачу с закрепленными концами и получить необходимое условие экстремума.
46. Доказать основную лемму вариационного исчисления.
47. Поставить задачу с закрепленными концами и получить необходимые условия экстремума для функционала $V[y] = \int_a^b F(x, y_1, \ldots y_n; y_1', \ldots y_n')\, dx.$
48. Поставить задачу отыскания экстремума функционала $V[y,z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z')dx$ при условии, что концы закреплены, и имеется неголономная связь. Получить необходимые условия экстремума.

49. Поставить задачу отыскания экстремума функционала $V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$ при условии, что концы закреплены, и имеется голономная связь. Получить необходимые условия экстремума.
50. Получить необходимые условия экстремума для изопериметрической задачи с закрепленными концами.
51. Поставить задачу отыскания экстремума простейшего функционала вариационного исчисления при условии, что левый конец закреплен, а правый подвижен, и получить необходимые условия экстремума.
52. Поставить задачу отыскания экстремума простейшего функционала вариационного исчисления при условии, что левый конец свободен, а правый подвижен, и получить необходимые условия экстремума.
53. Поставить задачу отыскания экстремума простейшего функционала вариационного исчисления при условии, что оба конца подвижны, и получить необходимые условия экстремума.
54. Поставить задачу отыскания экстремума простейшего функционала вариационного исчисления при условии, что оба конца свободны, и получить необходимые условия экстремума.
55. Обосновать достаточные условия сильного минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
56. Обосновать достаточные условия слабого минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
57. Обосновать достаточные условия Лежандра сильного минимума в задаче с закрепленными концами.
58. Обосновать достаточные условия Лежандра слабого минимума в задаче с закрепленными концами.
59. Обосновать достаточные условия сильного максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
60. Обосновать достаточные условия слабого максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
61. Обосновать достаточные условия Лежандра сильного максимума в задаче с закрепленными концами.
62. Обосновать достаточные условия Лежандра слабого максимума в задаче с закрепленными концами.
63. Доказать, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ корректно поставлена в *C[a,b]*.
64. Доказать, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ корректно поставлена в *h[a,b]*.
65. Доказать, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода при условии, что интегральный оператор действует $A:\quad C[a,b]\to h[c,d]$, является некорректно поставленной.
66. Доказать теорему о существовании и единственности минимума функционала А.Н.Тихонова.
67. Доказать теорему о согласовании параметра регуляризации в функционале А.Н.Тихонова с погрешностью входных данных для построения регуляризирующего алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.
68. Доказать теорему: пусть взаимно однозначный интегральный оператор с непрерывным ядром $A:\ C[a,b]\to h[c,d]$, и $A\bar{y}=\bar{f}$, $\bar{y}(x)$ непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, $M^{\alpha}[y]=\|Ay-\bar{f}\|^2+\alpha(\|y\|^2+\|y'\|^2)$ (нормы соответственно в $h[c,d]$ и $h[a,b]$), $y^{\alpha}=\arg\min M^{\alpha}[y]$. Тогда $y^{\alpha}\xrightarrow{C[a,b]}\bar{y}$ при $\alpha\to 0+0$.

Раздел 4. Теоретические задачи

1. Доказать, что для любых двух элементов *x, y* нормированного пространства *N* справедливо неравенство: $|\,\|x\|-\|y\|\,|\le\|x-y\|$.
2. Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится, то эта последовательность является фундаментальной. В каких нормированных пространствах справедливо и обратное утверждение.
3. Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится, то эта последовательность ограничена.
4. Построить пример, показывающий, что из сходимости в среднем на отрезке *[a,b]* функциональной последовательности не следует равномерная (и даже поточечная) сходимость.
5. Доказать, что пространство *C[a,b]* является линейным.
6. Как определяется норма в пространстве *C[a,b]*? Доказать, что это на самом деле норма.
7. Доказать, что пространство $C^{(p)}[a,b]$ является линейным.
8. Как определяется норма в пространстве $C^{(p)}[a,b]$? Доказать, что это на самом деле норма.
9. Доказать, что пространство *h[a,b]* является линейным.
10. Как определяется норма в пространстве *h[a,b]*? Доказать, что это на самом деле норма.
11. Доказать, что пространство *h[a,b]* не является полным.
12. Доказать неравенство Коши-Буняковского для пространства *h[a,b]*.
13. Построить пример бесконечной ортонормированной системы в пространстве *h[a,b]*.

14. Доказать существование ограниченных некомпактных последовательностей в пространстве *h[a,b]*.
15. Доказать, что оператор, обратный к линейному оператору, является линейным оператором.
16. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма отображает линейное пространство *h[a,b]* в себя и является линейным оператором.
17. Доказать, что интегральный оператор Вольтерра отображает линейное пространство *h[a,b]* в себя и является линейным оператором.
18. Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле.
19. Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.
20. Доказать эквивалентность двух определений непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.
21. Доказать, что оператор дифференцирования, действующий из $C^{(1)}[a,b]$ в $C[a,b]$, является ограниченным.
22. Доказать, что оператор дифференцирования, определенный на подпространстве непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a,b]$ и действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, является неограниченным.
23. Доказать, что если A - линейный ограниченный оператор, $A: N_1 \to N_2$, N_1 и N_2 – нормированные пространства, $A \neq 0$, то $\|A\| > 0$.
24. Доказать, что для любого $y \in N_1$ выполнено неравенство $\| Ay \| \leq \| A \| \| y \|$, где A – линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.
25. Доказать, что если $B : N_2 \to N_3$ является непрерывным оператором, а оператор $A : N_1 \to N_2$ вполне непрерывный, то $BA : N_1 \to N_3$ - вполне непрерывный оператор($.N_1$, N_2, N_3 – нормированные пространства).
26. Доказать следующее утверждение: пусть линейный ограниченный оператор A действует из нормированного пространства N_1 нормированное пространство N_2, линейный ограниченный оператор B действует из нормированного пространства N_2 нормированное пространство N_3. Тогда $||BA|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.
27. Доказать, что если взаимно однозначный оператор A является вполне непрерывным при действии из $h[a,b]$ в $h[c,d]$, то обратный оператор не является ограниченным.
28. Доказать, что единичный оператор, действующий в пространстве *h[a,b]*, не является вполне непрерывным.
29. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, ограничен, и найти оценку сверху нормы оператора.
30. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из *h[a,b]* в *h[a,b]*, ограничен, и найти оценку сверху нормы оператора.
31. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из *h[a,b]* в $C[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.
32. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из *h[a,b]* в *h[a,b]*, является вполне непрерывным оператором.
33. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с симметрическим ядром, действующий из *h[a,b]* в *h[a,b]*, является самосопряженным оператором.
34. Пусть φ - собственный вектор самосопряженного оператора A, действующего в евклидовом пространстве. Доказать, что множество векторов, ортогональных φ, образуют замкнутое линейное подпространство, инвариантное относительно оператора A.
35. Доказать, что если интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x,s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a,b]$ (комплексном расширении пространства *h[a,b]*), то этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.
36. Приведите пример самосопряженного оператора, действующего в пространстве *h[a,b]* и не имеющего собственных значений.
37. Приведите пример вполне непрерывного оператора, действующего в пространстве *h[a,b]* и не имеющего собственных значений.
38. Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.
39. Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора A, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.
40. Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет бесконечную кратность.
41. Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет конечную кратность.

42. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с ядром $K(x,s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin ns}{n^2}$, действующий в пространстве *h[0, π]*, является невырожденным.

43. Доказать, что нуль является простым собственным значением интегрального оператора Фредгольма, действующего в пространстве *h[0, π]*, с ядром $K(x,s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx\sin ns}{n^2}$.

44. Доказать, что нулевое собственное значение интегрального оператора Фредгольма, действующего в пространстве *h[0, π]*, с ядром $K(x,s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx\sin 2ns}{(2n)^2}$ имеет бесконечную кратность.

45. Привести пример вырожденного интегрального оператора Фредгольма с невырожденным ядром.

46. Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого, имеет кратность 5.

47. Доказать, что сжимающий оператор является непрерывным.

48. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, умноженный на «малое» λ, является сжимающим при действии в *C[a,b]*.

49. Определим оператор *D*: $C[a,b]\to C[a,b]$ следующим образом: для любого $y\in C[a,b]$ $Dy\equiv\lambda Ay+f$, где *A* – интегральный оператор Вольтерра с непрерывным ядром, *f(x)* – непрерывная на *[a, b]* функция. Доказать, что для любого λ существует натуральное число *k* такое, что D^k - сжимающий оператор.

50. Доказать, что если оператор D действует в полном нормированном пространстве, а оператор D^k (*k* – натуральное число) сжимающий, то неподвижные точки операторов D и D^k совпадают, из чего следует, что оператор D имеет единственную неподвижную точку.

51. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий в *C[a,b]*, не имеет характеристических чисел на интервале (0, 1/(M(b-a)), где $M=\max_{x,s\in[a,b]}|K(x,s)|$.

52. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий в *h[a,b]*, не имеет характеристических чисел на интервале (0, 1/(M(b-a)), где $M=\max_{x,s\in[a,b]}|K(x,s)|$.

53. Доказать, что минимальное по модулю характеристическое число интегрального оператора Фредгольма, действующего в *C[a,b]*, удовлетворяет неравенству $|\lambda_{\min}|\ge\frac{1}{M(b-a)}$, где $M=\max_{x,s\in[a,b]}|K(x,s)|$.

54. Доказать, что минимальное по модулю характеристическое число интегрального оператора Фредгольма, действующего в *h[a,b]*, удовлетворяет неравенству $|\lambda_{\min}|\ge\frac{1}{M(b-a)}$, где $M=\max_{x,s\in[a,b]}|K(x,s)|$.

55. Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в *C[a,b]*, не имеет характеристических чисел.

56. Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в *h[a,b]*, не имеет характеристических чисел.

57. Доказать эквивалентность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и задачи решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.

58. Получить уравнение для отыскания характеристических чисел интегрального оператора Фредгольма с вырожденным ядром.

59. Получить выражение для резольвенты неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром при условии, что λ не является характеристическим числом.

60. Доказать, что оператор Штурма-Лиувилля является симметрическим в *h[a,b]*, если в качестве области его определения рассматривать подпространство дважды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка *[a,b]*.

61. Доказать, что для минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля имеет место неравенство: $\lambda_1\ge\inf_{x\in[a,b]}\frac{q(x)}{\rho(x)}\ge 0.$

62. Привести пример первой краевой задачи для уравнения Эйлера для функционала $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$, которая не имеет решения.

63. Привести пример первой краевой задачи для уравнения Эйлера для функционала $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$, которая имеет неединственное решение.

64. Какие решения имеет уравнение Эйлера для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(y')dx$?

65. Получить первый интеграл уравнения Эйлера для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y')dx$.

66. Получить первый интеграл уравнения Эйлера для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(y,y')dx$.

67. Решить задачу о брахистохроне.

68. Исходя из вариационного принципа наименьшего действия, получить уравнения движения материальной точки в потенциальном поле.

69. Решить задачу об отыскании кривой заданной длины, площадь под которой максимальна.

70. Показать, что если в задаче об отыскании экстремума с левым закрепленным и правым подвижным концами функционал имеет вид: $V[y]=\int\limits_a^{B[y]} A(x,y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, и функция $A(x,y)\neq 0$ дифференцируема по x, y, то условие трансверсальности в этом случае переходит в условие ортогональности.

71. Найти экстремум функционала $V[y]=\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx$ при условии, что левый конец закреплен, а правый может перемещаться вдоль заданной прямой: $y(0)=0$; $y_1=x_1-5$.

72. Какой экстремум (слабый или сильный, минимум или максимум) достигается в задаче с закрепленными концами для функционала $V[y]=\int\limits_0^a (y')^3dx$ с граничными условиями $y(0)=0$, $y(a)=b$, $a>0$, $b>0$.

73. Исследовать на разрешимость уравнение: $\int\limits_a^x y(s)ds=f(x),\ x,s\in[a,b]$.

74. Доказать, что множество функций $y(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ и таких, что $\|y\|^2_{h[a,b]}+\|y'\|^2_{h[a,b]}\le C^2,\quad C>0$ равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.

75. Доказать, что последовательность функций $\{y_n(x)\}$ (*n=1, 2, ...*), непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ и удовлетворяющих неравенству $\|y_n\|^2_{h[a,b]}+\|y_n'\|^2_{h[a,b]}\le C^2$, является компактной в $C[a,b]$.